ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLII (1983)

Sur une classe des groupes continus à un paramètre formés des fonctions réelles d'une variable

par O. Borůvka (Brno)

À la mémoire de l'illustre mathématicien Jacek Szarski

Résumé. 1. Un groupe formé des fonctions réelles continues dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ est dit *planaire* si par tout point du plan $j \times j$ il passe précisément un élément du groupe. Le présent travail est consacré à l'étude des propriétés globales des groupes planaires.

2. Tout groupe planaire, $\mathfrak{P}$, admet un ordre linéaire et jouit de la propriété archimédienne. On en déduit que le groupe $\mathfrak{P}$ est o-isomorphe au groupe $\mathfrak{R} = (R, +)$ ordonné de la manière habituelle ($R = (-\infty, \infty)$).

3. Soit $\mathfrak{P}$ un groupe planaire. Un nombre $e \in R$ étant choisi, on appelle *paramétrisation canonique* de $\mathfrak{P}$ (par rapport à e) l'application $\mathscr{A}_e\colon \mathfrak{P} \to R$, $\mathscr{A}_e s = s(e)$ ($s \in \mathfrak{P}$). L'application $\mathscr{A}_e$ étant donnée, le groupe $\mathfrak{P}$ est dit *paramétrisé* (par rapport à e) et le nombre $s(e)$ prend le nom de *paramètre* de l'élément $s \in \mathfrak{P}$. On définit la fonction $\mathscr{S}\colon j \times R \to R$ par les formules suivantes: $\mathscr{S}(t, A) = s(t)$, $A = s(e)$, $s \in \mathfrak{P}$.

Voici les résultats qui sont à la base de la théorie considérée:

Le groupoide $\mathfrak{R}_e = (R, \circ)$ muni de la loi de composition interne $A \circ B = \mathscr{S}(B, A)$ $\forall A, B \in R$ est un groupe. L'application $\mathscr{A}_e$ est un o-isomorphisme du groupe $\mathfrak{P}$ sur le groupe $\mathfrak{R}_e$ ordonné de la manière habituelle. Le groupe $\mathfrak{R}_e$ est o-isomorphe au $\mathfrak{R}$. Les groupes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}_e$ sont abéliens et l'on a, en particulier, $\mathscr{S}(t, A) = \mathscr{S}(A, t)$ $\forall t \in j$, $\forall A \in R$. Tout o-isomorphisme du groupe $\mathfrak{R}_e$ sur $\mathfrak{R}$ est une fonction continue dans j, constamment croissant de $-\infty$ à ∞ et s annulant en e.

4. La théorie considérée, dont nous venons d'indiquer les fondements, procède par l'étude de la notion de continuité d'ordre k des groupes planaires et aboutit à une construction effective de tous les groupes planaires continus d'ordre k ($\geqslant 0$).

Introduction. Le présent travail est consacré à l'étude des propriétés globales de certains groupes des fonctions continues dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$. Les groupes en question, appelés *groupes planaires*, font passer par tout point du plan $j \times j$ précisément un élément du groupe, et dépendent, par conséquent, d'un paramètre.

L'étude en question a été initiée par mes recherches sur la structure algébrique des groupes des dispersions des équations différentielles linéaires du deuxième ordre [3], et en effet, elle est conçue de manière à admettre d'immédiates applications dans ces recherches. Nous nous proposons de revenir aux applications en question à une autre occasion.

La théorie des groupes planaires que nous allons développer se trouve fondée au fait que, tout groupe planaire $\mathfrak{P} \subset C^{(0)}$ admet un ordre linéaire et jouit de la propriété archimédienne. Il en résulte, à l'aide d'un théorème classique [4], l'existence des o-isomorphismes du groupe $\mathfrak{P}$ sur le groupe additif des nombres réels dans l'ordre habituel. Ces fonctions, que nous appelons *conjugateurs du groupe* $\mathfrak{P}$, jouent dans la théorie considérée un rôle primordial. En particulier, tout groupe planaire continu d'ordre k $(\geqslant 0)$, $\mathfrak{P}$, admet un système linéaire des conjugateurs de la classe $C^{(k)}$, dont chacun génère le groupe $\mathfrak{P}$ suivant une loi bien déterminée.

1. Groupes planaires. Nous considérons un groupe, $\mathfrak{P}$, formé des fonctions réelles d'une variable indépendante réelle, continues dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$, la loi de composition interne étant la composition des fonctions. On a

$$\mathfrak{P} \subset C^{(0)},$$

$id \in \mathfrak{P}$, et, toute fonction $s \in \mathfrak{P}$ résulte strictement monotone et non-bornée des deux côtés.

