ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLII (1983)

Une remarque sur les inégalités différentielles

par Z. Mikołajska (Kraków)

Dédié à la mémoire de Jacek Szarski

Résumé. Dans notre note nous avons démontré une théorème sur l'evaluation d'une fonction (peut-être incontinue) par la solution d'une équation différentielle. La condition obtenue est suffisante et necessaire.

1. Dans la présente note nous allons démontrer une condition suffisante et nécessaire pour l'inégalité

$$(1.1)\qquad u(t) \leqslant v(t) \quad \text{dans } t_0 \leqslant t \leqslant d,$$

où $v(t)$ est une solution maximale de l'équation

$$(1.2)\qquad v(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, v(s)\big)\,ds,$$

dans le cas où $\omega(s, v)$ est continue pour $t_0 \leqslant t \leqslant d$, v quelconque, $\omega(s, v)$ croissante par rapport à v. Dans le cas envisagé on ne suppose pas la continuité de $u(t)$. On admet seulement que la fonction $u(t)$ est définie et bornée dans $t_0 \leqslant t \leqslant d$. On obtient ainsi le théorème suivant:

Hypothèses H_1. 1° *$\omega(t, y)$ est une fonction continue dans l'ensemble* $\{t_0 \leqslant t \leqslant d,\ -\infty < y < +\infty\}$,

2° *$\omega(t, y)$ est croissante par rapport à y,*

3° *$v(t)$ est une solution maximale de l'équation* (1.2) *dans l'intervalle* $[t_0, d]$,

4° *$u(t)$ est une fonction définie dans l'intervalle* $[t_0, d]$,

5° *$u(t)$ est bornée dans* $[t_0, d]$.

Posons par définition

$$(1.3)\qquad k = \sup_{[t_0,d]}[u(t) - v(t)], \quad u(t) \text{ étant bornée on a } k < \infty.$$

HYPOTHÈSES H_2. *Pour chaque fonction $f(t)$ continue dans $[t_0, d]$ telle que*

$$m(t) = \max\big(v(t), u(t)\big) \leqslant f(t) \leqslant v(t)+k \quad \textit{pour } t_0 \leqslant t \leqslant d \tag{1.4}$$

on a

$$u(t) \leqslant u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, f(s)\big)\,ds \quad \textit{pour } t_0 \leqslant t \leqslant d. \tag{1.5}$$

THÉORÈME T. *Les hypothèses* H_1 *étant admises, l'hypothèse* H_2 *est nécessaire et suffisante pour l'inégalité* (1.1).

Remarque 1. La nécessité de la condition H_2 est évidente, car dans le cas où $u(t) \leqslant v(t)$ dans $[t_0, d]$ on a

$$k \leqslant 0$$

et, par suite, l'ensemble des fonctions $f(t)$ satisfaisant à (1.4) est vide (dans la cas où $k < 0$) où bien il se réduit à la fonction $v(t)$ (dans le cas où $k = 0$). Dans le deuxième cas la fonction unique satisfaisant à (1.4) est $v(t)$ et on a

$$u(t) \leqslant v(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, v(s)\big)\,ds.$$

2. Dans la démonstration du théorème T nous utiliserons le lemme suivant:

LEMME L. *Dans le cas où $k > 0$ et où les hypothèses H_1 et H_2 sont admises pour chaque fonction $g(t)$ définie dans $[t_0, d]$ et telle que*

1° *$g(t)$ est continue dans $[t_0, t_1]$ et $(t_1, d]$ où $t_0 \leqslant t_1 < d$,*

2° *$g(t) \leqslant v(t)$ pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$,*

3° $g^* = \lim\limits_{t \to t_1+0} g(t) > g(t_1)$,

4° $|g(\bar{t}) - g(\bar{\bar{t}})| \leqslant M|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|$ *pour* $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in [t_0, t_1]$,

5° $\max\big(v(t), u(t)\big) \leqslant g(t) \leqslant v(t) + k$ *dans* $[t_0, d]$,

on a

6° $u(t) \leqslant u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, g(s)\big)\,ds$.

