ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1963)

# Dérivation d'une intégrale de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique

par A. PISKOREK (Warszawa)

**1. Introduction.** Dans le travail [1] W. Pogorzelski a construit la solution fondamentale pour l'équation parabolique:

$$(1)\quad \Psi[u(X,t)] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

où les coefficients $a_{ij}(X,t)$, $b_i(X,t)$, $c(X,t)$ sont continus dans le domaine cylindrique (produit cartésien) $\Omega\times[0,T]$ et vérifient la condition de Hölder:

$$(2)\quad \begin{aligned} &|a_{ij}(X,t)-a_{ij}(Y,\tau)| \leqslant \mathrm{const}(|XY|^h+|t-\tau|^{h'}),\\ &|b_i(X,t)-b_i(Y,t)| \leqslant \mathrm{const}\,|XY|^h \quad (i,j=1,\ldots,n),\\ &|c(X,t)-c(Y,t)| \leqslant \mathrm{const}\,|XY|^h \quad (0<h\leqslant 1;\ 0<h'\leqslant 1). \end{aligned}$$

Cette solution fondamentale est donnée par les formules suivantes:

$$(3)\quad \Gamma(X,t;\,Y,\tau) = w^{(Y,\tau)}(X,t;\,Y,\tau)+\overline{w}(X,t;\,Y,\tau),$$

$$(4)\quad \overline{w}(X,t;\,Y,\tau) = \int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega} w^{(M,\theta)}(X,t;\,M,\theta)\Phi(M,\theta;\,Y,\tau)\,dM\,d\theta,$$

où la fonction

$$(5)\quad w^{(M,\theta)}(X,t;\,Y,\tau) = (t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(M,\theta)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{4(t-\tau)}\right]$$

est la quasi-solution bien connue, $X=(x_1,\ldots,x_n)$ et $Y=(y_1,\ldots,y_n)$ sont deux points arbitraires du domaine $\Omega$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $a^{ij}(X,t)$ désignent les éléments de la matrice inverse de la matrice $(a_{ij}(X,t))$ et la fonction $\Phi(X,t;\,Y,\tau)$ est une solution de l'équation intégrale:

$$(6)\quad \Phi(X,t;Y,\tau) = f(X,t;\,Y,\tau)+\int_{\tau}^{t}\iiint_{\Omega} N(X,t;M,\theta)\Phi(M,\theta;\,Y,\tau)\,dM\,d\theta,$$

où l'on a:

$$N(X,t;\,M,\theta) = \left(\det\left(a^{ij}(X,t)\right)\right)^{1/2}\Phi[w^{(M,\theta)}(X,t;\,M,\theta)],$$

$$f(X,t;\,Y,\tau) = \left(2\sqrt{\pi}\right)^{-n}N(X,t;\,Y,\tau).$$

Le premier terme de la somme (3) est indéfiniment dérivable pour tout point $(X,t)\neq(Y,\tau)$ du domaine $\Omega\times[0,T]$ et ses dérivées d'ordre arbitraire vérifient les inégalités, que nous écrivons pour abréger sous la forme suivante:

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n+k_0}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial t^{k_0}}w^{(M,\theta)}(X,t;\,Y,\tau)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}|XY|^{n+k_1+\ldots+k_n+2k_0-2\mu}}; \tag{7}$$

$\mu$ étant une constante positive arbitrairement fixée.

La solution $\Phi(X,t;\,Y,\tau)$ est définie pour tout point $X\neq Y$ du domaine $\Omega$ et $0\leqslant\tau<t\leqslant T$ (v. [1], p. 41-44) et vérifie une inégalité de la forme suivante:

$$|\Phi(X,t;\,Y,\tau)| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}|XY|^{n+2-2\mu-h^*}}, \tag{8}$$

où $h^* = \min(h, 2h')$ et $\mu$ est un nombre positif arbitrairement fixé à l'intérieur de l'intervalle $(1-h^*/2, 1)$.

D'après [1] la fonction $\Gamma(X,t;\,Y,\tau)$ donnée par les formules (3), (4), (5), (6) est la solution de l'équation (1) pour tout point $X\neq Y$ du domaine $\Omega$ et $0\leqslant\tau<t\leqslant T$.

À l'aide de cette fonction $\Gamma(X,t;\,Y,\tau)$ on peut définir (v. [1], [2]) les intégrales de l'équation (1), qu'on appelle potentiels généralisés relativement à cette équation.

Dans cet article nous étudierons la dérivation de l'intégrale de surface, dite potentiel généralisé de simple couche relatif à l'équation parabolique (1) dans un domaine non cylindrique $D_T$ (v. [2]). Par conséquent cet article est une continuation de mon article précédent [2].

L'auteur tient à remercier M. W. Pogorzelski dont les remarques ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail.

**2. Lemmes auxiliaires.** W. Pogorzelski a prouvé dans son travail [1] que la fonction $\Phi(X,t;\,Y,\tau)$ vérifie la condition de Hölder par rapport au point $X$ dans tout domaine fermé $\Omega^*$ ($\Omega^*\subset\Omega$), ne contenant pas le point $Y$.

En suivant aussi l'auteur cité nous démontrerons le lemme suivant:

LEMME 1. *La fonction $\Phi(X,t;\,Y,\tau)$ déterminée par les formules* (6), (4), (5) *vérifie par rapport au point $X$ une condition de Hölder de la forme*:

$$|\Phi(X,t;\,Y,\tau)-\Phi(\bar{X},t;\,Y,\tau)| \tag{9}$$

$$\leqslant \frac{\text{const}\,|X\bar{X}|^{h^*+\mu-1}}{(t-\tau)^{\mu}|XY|^{n+2-2\mu}}\left(|XX|^{1-\mu}+\frac{|X\bar{X}|^{2-h^*-\mu}}{|XY|^{1-h^*}}+\frac{1}{|XY|^{\mu-1-h^*}}\right),\quad 1-\frac{h^*}{2}<\mu<1$$

*dans tout domaine $\Omega^* = \Omega \cap K(X, |XY|/2)$ où $K(X, |XY|/2)$ désigne la sphère de centre $X$ et de rayon $|XY|/2$; $\mu$ est un nombre positif arbitrairement fixé à l'intérieur de l'intervalle $(1-h^*/2, 1)$.*

Démonstration (¹). Pour démontrer l'inégalité (9), nous appliquons mutatis mutandis le raisonnement de W. Pogorzelski (v. [1], p. 44-50).