Nous dirons que le groupe $\mathfrak{P}$ est *planaire*, s'il existe pour tout point $(t, y) \in j \times j$ précisément une fonction $s \in \mathfrak{P}$ telle que $s(t) = y$.

Il est évident que, si le groupe $\mathfrak{P}$ est planaire, nulle fonction $s \in \mathfrak{P}$, $s \neq id$, n'admet des valeurs communes avec la fonction id. Dans ce cas toutes les fonctions-éléments de $\mathfrak{P}$ vont constamment en croissant de $-\infty$ à ∞ et jouissent de la propriété en question.

Nous supposons généralement que le groupe $\mathfrak{P}$ soit planaire.

La proposition suivante est presque évidente:

Si, pour deux fonctions $s, z \in \mathfrak{P}$ la relation $s(t) = z(t)$ ou bien $s(t) < z(t)$ subsiste pour un $t_0 \in j$, elle subsiste identiquement dans j.

D'après cela, on a sur $\mathfrak{P}$ un ordre, appelé *naturel*, dont la relation d'ordre, $\dashv$, est définie de la façon suivante:

Pour $s, z \in \mathfrak{P}$, $s \dashv z$ signifie $s(t) < z(t)$ $\forall t \in j$.

On a, évidemment, pour $s, z, w \in \mathfrak{P}$, $s \dashv z$: $sw \dashv zw$, $ws \dashv wz$, ce qui montre que l'ordre en question est linéaire sur $\mathfrak{P}$.

Nous allons montrer que, *par rapport à l'ordre naturel, le groupe $\mathfrak{P}$ résulte archimédien.*

En effet, soient $s, z \in \mathfrak{P}$, $id \dashv s$, $id \dashv z$; $t_0 \in j$. Posons, pour $n = 0, 1, \ldots$: $t_{n+1} = s(t_n)$. Nous avons $t_{n+1} = s(t_n) > id(t_n) = t_n$ et donc $t_{n+1} > t_n$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x < \infty$, on a $x = \lim\limits_{n\to\infty} s(t_n) = s(x)$ ou bien $id(x) = s(x)$ ce qui est absurde. On voit qu'il existe un nombre naturel n tel que $t_n > z(t_0)$ ou bien $(s^n(t_0) =) \underbrace{s \ldots s}_{n} (t_0) > z(t_0)$. Or, puisque $s^n, z \in \mathfrak{P}$, la dernière relation entraîne $z \dashv s^n$.

Cela étant, désignons par $\mathfrak{R}$ le groupe additif des nombres réels: $\mathfrak{R} = (R, +)$ $(R = (-\infty, \infty))$.

En appliquant le théorème classique de O. Hölder [4], cp. [2], [5], on a la

PROPOSITION 1. *Le groupe* $\mathfrak{P}$ *est o-isomorphe à un sous-groupe de* $\mathfrak{R}$.

CONCLUSION. *Le groupe* $\mathfrak{P}$ *est abélien.*

2. Paramétrisation. Un nombre $e \in j$ étant choisi, nous définissons l'application $\mathscr{A}_e\colon \mathfrak{P} \to R$ de la manière suivante: Pour $s \in \mathfrak{P}$ on a $\mathscr{A}_e s = s(e)$ $(\in R)$. On voit facilement que l'application $\mathscr{A}_e$ est une bijection de $\mathfrak{P}$ sur R. Nous l'appelons la *paramétrisation canonique de* $\mathfrak{P}$ *par rapport à la base* e, ou encore, plus brièvement, la *paramétrisation* $\mathscr{A}$; le nombre $s(e)$ est dit le *paramètre de* s *en* $\mathscr{A}_e$.

La paramétrisation $\mathscr{A}_e$ ayant été choisie, le groupe $\mathfrak{P}$ est dit *paramétrisé* (par rapport à e). Dans ce cas tout élément $s \in \mathfrak{P}$ admet précisément un paramètre A $(= s(e) \in R)$ et inversement, tout nombre $A \in R$ représente le paramètre en $\mathscr{A}_e$ exactement d'un élément $s \in \mathfrak{P}$. Nous disons que le *groupe* $\mathfrak{P}$ *est à un paramètre.*

Supposons que le groupe $\mathfrak{P}$ soit paramétrisé par rapport à la base e.

Nous définissons la fonction $\mathscr{S}\colon j \times R \to j$, dite la *fonction déterminante de* $\mathfrak{P}$, de la manière suivante: La valeur $\mathscr{S}(t, A)$ égale à la valeur $s(t)$ de la fonction $s \in \mathfrak{P}$ dont le paramètre est A.

Les fonctions partielles de la fonction $\mathscr{S}$, caractérisées par des valeurs fixes de t, A respectivement, seront désignées $\mathscr{S}(t, \cdot)$ $(t \in j$ fixe), $\mathscr{S}(\cdot, A)$ $(A \in R$ fixe); plus brièvement σ_t, $\mathscr{S}_A$.

