ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Sur une inégalité différentielle à l'argument retardé

par K. Zima (Katowice)

Soit l'équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad y'(t) = \int_0^\infty F\big(y(t-s)\big)\,dr(t,s) + f(t), \qquad t \in [A, B), \qquad B \leqslant +\infty.$$

Pour $t \leqslant A$ on a $y(t) = \varphi(t)$ ([2], p. 53).

Sur l'équation (1) nous faisons les hypothèses suivantes:

(a) $F(z)$ est une fonction définie et nondécroissante pour $z \in (-\infty, +\infty)$.

(b) $r(t, s)$ est une fonction définie dans l'ensemble $0 \leqslant s < \infty$, $A \leqslant t < B$ et nondécroissante par rapport à s pour chaque $t \in [A, B)$.

(c) $f(t)$ est une fonction définie dans l'intervalle $[A, B)$.

Moyennant ces hypothèses nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. *Si la fonction $z(t)$ est différentiable et satisfait aux conditions suivantes*

$$(\alpha) \qquad z(t) \geqslant \varphi(t) \quad \textit{pour} \quad t \leqslant A$$

$$(\beta) \qquad z'(t) > \int_0^\infty F\big(z(t-s)\big)\,dr(t,s) + f(t) \quad \textit{pour} \quad t \in [A, B),$$

alors $y(t) < z(t)$ pour $t \in (A, B)$, où $y(t)$ est une solution de l'équation (1) *avec la fonction initiale $\varphi(t)$.*

Démonstration. Des hypothèses (α), (a), (b), (β) résulte l'inégalité

$$z'(A) > \int_0^\infty F\big(z(A-s)\big)\,dr(A,s) + f(A)$$
$$\geqslant \int_0^\infty F\big(\varphi(A-s)\big)\,dr(A,s) + f(A) = y'(A).$$

Nous avons donc

$$\text{(i)} \qquad z'(A) > y'(A),$$

$$\text{(ii)} \qquad z(A) \geqslant \varphi(A) = y(A).$$

De l'inégalité (i) et (ii) résulte l'existence d'un intervalle (A, τ) tel que $z(t) > y(t)$ si $t \in (A, \tau)$. Soit τ_0 la plus grande des valeurs de t pour lesquelles l'inégalité $z(t) > y(t)$ a lieu, si $t \in (A, \tau_0)$. Pour le point τ_0 nous obtenons les relations

$$z(\tau_0) = y(\tau_0), \tag{j}$$

$$z'(\tau_0) \leqslant y'(\tau_0). \tag{jj}$$

D'autre part, en vertu de l'hypothèse (β) nous obtenons

$$\begin{aligned} z'(\tau_0) &> \int_0^\infty F\big(z(\tau_0 - s)\big)\, dr(\tau_0, s) + f(\tau_0) \\ &\geqslant \int_0^\infty F\big(y(\tau_0 - s)\big)\, dr(\tau_0, s) + f(\tau_0) = y'(\tau_0). \end{aligned}$$

Ainsi $z'(\tau_0) > y'(\tau_0)$, en contradiction avec l'inégalité (jj). Point τ_0 ne peut donc pas appartenir à l'intervalle (A, B), ce qui démontre le théorème I.

THÉORÈME II. *Si dans le théorème* I *nous remplaçons les hypothèses* (α), (β) *par les suivantes*

$$z(t) \leqslant \varphi(t) \quad \textit{pour} \quad t \leqslant A, \tag{$\bar{\alpha}$}$$

$$z'(t) < \int_0^\infty F\big(z(t-s)\big)\, dr(t, s) + f(t) \quad \textit{pour} \quad t \in [A, B), \tag{$\bar{\beta}$}$$

on peut démontrer d'une manière analogue que dans l'intervalle (A, B) *on a l'inégalité* $z(t) < y(t)$.

Application des théorèmes I et II à l'évaluation des intégrales des équations correspondantes. Nous admettons pour l'équation (1) les mêmes hypothèses (a), (b), (c) que dans les théorèmes I et II et de plus, nous admettons

(d) $\int_0^\infty dr(t, s)$ est convergente pour chaque $t \in [A, B)$,

(e) $\sup \varphi(t) = K < +\infty$.

Comparons à l'équation (1) l'équation différentielle sans argument retardé

$$z' = |F(z)| \cdot M(t) + |f(t)| + \varepsilon, \tag{2}$$

où $M(t) = \int_0^\infty dr(t, s)$, $\varepsilon > 0$ arbitraire. En nous appuyant sur ces hypothèses nous allons démontrer le théorème suivante:

THÉORÈME III. *Si* $z(t)$ *est pour* $t \in [A, B)$ *une intégrale de l'équation* (2) *avec la condition initiale* $z(A) \geqslant K$ *et* $z(t) = z(A)$ *quand* $t \leqslant A$, *et si, de plus,* $y(t)$ *est une intégrale de l'équation* (1) *dans l'intervalle* $[A, B)$ *pour la fonction initiale* $\varphi(t)$, *alors pour* $t \in (A, B)$ *on a l'inégalité* $y(t) < z(t)$.