Soit $X \in \Omega^*$ et $|X\bar{X}|<|XY|/8$; alors la limitation (7) nous donne (v. [1],p. 44-45, formule (69) et relations (72)-(74)) l'inégalité:

$$(10)\quad \begin{aligned} &|F_{ij}(X, t;\ Y, \tau)-F_{ij}(\bar{X}, t;\ Y, \tau)| \\ &\quad = \Big|\big(a_{ij}(X, t)-a_{ij}(\bar{X}, t)\big)\frac{\partial^2 w^{(Y,\tau)}(X, t;\ Y, \tau)}{\partial x_i \partial x_j}+ \\ &\qquad\qquad + \big(a_{ij}(\bar{X}, t)-a_{ij}(Y, \tau)\big)\cdot \overrightarrow{X\bar{X}}\cdot \operatorname{grad}\frac{\partial^2 w^{(Y,\tau)}(X^*, t;\ Y, \tau)}{\partial x_i \partial x_j}\Big| \\ &\quad \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\left(\frac{|X\bar{X}|^{h}}{|XY|^{n+2-2\mu}}+\frac{|X\bar{X}|}{|XY|^{n+3-2\mu-h^*}}\right),\qquad i, j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

où $X^*$ est un point à l'intérieur du segment $X\bar{X}$ et $\mu$ est un nombre arbitraire.

D'après cette inégalité et les formules (6) nous avons:

$$(11)\quad |f(X, t;\ Y, \tau)-f(\bar{X}, t;\ Y, \tau)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\left(\frac{|X\bar{X}|^{h}}{|XY|^{n+2-2\mu}}+\frac{|X\bar{X}|}{|XY|^{n+3-2\mu-h^*}}\right),$$

où $\mu$ est un nombre arbitraire.

En suivant encore W. Pogorzelski (v. [1], p. 46, formule (76)) nous considérons l'intégrale $L_{ij}(X, t)$ et une sphère $K(X, 2|X\bar{X}|)$ de centre $X$ et de rayon $2|X\bar{X}|$. Décomposons les intégrales $L_{ij}(X, t)$ et $L_{ij}(\bar{X}, t)$ en sommes d'intégrales:

$$(12)\quad \begin{aligned} L_{ij}(X, t) &= L_{ij}^{K'}(X, t)+L_{ij}^{\Omega^*-K'}(X, t)+L_{ij}^{\Omega-\Omega^*}(X, t), \\ L_{ij}(\bar{X}, t) &= L_{ij}^{K'}(\bar{X}, t)+L_{ij}^{\Omega^*-K'}(\bar{X}, t)+L_{ij}^{\Omega-\Omega^*}(\bar{X}, t) \end{aligned}$$

étendues à la portion $K' = \Omega \cap K(X, 2|X\bar{X}|)$, à la portion $\Omega^*-K'$ et à la portion restante $\Omega-\Omega^*$.

D'après les inégalités (7) et (8), en posant $1-h^*/2 < \mu < 1$, nous avons la limitation suivante:

$$(13)\quad \begin{aligned} |L_{ij}^{K'}(X, t)| &\leqslant \mathrm{const}\int_0^t\int_0^{2|X\bar{X}|}\frac{\sup_{M\in K'}|\Phi(M, \theta;\ Y, \tau)|\,dM\,d\theta}{(t-\tau)^{\mu}|XM|^{n+2-2\mu-h^*}} \\ &\leqslant \frac{\mathrm{const}\,|X\bar{X}|^{h^*+\mu-1}}{(t-\tau)^{\mu}|XY|^{n+1-\mu-h^*}} \end{aligned}$$

(¹) Dans cette démonstration les notations sont conformes à celles de la démonstration du théorème 6 du travail [1], p. 44-50.

et une limitation analogue pour le point $\bar{X}$:

$$(14)\qquad |L_{ij}^{K'}(\bar{X},t)| \leqslant \frac{\text{const}\,|X\bar{X}|^{h^*+\mu-1}}{(t-\tau)^{\mu}\,|XY|^{n+1-\mu-h^*}}\,.$$

En tenant compte de l'inégalité (10) nous aurons pour la différence des secondes intégrales des sommes (12) la limitation suivante:

$$(15)\qquad |L_{ij}^{\Omega^*-K'}(X,t)-L_{ij}^{\Omega^*-K'}(\bar{X},t)|$$

$$\leqslant \text{const}\,|X\bar{X}|^{h}\int_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega^*-K'}\frac{\sup\limits_{M\in\Omega^*}|\Phi(M,\theta;\,Y,\tau)|}{(t-\theta)^{\mu}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{|XM^{n+2-2\mu}|}+\frac{|X\bar{X}|^{1-h}}{|XM|^{n+3-2\mu-h^*}}\right)dM\,d\theta$$

$$\leqslant\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\left(\frac{|X\bar{X}|^{h+\mu-1}}{|XY|^{n+1-\mu-h^*}}+\frac{|X\bar{X}|^{h}}{|XY|^{n+2-2\mu-h^*}}+\frac{|X\bar{X}|}{|XY|^{n+3-2\mu-h^*}}\right),$$

où $1-h^*/2<\mu<1$.