On a, évidemment,

(1) $$\mathscr{S}(\cdot, A) \in \mathfrak{P} \ \forall A \in R.$$

La fonction $\mathscr{S}$ *jouit des propriétés suivantes:*

1° $\mathscr{S}(e, A) = A$, $\mathscr{S}(A, e) = A$ $\forall A \in R$;

2° *toutes les fonctions partielles* $\mathscr{S}(t, \cdot)$ *et* $\mathscr{S}(\cdot, A)$ *sont continues dans l'intervalle* R *et* j *respectivement, et elles vont constamment en croissant de* $-\infty$ *à* ∞;

3° $\mathscr{S}(\mathscr{S}(t, A), B) = \mathscr{S}(t, \mathscr{S}(A, B))$ $\forall t \in j$; $A, B \in R$;

4° *chaque équation* $\mathscr{S}(x, A) = e$, $\mathscr{S}(A, y) = e$ $(A \in R)$ *admet exactement une solution* x *resp.* y, *et l'on a* $x = y = A^-$, A^- *étant le paramètre de la fonction inverse de la fonction* $s \in \mathfrak{P}$ *au paramètre* A.

Nous omettons la démonstration qui s'effectue sans aucune espèce de difficulté.

Remarquons que, A étant le paramètre de s en $\mathscr{A}_e$ et B celui en $\mathscr{A}_{e_1}$ $(e_1 \in j)$, on a $B = \mathscr{S}(e_1, A)$.

3. Le groupe des paramètres canoniques de $\mathfrak{P}$. Soit $\mathfrak{R}_e = (R, \circ)$ le groupoïde muni de la loi de composition interne suivante:

$$A \circ B = \mathscr{S}(B, A) \ \forall A, B \in R.$$

On voit facilement, en tenant compte de 2.1°, 3°, 4°, que $\mathfrak{R}_e$ est un groupe. L'élément-unité de $\mathfrak{R}_e$ coïncide avec e, et, pour tout élément $A \in \mathfrak{R}_e$, l'élément inverse, A^-, est la solution commune des deux équations $\mathcal{S}(x, A) = e$, $\mathcal{S}(A, y) = e$: $x = y = A^-$.

Le groupe $\mathfrak{R}_e$ s'appelle le *groupe des paramètres canoniques de* $\mathfrak{P}$, et il est bien clair qu'il dépend du choix de la base de $\mathcal{A}_e$.

On a, évidemment, pour $A, B, C \in \mathfrak{R}_e$, $A < B$: $C \circ A < C \circ B$, $A \circ C < B \circ C$, ce qui montre, que l'ordre classique sur $\mathfrak{R}_e$ est linéaire.

Proposition 2. *La paramétrisation $\mathcal{A}_e$ de $\mathfrak{P}$ est un o-isomorphisme de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{R}_e$.*

Démonstration. On sait que l'application $\mathcal{A}_e$ est bijective. De plus, on a, pour $s, z \in \mathfrak{P}$: $\mathcal{A}_e sz = s(z(e)) = \mathcal{S}(z(e), s(e)) = s(e) \circ z(e)$ et donc l'application $\mathcal{A}_e$ résulte homomorphe. Si $s \dashv z$, on a $s(e) < z(e)$ c'est-à-dire $\mathcal{A}_e s < \mathcal{A}_e z$, et cela achève la démonstration.

Les propositions 1 et 2 entraînent la

Proposition 3. *Le groupe $\mathfrak{R}_e$ est o-isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{R}$.*

Conclusion. *Le groupe $\mathfrak{R}_e$ est abélien, et donc la fonction $\mathcal{S}$ résulte symétrique*:

$$\mathcal{S}(t, A) = \mathcal{S}(A, t) \ \forall t \in j,\ A \in R. \tag{2}$$

D'après (1), (2) nous avons

$$\mathcal{S}(t, \cdot) \in \mathfrak{P} \ \forall t \in j. \tag{3}$$

Il en résulte

$$\mathcal{S}(t, \cdot) \in C^{(0)} \ \forall t \in j, \tag{4}$$

indépendamment du choix de la paramétrisation canonique de $\mathfrak{P}$.

En vertu de cette propriété, le groupe $\mathfrak{P}$ est dit *continu d'ordre* 0, ou bien, plus brièvement, *continu*.

Remarquons que la continuité d'ordre k (≥ 1) du groupe $\mathfrak{P}$ sera définie dans N° 7.