Démonstration. Il résulte de la définition de la fonction $M(t)$ et de l'hypothèse (b) que $M(t) \geqslant 0$. Donc chaque intégrale de l'équation (2) est une fonction nondécroissante. En vertu de ce fait et des hypothèses (a), (b) nous obtenons

$$\int_0^\infty F\big(z(t-s)\big)\,dr(t,s)+f(t) \leqslant \int_0^\infty F\big(z(t)\big)\,dr(t,s)+f(t)$$
$$< \Big|F\big(z(t)\big)\Big|\cdot M(t)+f(t)+\varepsilon = z'(t)\,.$$

La fonction $z(t)$ satisfait donc à l'inégalité (α) et (β). Les hypothèses du théorème I sont donc vérifiées; pour $t \in (A, B)$ on a donc l'inégalité $y(t) < z(t)$, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème IV. *Si dans le théorème* III *on remplaçe l'hypothèse* (e) *par l'hypothèse* (e) $\inf\varphi(t) = k$, *alors dans l'intervalle* (A, B) *on a l'inégalité* $z(t) < y(t)$, *où* $z(t)$ *est une intégrale de l'équation*

$$z' = -|F(z)|\cdot M(t)-|f(t)|-\varepsilon, \qquad z(A) \leqslant k$$
$$\textit{et} \qquad z(t) = z(t) \qquad \textit{pour} \qquad t \leqslant A\,,$$

et $y(t)$ *est une intégrale de l'équation* (1) *avec la fonction initiale* $\varphi(t)$.

Exemple. Si l'on pose $F(z) \equiv z$, l'équation (1) prendra la forme

$$(1^*) \qquad y'(t) = \int_0^\infty y(t-s)\,dr(t,s)+f(A)\,.$$

Si, de plus, la fonction initiale $\varphi(t)$ satisfait à la condition $\sup|\varphi(t)| = K > 0$ alors, en vertu des théorèmes III et IV, pour l'intégrale $y(t)$ de l'équation (1^*) nous aurons l'évaluation

$$z_1(t) < y(t) < z_2(t) \qquad \text{pour} \qquad t \in (A, B)\,,$$

où $z_1(t)$ est une intégrale de l'équation $z' = M(t)\cdot z-|f(t)|-\varepsilon$ avec la condition initiale $z_1(A) = -K$, et $z_2(t)$ est une intégrale de l'équation $z' = M(t)z + f(t)+\varepsilon$, avec la condition $z_2(A) = K$.

Après avoir effectivement déterminé la fonction $z_1(t)$ et $z_2(t)$, et passé à la limite avec ε, nous obtenons l'inégalité suivante

$$|y(t)| \leqslant \exp\Big[\int_A^t M(s)\,ds\Big]\cdot\Big\{\int_A^t |f(s)|\cdot\exp\Big[-\int_A^s M(\tau)\,d\tau\Big]ds+K\Big\}\,.$$

L'évaluation donnée ici été démontrée d'une autre manière par A. D. Myszkis ([2], page 55).

Généralisation des théorèmes I-IV aux systèmes d'inégalités différentielles. Considérons le système d'équations différentielles de la forme

$$(1^\circ)\qquad \begin{aligned} & y'_\nu(t) = \int_0^\infty F_\nu\big(y_1(t-s), \dots, y_n(t-s)\big)\, dr_\nu(t, s) + f_\nu(t), \qquad t \in [A, B), \\ & y_\nu(t) = \varphi_\nu(t) \quad \text{pour} \quad t \leqslant A, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Pour le système (1°) nous admettons les hypothèses suivantes

(a°) $F_\nu(u_1, \dots, u_n)$ est une fonction définie pour $-\infty < u_\nu < +\infty$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, et nondécroissante par rapport à u_ν pour $\nu = 1, 2, \dots, n$.

(b°) $r_\nu(t, s)$ est une fonction définie pour $s \in [0, +\infty)$ et $t \in [A, B)$ et nondécroissante par rapport à s pour $t \in [A, B)$.

(c°) $f_\nu(t)$ est une fonction définie pour $t \in [A, B)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$.

Moyennant ces hypothèses nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME I°. *Soient $z_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, des fonctions définies dans l'intervalle $(-\infty, B)$ différentiables dans l'intervalle $[A, B)$ et satisfaisant aux conditions suivantes*

$$(\alpha^\circ)\qquad z_\nu(t) \geqslant \varphi_\nu(t) \quad \textit{pour} \quad t \leqslant A, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

$$(\beta^\circ)\qquad z'_\nu(t) > \int_0^\infty F_\nu\big(z_1(t-s), \dots, z_n(t-s)\big)\, dr_\nu(t, s) + f_\nu(t), \qquad t \in [A, B), \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Alors dans l'intervalle (A, B) nous avons les inégalités $z_\nu(t) > y_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, où $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ est une intégrale du système (1°) *avec les functions initiales $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$.*

Démonstration. Des hypothèses (a°), (b°), (α°) résulte que pour chaque $\nu = 1, 2, \dots, n$, on a

$$z'_\nu(A) > \int_0^\infty F_\nu\big(\varphi_1(A-s), \dots, \varphi_n(A-s)\big)\, dr_\nu(A, s) + f_\nu(A) = y'_\nu(A), \qquad \text{c.à.d.},$$

$$(\mathrm{i}^\circ)\qquad z'_\nu(A) > y'_\nu(A) \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

$$(\mathrm{ii}^\circ)\qquad z_\nu(A) \geqslant \varphi_\nu(A) = y_\nu(A), \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Il résulte de l'inégalité (i°) et (ii°) qu'il existe des nombres τ_ν, $\nu = 1, 2, \dots, n$, tels que pour chaque ν on a l'inégalité $z_\nu(t) > y_\nu(t)$ lorsque $t \in (A, \tau_\nu)$.