La différence des troisièmes intégrales des sommes (12) vérifie l'inégalité:

$$(16)\qquad |L_{ij}^{\Omega-\Omega^*}(X,t)-L_{ij}^{\Omega-\Omega^*}(\bar{X},t)$$

$$\leqslant\int_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega-\Omega^*}\frac{\text{const}}{(t-\theta)^{\mu}(\theta-\tau)^{\mu}}\left(\frac{|X\bar{X}|^{h}}{|XM|^{n+2-2\mu}|MY|^{n+2-2\mu-h^*}}+\right.$$

$$\left.+\frac{|X\bar{X}|}{|XM|^{n+3-2\mu-h^*}|MY|^{n+2-2\mu-h^*}}\right)dM\,d\theta$$

$$\leqslant\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}}\left(\frac{|X\bar{X}|^{h}}{|XY|^{n+2-2\mu-h^*}}-\frac{|X\bar{X}|}{|XY|^{n+3-2\mu-h^*}}\right),$$

où $1-h^*/2<\mu<1$.

En réunissant les résultats (11), (13), (14), (15), (16) nous arrivons à la conclusion (9), c. q. f. d.

Nous démontrerons ensuite le lemme suivant:

LEMME 2. *La fonction $\overline{w}(X,t;\,Y,\tau)$, dite quasi-potentiel de charge spatiale (v. [1], p. 30, formule (19)) de densité $\Phi(M,\theta;\,Y,\tau)$ (où $Y=(y_1,\dots,y_n)$ et $\tau$ joue le rôle de paramèters) et ses dérivées admettent les limitations:*

$$(17)\qquad \left|\frac{\partial^{k_0+k_1+\dots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}\overline{w}(X,t;\,Y,\tau)\right|\leqslant\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}\,|XY|^{n+2k_0+k_1+\dots+k_n-2\mu-h^*}}$$

*pour $2k_0+k_1+\dots+k_n\leqslant 2$, et $1-h^*/2<\mu<1$.*

Démonstration. Nous démontrerons la limitation (17) seulement dans le cas où $2k_0+k_1+\ldots+k_n = 2$ et $k_0 = 0$ (c'est-à-dire $k_1+\ldots+k_n = 2$), la démonstration dans le cas restant étant analogue et plus facile.

En s'appuyant sur l'étude du quasi-potentiel faite par W. Pogorzelski (v. [1], p. 30-41), nous pouvons exprimer les dérivées premières par rapport aux coordonnées du point $X = (x_1, \ldots, x_n)$ du quasi-potentiel $\overline{w}(X, t;\ Y, \tau)$ pour $X \neq Y$ et $\tau < t$ par la formule:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{w}(X, t;\ Y, \tau) = \int_{\tau}^{t} I'_{x_i}(X, t;\ Y, \tau;\ \theta)\,d\theta \tag{18}$$

où nous écrivons la fonction $I'_{x_i}(X, t;\ Y, \tau;\ \theta)$ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}(19)\qquad I'_{x_i}(X, t;\ Y, \tau;\ \theta) &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{(M,\theta)}(X, t;\ M, \theta)\Phi(M, \theta;\ Y, \tau)\,dM \\ &= \Phi(Z, \theta;\ Y, \tau)\Big[\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{(Z,\theta)}(X, t;\ M, \theta)\,dM + \\ &+ \iiint_{\Omega}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} w^{(M,\theta)}(X, t;\ M, \theta) - \frac{\partial}{\partial x_i} w^{(Z,\theta)}(X, t;\ M, \theta)\Big)dM\Big] + \\ &+ \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{(M,\theta)}(X, t;\ M, \theta)\big(\Phi(M, \theta;\ Y, \tau) - \Phi(Z, \theta;\ Y, \tau)\big)\,dM\,,\end{aligned}$$

$Z$ étant un point du domaine $\Omega$ arbitrairement fixé et $Z \neq Y$.

Soit $K$ la sphère à l'intérieur du domaine $\Omega$, centrée au point fixé $X$, de rayon $|XP| = \inf_{Q\in S}(|XQ|)$, où $S$ désigne la frontière du domaine $\Omega$ (c'est-à-dire $K = K(X, |XP|)$).

En appliquant le théorème de Green à la première des intégrales (19) nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}(20)\qquad & I'_{x_i}(X, t;\ Y, \tau;\ \theta) \\ &= \Phi(Z, \theta;\ Y, \tau)\Big[-\iint_{\partial K} w^{(Z,\theta)}(X, t;\ Q, \theta)\cos(n_Q, x_i)\,dS_Q + \\ &+ \iiint_{\Omega-K} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{(Z,\theta)}(X, t;\ M, \theta)\,dM + \\ &+ \iiint_{\Omega}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} w^{(Z,\theta)}(X, t;\ M, \theta) - \frac{\partial}{\partial x_i} w^{(M,\theta)}(X, t;\ M, \theta)\Big)dM\Big] + \\ &+ \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{(M,\theta)}((X, t;\ M, \theta)\big(\Phi(M, \theta;\ Y, \tau) - \Phi(Z, \theta;\ Y, \tau)\big)\,dM\end{aligned}$$

$\partial K$ désignant la surface de la sphère $K$ et $(n_Q, x_i)$ l'angle que fait avec l'axe $x_i$ la normale $n_Q$ au point $Q$ de la surface $\partial K$.

Les intégrales dans l'égalité (20) étant régulières, si $\tau < \theta < t$, la fonction $I'_{x_i}(X, t; Y, \tau; \theta)$ admet des dérivées continues de la forme:

(21) $$I''_{x_i x_j}(X, t; Y, \tau; \theta)$$
$$= \Phi(X, \theta; Y, \tau)\Big[-\iint_{\partial K} \frac{\partial}{\partial x_j} w^{(Z,\theta)}(X, t; Q, \theta)\cos(n_Q, x_i)dS_Q +$$
$$+\iiint_{\Omega-K} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{(Z,\theta)}(X, t; M, \theta)dM +$$
$$+\iiint_{\Omega}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{(Z,\theta)}(X, t; M, \theta) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{(M,\theta)}(X, t; M, \theta)\Big)dM\Big]_{Z=X} +$$
$$+\iiint_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{(M,\theta)}(X, t; M, \theta)\big(\Phi(M, \theta; Y, \tau) - \Phi(X, \theta; Y, \tau)\big)dM$$

que l'on a obtenue, en posant, après la dérivation, $Z = X$.