4. Conjugateurs. D'après la proposition 3, il existe une fonction G_e: $R \to R$, solution constamment croissante de l'équation fonctionnelle

$$G\mathcal{S}(t, A) = G(t) + G(A) \ \forall t \in j,\ A \in R. \tag{5}$$

Puisque la fonction $\mathcal{S}$ jouit des propriétés 2.1°–4°, la fonction G_e résulte continue et non-bornée des deux côtés [1].

Or, on sait (l.c.) que, toutes les solutions de (5) dans j continues et allant de $-\infty$ à ∞, ne diffèrent d'entre elles que par des constantes multiplicatives positives d'ailleurs arbitraires. Toute solution de (5), G, jouissant de dites propriétés a donc précisément la forme

$$G = c \cdot G_e, \quad \text{const} = c > 0. \tag{6}$$

Nous appelerons *conjugateur du groupe $\mathfrak{P}$ paramétrisé par rapport à la base e*, ou encore, plus brièvement, *conjugateur par rapport à e*, toute fonction G en question. *Les conjugateurs par rapport à e sont donc précisément les o-isomorphismes du groupe $\mathfrak{R}_e$ sur $\mathfrak{R}$.*

On voit que, tout conjugateur par rapport à e, G, s'annule en e:

$$G(e) = 0 \tag{7}$$

et figure en générateur du groupe $\mathfrak{P}$ paramétrisé par rapport à e, suivant la formule

$$\mathscr{S}(t, A) = G^{-1}\big(G(t)+G(A)\big) \quad \forall t \in j, \ A \in R. \tag{8}$$

PROPOSITION 4. *Il existe, pour le groupe $\mathfrak{P}$ paramétrisé par rapport à e, précisément un système linéaire des conjugateurs par rapport à e,* (6). *Tout conjugateur en question, G, vérifie les formules* (7), (8).

Il se pose la question au sujet des relations existant entre les conjugateurs du groupe $\mathfrak{P}, G_e, G_{e_1}$, pris par rapport aux bases données, e, e_1 $(\in j)$. .

PROPOSITION 5. *Deux conjugateurs quelconques de $\mathfrak{P}, G_e, G_{e_1}$, vérifient la relation*

$$G_{e_1}(t) = c\cdot\big(G_e(t) - G_e(e_1)\big) \quad (t \in j;\ \text{const} = c > 0) \tag{9}$$

et donc se transforment d'entre eux par une transformation linéaire.

Démonstration. On a, pour tout élément $s \in \mathfrak{P}$, $\mathscr{A}_e s = A$, $\mathscr{A}_{e_1} s = B$:

$$(\mathscr{S}(e_1, A) =) \quad B = G_e^{-1}\big(G_e(e_1)+G_e(A)\big),$$

$$(s(t) =) \quad G_e^{-1}\big(G_e(t)+G_e(A)\big) = G_{e_1}^{-1}\big(G_{e_1}(t)+G_{e_1}(B)\big) \quad (t \in j).$$

Ces formules entraînent, si l'on écrit A au lieu de $G_e(A)$:

$$G_{e_1}G_e^{-1}(t+A) = G_{e_1}G_e^{-1}(t) + G_{e_1}G_e^{-1}\big(G_e(e_1)+A\big). \tag{10}$$

En posant

$$h(t) = G_{e_1}G_e^{-1}(t) - G_{e_1}(e)$$

on a, évidemment,

$$h(0) = 0$$

et la formule (10) prend la forme classique

$$h(t+A) = h(t) + h(A).$$

Il en résulte

$$(h(t) =) \quad G_{e_1}G_e^{-1}(t) - G_{e_1}(e) = c\cdot t \quad (\text{const} = c > 0)$$

et donc

$$G_{e_1}(t) = c\cdot G_e(t) + G_{e_1}(e).$$

Cette formule entraîne, en vertu de $G_{e_1}(e_1) = 0$, la relation (9).

Conclusion. *Tous les conjugateurs du groupe $\mathfrak{P}$ paramétrisé par rapport à d'arbitraires bases appartiennent à la même classe $C^{(k)}$ ($k \geqslant 0$ entier).*

Exemple. Soit $\mathfrak{F}_0^+$ le groupe formé de toutes les droites du plan $j \times j$ parallèles à la droite représentée par la fonction *id*.

Si l'on choisit pour la base de la paramétrisation canonique le nombre 0, la fonction déterminante de $\mathfrak{F}_0^+$ s'exprime par la formule

$$\mathscr{S}(t, A) = t + A \qquad (t \in j,\ A \in R) \tag{11}$$

et l'on a, manifestement, $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}$. Tout conjugateur de $\mathfrak{F}_0^+$ par rapport à 0 est donc $G = c \cdot t$ (const $= c > 0$).