Soit τ_ν^0 la borne supérieure des valeurs de t, pour lesquelles l'inégalité $z_\nu(t) > y_\nu(t)$ est verifiée, si $t \in (A, \tau_\nu^0)$. Soit de plus $\tau_\sigma^0 = \min(\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_n^0)$. Nous allons montrer que τ_σ^0 n'appartient pas à l'intervalle (A, B). Il est évident que le point τ_σ^0 satisfait aux relations

$$(\mathrm{j}^\circ)\qquad z_\sigma(\tau_\sigma^0) = y_\sigma(\tau_\sigma^0),$$

$$(\mathrm{jj}^\circ)\qquad z'_\sigma(\tau_\sigma^0) \leqslant y'_\sigma(\tau_\sigma^0).$$

D'autre part, en vertu de l'hypothèse (β^0) nous obtenons

$$z'_\sigma(\tau_\sigma^0) > \int_0^\infty F_\sigma\big(z_1(\tau_\sigma^0 - s), \ldots, z_n(\tau_\sigma^0 - s)\big)\, dr_\sigma(\tau_\sigma^0, s) + f_\sigma(\tau_\sigma^0)$$

$$\geqslant \int_0^\infty F_\sigma\big(y_1(\tau_\sigma^0 - s), \ldots, y_n(\tau_\sigma^0 - s)\big)\, dr(\tau_\sigma^0, s) + f_\sigma(\tau_\sigma^0) = y'_\sigma(\tau_\sigma^0)\,,$$

c. à. d.

$$z'_\sigma(\tau_\sigma^0) > y'_\sigma(\tau_\sigma^0)\,.$$

L'inégalité obtenue est en contradiction avec l'inégalité (jj^0) se qui prouve que le point τ_σ^0 n'appartient pas à l'intervalle (A, B).

Donc, dans tout l'intervalle (A, B) on a l'inégalité $z_\nu(t) > y_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

On démontre d'une manière analogue le théorème suivant:

Théorème II^0. *Nous admettons sans modifications les hypothèses* (a^0), (b^0), (c^0) *du théorème* I^0 *et dans les hypothèses* (α^0) *et* (β^0) *nous changeons dans le sens des inégalités, c'est-à-dire*

$$(\bar{\alpha}^0) \qquad z_\nu(t) \leqslant \varphi_\nu(t)\,, \quad t \leqslant A\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$(\bar{\beta}^0) \qquad z'_\nu(t) < \int_0^\infty F_\nu\big(z_1(t-s), \ldots, z_n(t-s)\big)\, dr_\nu(t, s) + f_\nu(t)\,, \quad t \in [A, B)\,.$$

Alors on a pour $t \in (A, B)$ *l'inégalité* $z_\nu(t) < y_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Évaluation des intégrales du système (1^0) **par une intégrale du système correspondant d'équations différentielles ordinaires.** On peut associer univoquement au système (1^0) le système suivant sans argument retardé

$$(2^0) \qquad u'_\nu = \pm\{|F_\nu(u_1, \ldots, u_n)| \cdot M_\nu(t) + |f_\nu(t)| + \varepsilon_\nu\}\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n\,,$$

où $M_\nu(t) = \int_0^\infty dr_\nu(t, s)$ et $\varepsilon_\nu > 0$ est d'ailleurs arbitraire. Nous allons formuler le theoreme suivant:

Théorème III^0 (IV^0). *S'il existe dans l'intervalle* $[A, B)$ *une solution* $\{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$ *du système* (2^0) *avec la condition initiale* $u_\nu(A) \geqslant \sup\varphi_\nu(t)$ $\big(u_\nu(A) \leqslant \inf\varphi_\nu(t)\big)$ *pour* $\nu = 1, 2, \ldots, n$, *alors dans l'intervalle* (A, B) *on a l'inégalité*

$$u_\nu(t) > y_\nu(t) \qquad \big(u_\nu(t) < y_\nu(t)\big) \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n\,,$$

où $\{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\}$ *est une solution du système* (1°) *avec les fonctions initiales* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$.

Le démonstration du théorème III° (IV°) est analogue à celle du théorème III (IV).

Travaux cités

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[2] А. Д. Мышкис, *Линейные дифференциалные уравнения с запаздывающим аргументом,* Моцква-Ленинград 1951.

Reçu par la Rédaction le 1. 3. 1961