D'après les limitations (7) et (8) nous aurons en tout point $X \neq Y$, pour $\tau < \theta < t$:

(22) $$|I''_{x_i x_j}(X, t; Y, \tau; \theta)| \leqslant \frac{\text{const}}{(\theta-\tau)^{\mu}|XY|^{n+2-2\mu-h^*}}\Big(\frac{\text{const}}{(t-\theta)^{\mu^*}|XP|^{n+1-2\mu^*}} +$$
$$+\frac{\text{const}}{(t-\theta)^{\mu}|XP|^{n+2-2\mu}} - \frac{\text{const}}{(t-\theta)^{\mu}}\iiint_{\Omega}\frac{dM}{|XM|^{n+2-2\mu-h^*}}\Big) +$$
$$+\frac{\text{const}}{(t-\theta)^{\mu}}\iiint_{\Omega}\frac{|\Phi(M, \theta; Y, \tau) - \Phi(X, \theta; Y, \tau)|}{|XM|^{n+2-2\mu}}dM,$$

où $\mu^*$ est une constante quelconque, et $\mu$ une constante arbitrairement choisie à l'intérieur de l'intervalle $(1-h^*/2, 1)$.

En appliquant maintenant le lemme 1, nous voyons que la dernière intégrale de la limitation (22) vérifie l'inégalité:

(23) $$\iiint_{\Omega}\frac{|\Phi(M, \theta; Y, \tau) - \Phi(X, \theta; Y, \tau)|}{|XM|^{n+2+2\mu}}dM \leqslant \frac{\text{const}}{(\theta-\tau)^{\mu}|XY|^{n+2-2\mu}} \times$$
$$\times\iiint_{\Omega^*}\Big(\frac{1}{|XM|^{n+2-2\mu-h^*}} + \frac{1}{|XY|^{1-h}|XM|^{n+1-2\mu}} + \frac{|XY|^{1+h^*-\mu}}{|XM|^{n+3-2\mu-h^*-\mu}}\Big)dM +$$
$$+\text{const}\iiint_{\Omega-\Omega^*}\frac{|\Phi(M, \theta; Y, \tau) - \Phi(X, \theta; Y, \tau)|}{|XM|^{n+2-2\mu}}dM$$
$$\leqslant \frac{\text{const}}{(\theta-\tau)^{\mu}|XY|^{n+2-2(2\mu-1)-h^*}},$$

où $1-h^*/2 < \mu < 1$.

En rapprochant les résultats (22) et (23) nous concluons que les dérivées secondes spatiales de la fonction $I(X, t;\ Y, \tau;\ \theta)$ vérifient l'inégalité à singularité faible:

$$(24)\qquad |I''_{x_i x_j}(X, t;\ Y, \tau;\ \theta)| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\theta)^{\mu^*}(\theta-\tau)^{\mu}\,|XY|^{n+2-2\mu-h^*}}\left(\frac{1}{|XP|^{n+1-2\mu^*}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|XP|^{n+2-2\mu^*}}\right)+\frac{\text{const}}{(t-\theta)^{\mu}(\theta-\tau)^{\mu}}\left(\frac{1}{|XY|^{n+2-2\mu-h^*}}+\frac{1}{|XY|^{n+2-2(2\mu-1)-h^*}}\right).$$

Donc, en fixant $\mu^* = \mu$, nous obtenons d'après la formule (18) la limitation suivante:

$$(25)\qquad |w''_{x_i x_j}(X, t;\ Y, \tau)|$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{2\mu-1}}\left[\frac{1}{|XY|^{n+2-2\mu-h^*}}\left(\frac{1}{|XP|^{n+2-2\mu}}+1\right)+\frac{1}{|XY|^{n+2-2(2\mu-1)-h^*}}\right].$$

La limitation (25) pour tout point intérieur $X \neq Y$ du domaine $\Omega$ et $\tau < t$ établit ainsi la conclusion (17).

Remarqons encore que la limitation (17) dans le cas où $k_0 = 1$, c'est-à-dire la limitation de la dérivée première par rapport à la variable $t$, peut être démontrée de même que dans le cas où $k_1 + \ldots + k_n = 2$, c. q. f. d.

**3. Dérivées du potentiel de simple couche dans un domaine non cylindrique.** Admettons que la surface latérale $s_T$ du domaine non cylindrique $D_T$ vérifie les conditions connues de Liapounoff (v. [2], p. 126) dont l'une, concernant l'angle $(N_{P_t}, N_{Q_\tau})$ entre les normales $N_{P_t}$, $N_{Q_\tau}$ aux deux points arbitraires $(P, t)$, $(Q, \tau)$ de la surface $s_T$, a la forme suivante:

$$(26)\qquad (N_{P_t}, N_{Q_\tau}) \leqslant \text{const}(|PQ|^{a}+|t-\tau|^{a}) \qquad (0 < a \leqslant 1)\,;$$

et supposons que la surface $s_T$ possède l'orientation du temps relativement à l'équation (1).

En outre admettons que le domaine non cylindrique $D_T$ soit situé dans l'intérieur du produit cartésien $\Omega \times [0, T]$.