5. Nous venons de voir que, tout conjugateur de $\mathfrak{P}$ par rapport à une base quelconque, G_e, va continûment en croissant de $-\infty$ à ∞ et s'annule précisément dans e. Nous allons montrer que, inversement subsiste la

Proposition 6. *Toute fonction $G\colon R \to R$, qui va continûment en croissant de $-\infty$ à ∞ est un conjugateur précisément d'un groupe planaire $\mathfrak{P}$ paramétrisé par rapport au zéro de G, e.*

Démonstration. Soit G une fonction jouissant des propriétés en question.

Considérons le système $\mathfrak{P}$ formé des fonctions

$$\mathscr{S}_A(t) = G^{-1}\big(G(t) + G(A)\big) \qquad (\forall t \in j;\ A \in R \text{ fixe}) \tag{12}$$

et muni de la loi de composition interne (multiplication) donnée par la composition des fonctions.

Le système $\mathfrak{P}$ résulte, évidemment, bien déterminé.

On constate facilement que le système $\mathfrak{P}$ est clos par rapport à la multiplication considérée et, naturellement, associatif. On constate encore qu'il contient la fonction *id* ($A = 0$) et, pour tout élément $\mathscr{S}_A \in \mathfrak{P}$, la fonction inverse de $\mathscr{S}_A$, $\mathscr{S}_{A^-}$, A^- étant donné par la formule $A^- = G^{-1}\big(-G(A)\big)$. Il en résulte que $\mathfrak{P}$ est un groupe.

Pour tout point $(t, y) \in j \times j$ il existe précisément un nombre $A \in R$ vérifiant l'équation $G(A) = G(y) - G(t)$. On voit, que le groupe $\mathfrak{P}$ résulte planaire.

La formule (12) entraîne $\mathscr{S}_A(e) = A$ et donc, la paramétrisation du groupe $\mathfrak{P}$: $\mathscr{S}_A \to A$, résulte canonique par rapport à e.

Finalement, d'après (12), G est un conjugateur de $\mathfrak{P}$ par rapport à e.

6. Désignons par $D^{(k)}$ ($k = 1, \ldots$) l'ensemble de toutes les fonctions réelles dans $j = (-\infty, \infty)$ admettant partout les dérivées d'ordre k. On a, évidemment: $C^{(k-1)} \supset D^{(k)} \supset C^{(k)}$.

Nous supposons généralement

$$\mathfrak{P} \subset D^{(1)}.$$

Cette supposition entraîne

(13) $$s'(t) > 0 \ \forall s \in \mathfrak{P}, \quad t \in j.$$

En effet, pour $s \in \mathfrak{P}$ on a $s^{-1} \in \mathfrak{P}$ et donc $s^{-1} \in D^{(1)}$. Il en résulte: $s'(t) \neq 0 \ \forall t \in j$ et, puisque s va constamment en croissant, $s'(t) > 0$.

Soit G un conjugateur de $\mathfrak{P}$. On démontre facilement les propositions suivantes:

(14) *Si* $G \in D^{(1)}$, *on a* $G'(t) > 0 \ \forall t \in j$.

(15) *Si* $G \in C^{(k)}$ $(k = 1, \ldots)$, *on a* $G^{-1} \in C^{(k)}$.

(16) *Si* $G \in C^{(k)}$ $(k = 1, \ldots)$, *on a* $\mathscr{S}_A \in C^{(k)} \ \forall A \in R$, *et de même* $\sigma_t \in C^{(k)} \ \forall t \in j$. *Il en résulte* $\mathfrak{P} \subset C^{(k)}$.

La formule (2) entraîne, pour $i, k \geqslant 0$ entiers et $u, v \in j$:

(17) $$\frac{\partial^{i+k}}{\partial A^i \, \partial t^k} \mathscr{S}(u, v) = \frac{\partial^{i+k}}{\partial t^i \, \partial A^k} \mathscr{S}(v, u)$$

dès qu'il existe l'un des deux membres.

Il en résulte pour $i = 0$, $k = 1$:

(18) $$\mathscr{S}'(u, v) = \dot{\mathscr{S}}(v, u) \qquad (' = \partial/\partial t, \ \cdot = \partial/\partial A),$$

la valeur en question étant, d'après (13), > 0.

Proposition 7. *Toute fonction* $s \in \mathfrak{P}$ *satisfait à l'équation différentielle*

(19) $$y' = \mathscr{S}'(e, y)/\mathscr{S}'(e, t) \qquad (t \in j).$$

Démonstration. Définissons la fonction $f\colon j \times j \to j$, comme il suit: Pour $t, y \in j$ la valeur $f(t, y)$ égale au nombre $s'(t)$, $s \in \mathfrak{P}$ étant la fonction passant par (t, y): $s(t) = y$.