Démonstration du lemme L. Supposons que la fonction $g(t)$ satisfaisse à 1°, 2°, 3°, 4° et 5°. Dans le cas où $t_1 = t_0$ l'inégalité 6° est une conséquence immédiate de l'hypothèse H_1 et H_2. Supposons que $t_1 > t_0$ et envisageons la fonction continue $g_\varepsilon(t)$ suivante

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} g(t) & \text{dans} \quad [t_0, t_1 - \varepsilon] \text{ et } (t_1, d], \\ g(t_1 - \varepsilon) + \dfrac{g(t_1) - g(t_1 - \varepsilon)}{\varepsilon}(t - t_1 + \varepsilon) & \text{pour} \quad t_1 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_1. \end{cases}$$

En vertu de 4°, 2° et 3°, puisque k est positif la fonction $g_\varepsilon(t)$ satisfait à (1.4) et

$$v(t)+k \geqslant g_\varepsilon(t) \geqslant g(t) \geqslant m(t) \qquad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant d$$

on a, en vertu de (1.5),

$$\begin{aligned} u(t) &\leqslant u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, g_\varepsilon(s)\big)\,ds \\ &= u(t_0) + \int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} \omega\big(s, g(s)\big)\,ds + \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} \omega\big(s, g_\varepsilon(s)\big)\,ds + \int_{t_1}^{t} \omega\big(s, g(s)\big)\,ds. \end{aligned}$$

En passant à la limite avec $\varepsilon \to 0$ on obtient $u(t) \leqslant u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, g(s)\big)\,ds$

3. Démonstration du théorème T. Supposons que $k > 0$ et $\omega(t, x) \leqslant M$ pour $\inf u(t) \leqslant x \leqslant m(t)+k$. On a

$$v(t_0) = u(t_0) \tag{3.1}$$

et par suite il existe $t_1 \geqslant t_0$, $t_1 < d$ tel que

$$v(t) \geqslant u(t) \qquad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{3.2}$$

Posons par définition

$$\delta = \min(d - t_1, k/2M). \tag{3.3}$$

Nous démontrons que

$$u(t) \leqslant v(t) \qquad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + \delta. \tag{3.4}$$

Envisageons la suite de fonctions suivante

$$v_0(t) = \begin{cases} v(t) & \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ v(t)+k & \text{pour } t_1 < t \leqslant t_1+\delta, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$v_k(t) = \begin{cases} v(t) & \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, v_{k-1}(s)\big)\,ds & \text{pour } t_1 < t \leqslant t_1+\delta. \end{cases} \tag{3.6}$$

De la définition de $v_0(t)$ il est évident que

$$m(t) \leqslant v_0(t) \leqslant v(t)+k \qquad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1+\delta,$$

$\omega(t, x)$ étant croissante par rapport à x on a

$$\begin{aligned} v(t) &= v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, v(s)\big)\,ds \\ &\leqslant v(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \omega\big(s, v(s)\big)\,ds + \int_{t_1}^{t} \omega\big(s, v(s)+k\big)\,ds = v(t_1) \\ &\leqslant v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, v(s)\big)\,ds + \int_{t_1}^{t} \big[\omega\big(s, v(s)+k\big) - \omega\big(s, v(s)\big)\big]\,ds \\ &\leqslant v(t) + 2M(t-t_1) \leqslant v(t)+k = v_0(t) \quad \text{pour } t_1 \leqslant t \leqslant t_1+\delta, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(3.7) \qquad v(t) \leqslant v_1(t) \leqslant v_0(t) \leqslant v(t)+k \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1+\delta.$$

En vertu du lemme L et de l'inégalité (3.7) on a

$$u(t) \leqslant v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, v_0(s)\big)\,ds \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1+\delta.$$

Supposons que

$$(3.8) \qquad m(t) \leqslant v_k(t) \leqslant v_{k-1}(t) \leqslant v(t)+k \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1+\delta$$

on a donc en vertu du lemme L

$$u(t) \leqslant v_{k+1}(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, v_k(s)\big)\,ds \quad \text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1+\delta$$

et, $\omega(t, s)$ étant croissante, on a, en vertu de (3.8)

$$v(t) \leqslant v_{k+1}(t) \leqslant v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, v_{k-1}(s)\big)\,ds = v_k(t) \leqslant v(t)+k$$
$$\text{pour } t_0 \leqslant t \leqslant t_1+\delta$$

et par suite pour chaque $k = 1, 2, \ldots$ on a (3.8) dans tout intervalle $[t_0, t_1+\delta]$.

La suite $v_k(t)$ étant décroissante et bornée, elle est convergente

$$m(t) \leqslant \lim_{k\to\infty} v_k(t) = \tilde{v}(t) \leqslant v(t)+k \quad \text{dans } [t_0, t_1+\delta],$$

$$\tilde{v}(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega\big(s, \tilde{v}(s)\big)\,ds,$$

mais $v(t)$ est la solution maximale de (1.2) et par suite

$$u(t) \leqslant m(t) \leqslant \tilde{v}(t) \leqslant v(t) \qquad \text{dans } [t_0, t_1 + \delta];$$

δ ne dépend pas de t_1 pour $d - t_1 \geqslant k/2M$. L'inégalité (1.1) est donc satisfaite dans chaque intervalle $[t_0, t_1 + n\delta] \cap [t_0, d]$. Le théorème T est ainsi démontré.

Reçu par la Rédaction le 3.03.1981