Rappelons (v. [2], p. 125-126) que nous désignons par $S_\tau$ la variété à $(n-1)$ dimensions, formée par l'intersection de la surface latérale $s_T$ et du plan $t = \tau$, et par $\Omega_\tau$ la variété à $n$ dimensions, formée par l'intérsection du domaine $D_T$ et du plan $t = \tau$, pour $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

D'après les formules (3), (4), (5) et les lemmes 1, 2 il est facile de voir que les dérivées de la solution fondamentale $\Gamma(X, t; Q, \tau)$ de la forme:

$$\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_k^{k_n}}\Gamma(X, t;\ Q, \tau) \qquad \text{pour} \qquad 2k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant 2$$

sont continues pour $X \neq Q$ et $\tau < t$, où $(X, t)$ désigne un point du domaine $D_T$ et $(Q, \tau)$ un point de la surface $s_T$.

Il en résulte que le potentiel de simple couche $U(X, t)$ défini par l'intégrale ([2]):

$$U(X, t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} \Gamma(X, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)dS_Q d\tau \tag{27}$$

de densité de la couche $\varphi(Q, \tau)$, bornée et intégrable sur la surface $s_T$, admet des dérivées sous la forme d'une intégrale régulière:

$$\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}U(X, t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} \frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\Gamma(X, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)dS_Q d\tau \tag{28}$$

en tout point $(X, t)$ du domaine $D_T$ pour $2k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant 2$, pourvu que $X \neq Q \in S_\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, en outre en ces points $(X, t)$ le potentiel $U(X, t)$ vérifie l'équation (1).

Nous désignons par $\omega_t$ la partie commune des domaines fermés $\overline{\Omega}_\tau$ pour $0 \leqslant \tau \leqslant t$ (produit des domaines fermés $\overline{\Omega}_\tau$, c'est-à-dire $\omega_t = \bigcup_{0\leqslant\tau\leqslant t} \overline{\Omega}_\tau$). Donc, nous concluons facilement que (si l'ensemble $\omega_t$ n'est pas vide) le potentiel $U(X, t)$ admet des dérivées de la forme (28) en tout point intérieur $(X, t)$ du produit cartésien $\omega_t \times [0, T]$, en plus — le potentiel $U(X, t)$ vérifie l'équation (1) dans l'intérieur de ce produit cartésien $\omega_t \times [0, T]$.

Étudions maintenant le potentiel $U(X, t)$ dans la partie restante du domaine non cylindrique $D_T$, c'est-à-dire dans le domaine $D_T - \text{int}(\omega_t \times [0, T])$.

D'après la formule (3), nous pouvons écrire le potentiel $U(X, t)$ sous la forme d'une somme des intégrales:

$$U(X, t) = V(X, t) + \overline{V}(X, t), \tag{29}$$

où

$$V(X, t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} w^{(Q,\tau)}(X, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)dS_Q d\tau, \tag{30}$$

$$\overline{V}(X, t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} \overline{w}(X, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)dS_Q d\tau. \tag{31}$$

---

([2]) Nous conservons le signe d'intégrale double pour l'intégrale de surface à $(n-1)$ dimensions dans l'espace euclidien $E^{(n)}$ à $n$ dimensions. Pour simplifier les notations nous omettons (v. [2], p. 126, formule (3)) le facteur $(\sin(N_{Q_\tau}, t))^{-1}$ sous le signe de l'intégrale de surface.

En tenant compte de la formule (5) nous voyons que l'intégrale $V(X, t)$ est indéfiniment dérivable en tout point $(X, t)$ du domaine $D_T - \operatorname{int}(\omega_t \times [0, T])$. D'après les formules (4), (6), (8) le second membre $\overline{w}(X, t; Q, \tau)$ de la somme (3) et ses dérivées de la forme (28) admettent des singularités en tout point $(X, t)$ du domaine $D_T - \operatorname{int}(\omega_t \times [0, T])$ si $(X, \tau) \in s_T$ pour $0 \leqslant \tau < t$.

Donc on peut définir la valeur de la fonction $\overline{V}(X, t)$ en tout tel point $(X, t)$ du domaine $D_T - \operatorname{int}(\omega_t \times [0, T])$ par l'intégrale singulière:

$$\overline{V}(X, t) = \lim_{\varrho_1 \to 0} \int_0^t \iint_{S_\tau - \Sigma_\tau^1} \overline{w}(X, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dS_Q d\tau \tag{32}$$

où $\Sigma_\tau^1$ désigne (v. [2], p. 131) la portion de la variété $S_\tau$, formée par l'intersection de la variété $S_\tau$ et du cylindre $W(P, \varrho_1)$ dont l'axe est la normale à la variété $S_\tau$ au point $\overline{P}$ et le rayon est $\varrho_1$, le point $\overline{P}$ étant déterminé par la relation $|X\overline{P}| = \inf\limits_{Q \in S_\tau}(|XQ|)$.

Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ est une fonction intégrable sur la surface latérale $s_T$ satisfaisant aux conditions de Liapounoff* (*v.* [2], *p.* 126, I, II, III) *et si elle vérifie l'inégalité*:

$$|\varphi(Q, \tau)| \leqslant \frac{M_\varphi}{\tau^{\mu_\varphi}} \quad (0 \leqslant \mu_\varphi < h^*) \tag{33}$$

***alors l'intégrale singulière $\overline{V}(X, t)$, donnée par la formule* (32), *est absolument et uniformément convergente et admet des dérivées en tout point $(X, t)$ du domaine $D_T - \operatorname{int}(\omega_t \times [0, T])$ tel que $(X, \tau) \in s_T$ pour $0 \leqslant \tau \leqslant t$, données par les formules*:**

$$\frac{\partial^{k_0 + k_1 + \ldots + k_n}}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \overline{V}(X, t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \ldots + k_n}}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \overline{w}(X, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dS_Q d\tau \tag{34}$$
$$(2k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant 2).$$

Démonstration. Démontrons d'abord l'existence des intégrales singulières figurant dans la relation (34) et établissons cette relation dans le cas où $k_1 + \ldots + k_n = 2$. La démonstration dans le cas où $k_1 + \ldots + k_n < 2$ et $k_0 = 0$ étant analogue et plus facile, nous l'omettons.