La fonction f se trouve bien déterminée et l'on a, pour $A \in R$ fixe:

(20) $$\mathscr{S}'_A(t) = f\big(t, \mathscr{S}_A(t)\big) \ (> 0) \qquad (t \in j).$$

Or, $\mathfrak{P}$ étant un groupe, il existe pour $\mathscr{S}_B, \mathscr{S}_C \in \mathfrak{P}$ $(B, C \in R)$ une fonction $\mathscr{S}_A \in \mathfrak{P}$ $(A \in R)$ vérifiant la formule

$$\mathscr{S}_A\big(\mathscr{S}_B(t)\big) = \mathscr{S}_C(t)$$

et encore la formule dérivée suivante:

$$\mathscr{S}'_A\big(\mathscr{S}_B(t)\big) \cdot \mathscr{S}'_B(t) = \mathscr{S}'_C(t).$$

En même temps subsistent, évidemment, les formules

$$\mathscr{S}'_A(t) = f\big(t, \mathscr{S}_A(t)\big), \quad \mathscr{S}'_B(t) = f\big(t, \mathscr{S}_B(t)\big), \quad \mathscr{S}'_C(t) = f\big(t, \mathscr{S}_C(t)\big)$$

entraînant

$$f(\mathscr{S}_B(t), \mathscr{S}_C(t))\cdot f(t, \mathscr{S}_B(t)) = f(t, \mathscr{S}_C(t)).$$

Cette relation donne pour $t = e$:

$$f(B, C)\cdot f(e, B) = f(e, C)$$

ou bien, après un léger changement de notation,

$$f(t, y) = f(e, y)/f(e, t). \tag{21}$$

D'autre part, la formule (20) entraîne $f(e, A) = \mathscr{S}'(e, A)$ $\forall A \in R$, et cela achève la démonstration.

Proposition 8. *Si* $\mathscr{S}'(e, \cdot) \in C^{(k-1)}$ $(k \geqslant 1)$, *la fonction*

$$G(t) = \int_e^t \frac{d\tau}{\mathscr{S}'(e, \tau)} \quad (t \in j) \tag{22}$$

est un conjugateur du groupe $\mathfrak{P}$ *par rapport à* e, *et l'on a*

$$G \in C^{(k)}. \tag{23}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{S}'(e, \cdot) \in C^{(k-1)}$ $(k \geqslant 1)$. On a, évidemment $1/\mathscr{S}'(e, \cdot) \in C^{(k-1)}$ et donc, la fonction G définie par (22) se trouve bien déterminée et l'on a (23).

Or, toute fonction $s \in \mathfrak{P}$ vérifie l'équation différentielle (19). Il en résulte la relation

$$\frac{s'(t)}{\mathscr{S}'(e, s(t))} = \frac{1}{\mathscr{S}'(e, t)} \quad (t \in j)$$

et l'on voit que G est une solution constamment croissante de l'équation fonctionnelle

$$Gs(t) = G(t) + Gs(e).$$

Corollaire. *Si* $\dot{\mathscr{S}}(\cdot, e) \in C^{(k-1)}$ $(k \geqslant 1)$, *la fonction*

$$G(t) = \int_e^t \frac{d\tau}{\dot{\mathscr{S}}(\tau, e)} \quad (t \in j) \tag{24}$$

est un conjugateur du groupe $\mathfrak{P}$ *par rapport à* e, *et l'on a*

$$G \in C^{(k)}. \tag{25}$$

7. Continuité d'ordre k ($\geqslant 1$) du groupe $\mathfrak{P}$. Soit k ($\geqslant 1$) un nombre entier.

Le groupe $\mathfrak{P}$ sera dit *continu d'ordre* k, si l'on a

$$\mathscr{S}'(t, \cdot) \in C^{(k-1)} \ \forall t \in j, \tag{26}$$

indépendamment du choix de la paramétrisation canonique de $\mathfrak{P}$.

La propriété (26) peut être remplacée, évidemment, par

$$\dot{\mathscr{S}}(\cdot, A) \in C^{(k-1)} \ \forall A \in R. \tag{27}$$

PROPOSITION 9. *Si le groupe $\mathfrak{P}$ est continu d'ordre k, chaque conjugateur G du groupe $\mathfrak{P}$, par rapport à toute base de la paramétrisation canonique, appartient à la classe $C^{(k)}$: $G \in C^{(k)}$.*

Si un conjugateur G_e du groupe $\mathfrak{P}$, par rapport à une base $e \in j$, appartient à la classe $C^{(k)}$, $G_e \in C^{(k)}$, le groupe $\mathfrak{P}$ est continu d'ordre k.

