ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1964)

Sur un comitant algébrique d'un objet de connexion affine

par S. GOŁĄB (Kraków)

Etant donné un objet géométrique de connexion affine, c'est-à-dire les paramètres du transport parallèle,

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \tag{1}$$

on peut construire les comitants algébriques suivants

$$\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}, \tag{2}$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \tfrac{1}{2}[\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}], \tag{3}$$

$$S^{\nu}_{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \tfrac{1}{2}[\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}], \tag{4}$$

$$\overset{+}{\Gamma}_{\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}, \tag{5}$$

$$\overset{-}{\Gamma}_{\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma^{\nu}_{\nu\mu}. \tag{6}$$

Ce sont tous des objets géométriques; les deux premièrs représentent un objet ayant la même règle de transformation que l'objet (1). L'objet (4) est un tenseur (antisymétrique). Les objets (5) et (6) sont, comme (2) et (3), des objets de deuxième classe [1].

Si l'objet (1) est symétrique (c'est une propriété invariante par rapport aux changements de coordonnées), alors (2) et (3) se confondent avec (1) et (4) devient un tenseur nul.

Supposons ensuite que l'objet (1) *ne soit pas symétrique*. Supposons de plus que

$$n = 2, \tag{7}$$

c'est-à-dire que notre espace ait deux dimensions. Posons

$$\varrho^{\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} S^{\nu}_{12} \tag{8}$$

et cherchons la règle de transformation des ϱ^{ν} quand on passe au nouveau système de coordonnées $\xi^{\nu'}$. Puisque les $S^{\nu}_{\lambda\mu}$ se transforment comme les composantes d'un tenseur, on a

$$S^{\nu'}_{\lambda'\mu'} = S^{\nu}_{\lambda\mu} A^{\nu'}_{\nu} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\mu}_{\mu'} \quad \left(A^{\nu'}_{\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \xi^{\nu'}}{\partial \xi^{\nu}},\ A^{\lambda'}_{\lambda} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial \xi^{\lambda'}}\right).$$

Nous avons en particulier

$$S^{\nu'}_{1'2'} = S^{\nu}_{\lambda\mu} A^{\nu'}_{\nu} A^{\lambda}_{1'} A^{\mu}_{2'}$$
$$= S^{\nu}_{11} A^{\nu'}_{\nu} A^{1}_{1'} A^{1}_{2'} + S^{\nu}_{12} A^{\nu'}_{\nu} A^{1}_{1'} A^{2}_{2'} + S^{\nu}_{21} A^{\nu'}_{\nu} A^{2}_{1'} A^{1}_{2'} + S^{\nu}_{22} A^{\nu'}_{\nu} A^{2}_{1'} A^{2}_{2'} .$$

Mais nous avons en vertu de l'antisymétrie

$$S^{\nu}_{11} = S^{\nu}_{22} = 0\,, \qquad S^{\nu}_{21} = -S^{\nu}_{12}\,,$$

donc

$$S^{\nu'}_{1'2'} = S^{\nu}_{12} A^{\nu'}_{\nu} (A^{1}_{1'} A^{2}_{2'} - A^{2}_{1'} A^{1}_{2'})\,.$$

Nous avons ensuite

$$A^{1}_{1'} A^{2}_{2'} - A^{2}_{1'} A^{1}_{2'} = J^{-1}\,,$$

si nous désignons par

$$J \stackrel{\mathrm{df}}{=} \det\,(A^{\nu'}_{\nu})$$

le jacobien de la transformation $\xi^{\nu} \to \xi^{\nu'}$. Cela nous donne

$$\varrho^{\nu'} = J^{-1} \cdot \varrho^{\nu} \cdot A^{\nu'}_{\nu}\,, \tag{9}$$

ce qui signifie que ϱ^{ν} est un vecteur-densité de poids $+1$. Supposons que $\varrho^{1} \neq 0$ et posons

$$\omega \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\varrho^{2}}{\varrho^{1}}\,. \tag{10}$$

Dans le nouveau système de coordonnées nous avons

$$\omega' = \frac{\varrho^{2'}}{\varrho^{1'}} = \frac{J^{-1}(\varrho^{1} A^{2'}_{1} + \varrho^{2} A^{2'}_{2})}{J^{-1}(\varrho^{1} A^{1'}_{1} + \varrho^{2} A^{1'}_{2})} = \frac{A^{2'}_{1} + \dfrac{\varrho^{2}}{\varrho^{1}} A^{2'}_{2}}{A^{1'}_{1} + \dfrac{\varrho^{2}}{\varrho^{1}} A^{1'}_{2}} = \frac{A^{2'}_{1} + \omega A^{2'}_{2}}{A^{1'}_{1} + \omega A^{1'}_{2}}\,. \tag{11}$$

Nous constatons alors que l'objet (10) est un *objet de Pensov* (dont la règle de transformation est celle du quotient des coordonnées d'un vecteur contrevariant) ([2], p. 145). Remarquons qu'à la page 14 de [1] il y a une faute dans la règle de transformation de l'objet de Pensov de Ω.

On peut parvenir au même résultat par un autre raisonnement. On sait que pour $n = 2$ l'objet $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ est demi-symétrique ([6], p. 82), c'est-à-dire qu'il jouit de la propriété

$$S^{\nu}_{\lambda\mu} = S_{[\lambda} A^{\nu}_{\mu]}\,, \tag{12}$$

où S_{λ} est un vecteur covariant et A^{ν}_{μ} l'affineur-unité ([3], p. 286). On peut calculer les composantes du vecteur S_{λ} et on obtient

$$S_{1} = \Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{2}_{21}\,, \qquad S_{2} = \Gamma^{1}_{21} - \Gamma^{1}_{12}\,. \tag{13}$$

On sait en outre que le quotient

$$-\frac{S_1}{S_2} \tag{14}$$

a la même règle de transformation que l'objet de Pensov [4], p. 87, et que le quotient précédent est justement égal à ω.

De cette façon *nous avons obtenu ω comme comitant algébrique de première classe de l'objet $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$*. Bien entendu, l'objet ω n'existe pas dans le cas où $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ est symétrique. Dans le cas $n \geqslant 3$ la construction de ω est aussi illusoire.

Remarque. Il est intéressant que le couple

$$(\varrho^1, \varrho^2)$$

représente un vecteur-densité contrevariant, alors que le couple

$$(\varrho^2, -\varrho^{-})$$

représente en même temps un vecteur covariant. Nous reviendrons dans une note ultérieure [5] à cette question qui est liée à la notion d'équivalence de deux objets géométriques.

Travaux cités

[1] J. Aczél, S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte,* Warszawa 1960.

[2] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy,* Warszawa 1956.

[3] — *Sopra le connessioni lineari generali. Estensione d'un teorema di Bompiani nel caso più generale,* Annali di Matem. 8 (1930/31), p. 283-291.

[4] — *Sur les objets géométriques à une composante,* Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 79-89.

[5] — *Sur l'équivalence des vecteurs-densités* (vient de paraître).

[6] J. A. Schouten, D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie,* T. 1, Groningen 1935.

Reçu par la Rédaction le 7. 8. 1961