Soit donc $(X, t)$ un point arbitraire du domaine $D_T - \operatorname{int}(\omega_t \times [0, T])$. Il existe alors un nombre $\tau_x$ positif et tel que $(X, \tau_x) \in s_T$ c'est-à-dire $X \in S_{\tau_x}$.

Supposons que $0 \leqslant \tau_x < t$, car dans le cas $t < \tau_x \leqslant T$ les fonctions figurant sous les intégrales de l'expresion (34) sont régulières et il est évident que la relation (34) est alors vraie.

Nous désignons par $J(X,t)$ l'intégrale singulière figurant dans la relation (34) dans le cas $k_1+\ldots+k_n=2$ et écrivons cette intégrale sous la forme suivante:

$$J(X,t)=\lim_{\varrho_1\to 0}\int_0^t\iint_{S_\tau-\Sigma_\tau^1}\overline{w}''_{x_ix_j}(X,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)dS_Q d\tau. \tag{35}$$

Pour prouver l'existence de cette intégrale, décomposons l'intégrale de surface sous le signe de l'intégrale simple en deux parties étendues à la portion $\Sigma_\tau^0-\Sigma_\tau^1$ et à la variété restante $S_\tau-\Sigma_\tau^0$, où $\Sigma_\tau^0$ désigne la portion de la variété $S_\tau$ découpée par le cylindre $W(\overline{P},d/3)$ dont l'axe est la normale à la variété $S_\tau$ au point $\overline{P}$ et le rayon est $d/3$ conformément aux conditions de Liapounoff, où $d$ est la constante, intervenant dans les conditions de Liapounoff.

D'après les propriétés du quasi-potentiel de charge spatiale (la fonction $\overline{w}(X,t;Q,\tau)$ est le quasi-potentiel de charge spatiale de densité $\Phi(M,\theta;Q,\tau)$ — v. lemme 2, p. 14) l'intégrale étendue à la portion $S_\tau-\Sigma_\tau^0$, que nous désignerons par $J_1(X,t)$, est bornée et régulière.

Donc, il suffit d'étudier l'intégrale étendue à la portion $\Sigma_\tau^0-\Sigma_\tau^1$ et nous la désignerons par $J_2(X,t)$.

D'après les conditions de Liapounoff (v. [2], p. 126) on a les inégalités:

$$0<\chi\leqslant\frac{|XQ|}{|XQ'|}\leqslant\chi^{-1},\qquad 0<\mathrm{const}\leqslant\frac{|X\overline{P}|}{|X\widetilde{P}|}, \tag{36}$$

où $Q'$ est la projection du point $Q$ sur le plan tangent au point $\overline{P}$ de la variété $S_\tau$, $\widetilde{P}$ le point d'intersection de la normale à la variété $S_t$ ou point $P$, déterminé par la relation $|XP|=\inf_{Q\in S_t}(|XQ|)$, avec la variété $S_t$ const et $\chi$ sont des constantes, qui ne dépendent que de la surface $s_T$.

Grâce à la représentation localement analytique de la surface latérale $s_T$, on peut remarquer que pour le point $\widetilde{P}$ de la portion $\Sigma_\tau^0$ on obtient (v. [2], p. 127):

$$|X\widetilde{P}|=\left|\frac{\partial g(0,\ldots,\tau_x+\vartheta(\tau-\tau_x))}{\partial\tau}\right||\tau-\tau_x|\qquad(0<\vartheta<1). \tag{37}$$

En s'appuyant sur les conditions de Liapounoff et les inégalités (33), (36), (17) nous pouvons écrire l'inégalité:

$$\begin{aligned}|J_2(X,t)|&\leqslant\mathrm{const}\,M_\varphi\int_0^t\iint_{\Sigma_\tau^0-\Sigma_\tau^1}\frac{dS_Q d\tau}{(t-\tau)^\mu|XQ|^{n+2-2\mu-h^*}}\\&\leqslant\mathrm{const}\,M_\varphi\int_0^t\int_{\varrho_1}^{d/3}\frac{rdrd\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^\mu(|X\overline{P}|^2+r^2)^{(5-1\mu-h^*)/2}}.\end{aligned} \tag{38}$$

En profitant de la formule (37) et en intégrant par rapport à la variable $r$, nous arrivons à l'inégalité:

$$(39)\qquad |J_2(X,t)| \leqslant \operatorname{const} M_\varphi \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^\mu |\tau-\tau_x|^{3-2\mu-h^*}}.$$

On peut toujours choisir la constante $\mu$ de façon qu'on ait:

$$(40)\qquad \mu < 1, \quad 3-h^*+\mu_\varphi-2\mu < 1$$

alors l'intégrale simple dans l'inégalité (39) est bornée.

Grâce à ce choix de la constante $\mu$ l'intégrale simple étudiée admet la limitation suivante:

$$(41)\qquad \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^\mu |\tau-\tau_x|^{3-2\mu-h^*}} \leqslant \operatorname{const}\left(\frac{\tau_x^{2\mu+h^*-2-\mu_\varphi}}{(t-\tau_x)^\mu} + \frac{1}{(t-\tau_x)^{2+\mu_\varphi-h^*-\mu}}\right).$$

En rapprochant les résultats obtenus (38), (39), (41) nous arrivons à la limitation:

$$(42)\qquad |J_2(X,t)| \leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi t^{2\mu+h^*-\mu_\varphi-2}}{(t-\tau_x)^\mu}$$

qui prouve l'existence de l'intégrale $J(X,t)$ en tout point $(X,t)$ du domaine $D_T-\operatorname{int}(\omega_t\times[0,T])$, pourvu que $(X,\tau_x)\in s_T$ pour $0\leqslant\tau_x<t$.