Démonstration. (a) Supposons que le groupe $\mathfrak{P}$ soit continu d'ordre k $(\geqslant 1)$. Considérons la paramétrisation de $\mathfrak{P}$ par rapport à une base arbitraire $e \in j$. Subsiste alors une formulle telle que (26) et l'on a, en particulier, $\mathscr{S}'(e, \cdot) \in C^{(k-1)}$. D'après la proposition 8, la fonction G définie par une formule telle que (22) est un conjugateur du groupe $\mathfrak{P}$ par rapport à e, et l'on a $G \in C^{(k)}$. Or, chaque conjugateur de $\mathfrak{P}$ par rapport à e étant $c \cdot G \in C^{(k)}$ $(0 < c = \text{const})$, la première partie de la proposition 9 se trouve démontrée.

(b) Supposons qu'un conjugateur G_{e_1} du groupe $\mathfrak{P}$ par rapport à une base $e_1 \in j$ appartienne à $C^{(k)}$: $G_{e_1} \in C^{(k)}$. Alors, d'après (9), tout conjugateur de $\mathfrak{P}$, G, par rapport à n'importe quelle base $e \in j$ jouit de la même propriété: $G \in C^{(k)}$. Il en résulte, d'après (16), $\mathscr{S}(t, \cdot) \in C^{(k)}$ $\forall t \in j$ et donc $G'\mathscr{S}(t, \cdot) \in C^{(k-1)}$.

Or, la formule (8) entraîne pour $t \in j$, $A \in R$

$$\mathscr{S}'(t, A) = G'(t)/G'\mathscr{S}(t, A).$$

Le dénominateur dans le second membre résulte > 0 et l'on a, comme nous venons de le voir, $G'\mathscr{S}(t, \cdot) \in C^{(k-1)}$. Il en résulte $1/G'\mathscr{S}(t, \cdot) \in C^{(k-1)}$ et donc $\mathscr{S}'(t, \cdot) \in C^{(k-1)}$. Ainsi la deuxième partie de la proposition 9 se trouve démontrée.

Remarquons que, si le groupe $\mathfrak{P}$ est continu d'ordre k $(\geqslant 1)$, il résulte continu d'ordre 0 (cp. N° 3).

8. Détermination des groupes planaires continus d'ordre k $(\geqslant 0)$. Les considérations précédentes permettent de déterminer tous les groupes planaires continus d'ordres arbitraires $k \geqslant 0$.

Soit, pour $e \in j$ quelconque, $\mathscr{G}_e^{(k)}$ l'ensemble de toutes les fonctions $g\colon j \to j$, jouissant des propriétés suivantes:

1° $g \in C^{(k)}$ $(k \geqslant 0)$;

2° g va constamment en croissant de $-\infty$ à ∞, et dans le cas $k \geqslant 1$ on a $g' > 0$;

3° $g(e) = 0$.

De plus, soit $\overline{\mathscr{G}}_e^{(k)}$ la décomposition de $\mathscr{G}_e^{(k)}$ dont chaque élément consiste en tous les multiples constants et positifs d'un élément de $\mathscr{G}_e^{(k)}$.

THÉORÈME. *À tout groupe planaire continu d'ordre* k $(\geqslant 0)$, $\mathfrak{P}$, *paramétrisé par rapport à e, correspond un élément* $\bar{g} \in \overline{\mathscr{G}}_e^{(k)}$ *consistant précisément en conjugateurs de* $\mathfrak{P}$ *par rapport à e. Toute fonction* $G \in \bar{g}$ *génère le groupe* $\mathfrak{P}$ *suivant la formule* (8).

À tout élément $G \in \mathscr{G}_e^{(k)}$ $(k \geqslant 0)$ *correspond un groupe planaire continu d'ordre* k, $\mathfrak{P}$, *paramétrisé par rapoort à e, généré par G suivant la formule* (8). *Les conjugateurs du groupe* $\mathfrak{P}$ *par rapport à e sont précisément les éléments de l'ensemble* $\bar{g} \in \overline{\mathscr{G}}_e^{(k)}$ *comprenant G.*

Démonstration. (a) Considérons un groupe planaire continu d'ordre k $(\geqslant 0)$, $\mathfrak{P}$, paramétrisé par rapport à une base $e \in j$. Soit G_e un conjugateur de $\mathfrak{P}$ par rapport à e. D'après Nos 4,7 on a $G_e \in \mathscr{G}_e^{(k)}$. Or, tout conjugateur de $\mathfrak{P}$ par rapport à e, G, étant $G = c \cdot G_e$ (const $= c > 0$), l'élément $\bar{g} \in \overline{\mathscr{G}}_e^{(k)}$ contenant G_e consiste précisément en conjugateurs de $\mathfrak{P}$ par rapport à e. D'après la proposition 4, toute fonction $G \in \bar{g}$ génère le groupe $\mathfrak{P}$ suivant la formule (8).