Nous démontrerons maintenant la formule (34) dans le cas où $k_1+\ldots+k_n=2$. Dans ce but considérons la fonction:

$$(43)\qquad I(X,t) = \int_0^t \iint_{S_\tau} \overline{w}'_{x_i}(X,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau$$

et étudions la différence:

$$(44)\qquad D = \frac{I(X_k,t)-I(X,t)}{k} - J(X,t),$$

où $(X,t)=(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t)$, $(X_k,t)=(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+ +k,x_{j+1},\ldots,x_n,t)$ étant des points du domaine $D_T-\operatorname{int}(\omega_t\times[0,T])$.

Nous pouvons écrire le premier terme de la différence (44) sous la forme d'une intégrale:

$$(45)\qquad \frac{I(X_k,t)-I(X,t)}{k} = \frac{1}{k}\int_0^t \iint_{S_\tau} \big(\overline{w}'_{x_i}(X_k,t;Q,\tau)-\overline{w}'_{x_i}(X,t;Q,\tau)\big)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau$$

que nous décomposons en somme d'intégrales:

$$(46)\quad \frac{I(X_k, t)-I(X, t)}{k} = -\frac{1}{k} I_{\varrho_1}(X, t)+\frac{1}{k} I_{\varrho_1}(X_k, t)+J_2(X_{\vartheta k}, t)+J_1(X_{\vartheta k}, t)$$

étendues respectivement à la portion $\Sigma_\tau^1$ de la variété $S_\tau$ située à l'intérieur du cylindre $W(\overline{P}, \varrho_1)$, où $\varrho_1 = 2|k| < d/12$, à la portion $\Sigma_\tau^0 - \Sigma_\tau^1$ de la variété $S_\tau$ située à l'intérieur entre les cylindres $W(\overline{P}, 2|k|)$, $W(\overline{P}, d/3)$ et à la portion restante $S_\tau - \Sigma_\tau^0$, le nombre $\vartheta$ étant positif et inférieur à l'unité.

D'une façon analogue on peut décomposer l'intégrale $J(X, t)$ en trois termes:

$$(47)\quad J(X, t) = J_3(X, t)+J_2(X, t)+J_1(X, t)\,.$$

Étudions d'abord les intégrales $J_3(X, t)$, $I_{\varrho_1}(X, t)$, $I_{\varrho_1}(X_k, t)$. Tout à fait comme dans le cas de l'évaluation de l'intégrale $J_2(X, t)$ nous aurons:

$$(48)\quad |J_3(X, t) \leqslant \mathrm{const} M_\varphi \int_0^t \int_0^{2|k|} \frac{r^{-\varkappa} dr d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^{\mu}(|X\overline{P}|^2+r^2)^{(4-\varkappa-2\mu-h^*)/2}}$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{const} M_\varphi (2|k|)^{1-\varkappa} t^{2\mu+h^*+\varkappa-\mu_\varphi-2}}{(t-\tau_x)^{\mu}},$$

où $1+\mu_\varphi - h^* < \varkappa < 1$, et $\frac{1}{2}(3-h^*+\mu_\varphi-\varkappa) < \mu < 1$.

Ensuite nous obtenons la limitation suivante:

$$(49)\quad |I_{\varrho_1}(X, t)| \leqslant \mathrm{const} M_\varphi \int_0^t \int_0^{2|k|} \frac{r^{\eta} dr d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^{\mu}(|XP|^2+r^2)^{(3+\eta-2\mu-h^*)/2}}$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{const} M_\varphi (2|k|)^{1+\eta} t^{2\mu+h^*-\eta-\mu_\varphi-1}}{(t-\tau_x)^{\mu}}$$

et une limitation analogue pour le point $X$ :

$$(50)\quad |I_{\varrho_1}(X_k, t)| \leqslant \mathrm{const}\, M_\varphi \frac{(3|k|)^{1+\eta} t^{2\mu+h^*-\eta-\mu_\varphi-1}}{(t-\tau_{x_k})^{\mu}},$$

où $0 < \eta < h^* - \mu_\varphi$, et $\frac{1}{2}(2+\eta-h^*+\mu_\varphi) < \mu < 1$.

D'après les égalités (46), (47) nous pouvons écrire la différence $D$ sous la forme suivante:

$$(51)\quad D = -\frac{1}{k} I_{\varrho_1}(X, t)+\frac{1}{k} I_{\varrho_1}(X_k, t)-J_3(X, t)+J_1(X_{\vartheta k}, t)-J_1(X, t)+ \\ +J_2(X_{\vartheta k}, t)-J_2(X, t)$$

En s'appuyant sur les limitations (48), (49), (50) nous remarquons que les termes $J_3(X,t)$, $\frac{1}{k}I_{\varrho_1}(X,t)$, $\frac{1}{k}I_{\varrho_1}(X_k,t)$ sont arbitrairement petits si $|k|$ est suffisamment petite.

Grâce à la continuité des intégrales $J_1(X,t)$, et $J_2(X,t)$ les termes $J_1(X,t)-J_1(X_{\vartheta k},t)$ et $J_2(X,t)-J_2(X_{\vartheta k},t)$ sont aussi arbitrairement petits si $|XX_{\vartheta k}|$ est suffisamment petite.

Donc, d'après la relation (44), à tout nombre positif $\varepsilon$ on peut faire correspondre un nombre positif $\delta$ tel que l'on ait:

$$|D|<\varepsilon\,,\quad \text{si}\quad |k|<\delta\,. \tag{52}$$

Nous arrivons ainsi à la formule (34) dans le cas où $k_1+\ldots+k_n=2$.

Passons maintenant au cas où $k_0=1$. Désignons par $L(X,t)$ l'intégrale singulière figurant dans la relation (34) et écrivons la sous la forme suivante:

$$L(X,t)=\lim_{\varrho_1\to 0}\int_0^t\iint_{S_\tau-\Sigma_\tau^1}\overline{w}_t'(X,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau\,. \tag{53}$$

En s'appuyant sur la limitation (17) et en répétant le raisonnement fait dans le cas où $k_1+\ldots+k_n=2$, on démontrera l'existence de l'intégrale $L(X,t)$ en tout point $(X,t)$ du domaine $D_T-\operatorname{int}(\omega_t^*\times[0,T])$ sous la condition que $(X,\tau_x)\in s_T$ pour $0\leqslant\tau_x<t$.