(b) Soit $G \in \mathscr{G}_e^{(k)}$ $(k \geqslant 0)$. D'après la proposition 6, la fonction G est un conjugateur précisément d'un groupe planaire, $\mathfrak{P}$, paramétrisé par rapport à e. Le groupe $\mathfrak{P}$ est donc généré par G suivant la formule (8). Si $k = 0$, le groupe $\mathfrak{P}$ résulte, manifestement, continu k d'ordre 0. Si $k \geqslant 1$, le groupe $\mathfrak{P}$ est continu d'ordre k, d'après la proposition 9. Évidemment, les conjugateurs de $\mathfrak{P}$ par rapport à e sont exactement les éléments de l'ensemble $\bar{g} \in \overline{\mathscr{G}}_e^{(k)}$ comprenant G.

COROLLAIRE. *Tout groupe planaire continu d'ordre* k $(\geqslant 0)$, $\mathfrak{P}$, *résulte conjugué au groupe* $\mathfrak{F}_0^+$ *par une fonction* $G \in C^{(k)}$ *allant constamment en croissant de* $-\infty$ *à* ∞:

$$\mathfrak{P} = G^{-1}\mathfrak{F}_0^+ G. \tag{28}$$

On voit que la fonction G réalise la liaison entre le groupe $\mathfrak{F}_0^+$ et le groupe $\mathfrak{P}$ conjugué au groupe $\mathfrak{F}_0^+$, ce qui justifie la dénomination *conjugateur*.

9. Différentielles des fonctions déterminantes. Considérons un groupe planaire $\mathfrak{P} \subset C^{(0)}$ paramétrisé par rapport à la base e $(\in j)$. Nous nous intéressons de l'existence des différentielles d'ordre $\geqslant 1$ de la fonction correspondante $\mathscr{S}$, en relation avec l'ordre de continuité du groupe $\mathfrak{P}$.

PROPOSITION 10. *Si le groupe* $\mathfrak{P}$ *est continu d'ordre* k $(\geqslant 1)$, *la fonction* $\mathscr{S}$ *admet, dans* $j \times j$, *la différentielle d'ordre* k.

Si la fonction $\mathscr{S}$ *admet dans* $j \times j$ *la différentielle d'ordre* k $(\geqslant 1)$, *le groupe* $\mathfrak{P}$ *résulte continu d'ordre* $k-1$.

Démonstration. (a) Supposons que $\mathfrak{P}$ soit continu d'ordre k. Soit G un conjugateur de $\mathfrak{P}$ par rapport à la base e. On a, d'après la proposition 9, $G \in C^{(k)}$, et donc, d'après (15), $G^{-1} \in C^{(k)}$. Or, $\mathscr{S}(t, A)$ peut s'écrire, évidemment, en forme de la fonction composée

$$\mathscr{S}(t, A) = G^{-1}(u), \quad u(t, A) = G(t) + G(A).$$

On en voit que la fonction $\mathscr{S}$ admet toutes les dérivées partielles d'ordre k, continues dans $j \times j$. Il en résulte l'existence de la différentielle $d^k\mathscr{S}$.

(b) Supposons l'existence de la différentielle $d^k\mathscr{S}$ dans $j \times j$. Si $k = 1$, on n'a rien à démontrer.

Soit alors $k \geqslant 2$. Dans ce cas toutes les dérivées partielles d'ordre $k-1$ de la fonction $\mathscr{S}$ résultent continues dans $j \times j$. Ainsi, en particulier, la fonction $\partial^{k-1}\mathscr{S}(t, A)/\partial A^{k-2}\partial t$ résulte continue dans $j \times j$. On en tire, e étant choisi arbitrairement, $\mathscr{S}'(e, \cdot) \in C^{(k-2)}$. Or, d'après la proposition 8, la fonction G définie par une formule telle que (22) est un conjugateur de $\mathfrak{P}$ par rapport à e, et l'on a $G \in C^{k-1}$, ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

[1] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, 1966.

[2] A. Bigard, K. Keimel, S. Wolfenstein, *Groupes et anneaux réticulés*, Lecture Notes in Mathematics, 608, Springer-Verlag, 1977.

[3] O. Borůvka, *Algebraic methods in the theory of global properties of the oscillatory equations $Y'' = Q(T)Y$*, Lecture Notes in Mathematics, 703, Springer-Verlag, 1979, p. 35–45.

[4] O. Hölder, *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Masse*, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Cl. 53 (1901), p. 1–64.

[5] H. Cartan, *Un théorème sur les groupes ordonnés*, Bull. Sci. Math. 63 (1939), p. 201–205.

Reçu par la Rédaction le 18.02.1981