Pour démontrer la formule (34) dans le cas où $k_0=1$, nous considérons la différence:

$$R=\frac{\overline{V}(X,t+k)-\overline{V}(X,t)}{k}-L(X,t) \tag{54}$$

et nous démontrerons que cette différence $R$ est arbitrairement petite si $|k|$ est suffisamment petit.

Dans ce but nous supposons d'abord que $k>0$, $\varrho_1=2k$ et décomposons le quotient différentiel de la fonction $\overline{V}(X,t)$ en somme d'intégrales:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{V}(X,t+k)-\overline{V}(X,t)}{k}&=\frac{1}{k}\Big(\overline{V}_0^{(t,t+k)}(X,t+k)+\overline{V}_{-0}^{(t,t+k)}(X,t+k)+\\&\quad+\overline{V}_1^{(0,t)}(X,t+k)-\overline{V}_1^{(0,t)}(X,t)\Big)+L_{-1}^{(0,t)}(X,t+\vartheta k)\\&=\frac{1}{k}\Big(\int_t^{t+k}\Big(\iint_{\Sigma_\tau^0}+\iint_{S_\tau-\Sigma_\tau^0}\Big)\overline{w}(X,t+k;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau+\\&\quad+\int_0^t\iint_{\Sigma_\tau^1}\big(\overline{w}(X,t+k;Q,\tau)-\overline{w}(X,t;Q,\tau)\big)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau+\\&\quad+\int_0^t\iint_{S_\tau-\Sigma_\tau^1}\overline{w}_t'(X,t+\vartheta k;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau\end{aligned} \tag{55}$$

où $0<\vartheta<1$.

En fixant $k < \frac{1}{2}(t-\tau_x)$, tant pour $0 \leqslant \tau_x < t$ que pour $t < \tau_x \leqslant T$, nous pouvons établir comme dans le cas de l'évaluation des intégrales (38), (39), (41) les limitations suivantes:

$$(56) \qquad |\overline{V}_0^{(t,t+k)}(X, t+k)| \leqslant \operatorname{const} M_\varphi \int\limits_t^{t+k} \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t+k-\tau)^\mu |\tau-\tau_x|^{1-2\mu-h^*}}$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi k^{1-\mu}}{t^{\mu_\varphi}(t-\tau_x)^{1-2\mu-h^*}},$$

$$(57) \qquad |\overline{V}_{-0}^{(t,t+k)}(X, t+k)| \leqslant \operatorname{const} M_\varphi \int\limits_t^{t+k} \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t+k-\tau)^\mu (d/3)^{1-2\mu-h^*}}$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi k^{1-\mu}}{t^{\mu_\varphi}}$$

où $-h^*/2 < \mu < 1$, et aussi:

$$(58) \qquad |\overline{V}_1^{(0,t)}(X, t+k)| \leqslant \operatorname{const} M_\varphi (2k)^{1+\eta} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t+k-\tau)^\mu |\tau-\tau_x|^{2+\eta-2\mu-h^*}}$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi (2k)^{1+\eta}}{|t-\tau_x|^{2+\eta-\mu-h^*}},$$

$$(59) \qquad |\overline{V}_1^{(0,t)}(X, t)| \leqslant \operatorname{const} M_\varphi (2k)^{1+\eta} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t-\tau)^\mu |\tau-\tau_x|^{2+\eta-2\mu-h^*}}$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi (2k)^{1+\eta}}{|t-\tau_x|^{1+\eta-\mu-h^*}}$$

où $0 < \eta < 1$, $\frac{1}{2}(1+\eta-\mu_\varphi-h) < \mu < 1$.

Remarquons encore que l'intégrale $L_{-1}^{(t,t+\vartheta k)}(X, t+\vartheta k)$ admet la limitation:

$$(60) \qquad |L_{-1}^{(t,t+\vartheta k)}(X, t+\vartheta k)| \leqslant \operatorname{const} M_\varphi \int\limits_t^{t+\vartheta k} \frac{d\tau}{\tau^{\mu_\varphi}(t+\vartheta k-\tau)^\mu |\tau-\tau_x|^{3-2\mu-h^*}}$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{const} M_\varphi (\vartheta k)^{1-\mu}}{t^{\mu_\varphi}|t-\tau_x|^{3-2\mu-h^*}}$$

où $\frac{1}{2}(2-h^*+\mu_\varphi) < \mu < 1$, en outre on a l'égalité suivante:

$$(61) \qquad L_{-1}^{(0,t)}(X, t+\vartheta k) = L_{-1}^{(0,t+\vartheta k)}(X, t+\vartheta k) - L_{-1}^{(t,t+\vartheta k)}(X, t+\vartheta k).$$

En tenant compte de la décomposition (55) et de l'égalité (61) nous pouvons écrire la différence $R$ sous la forme suivante:

$$(62)\qquad R=\frac{1}{k}\big(\overline{V}_0^{(t,t+k)}(X,t+k)+\overline{V}_{-0}^{(t,t+k)}(X,t+k)+\overline{V}_1^{(0,t)}(X,t+k)-$$

$$-\overline{V}_1^{(0,t)}(X,t)\big)+L_{-1}^{(0,t+\vartheta k)}(X,t+\vartheta k)-L_{-1}^{(0,t)}(X,t)-$$

$$-L_{-1}^{(t,t+\vartheta k)}(X,t+\vartheta k)-L_1^{(0,t)}(X,t)\,.$$

Donc, d'après la décomposition (62) et les limitations (56), (57), (58), (59), (60) à tout nombre positif $\varepsilon$ on peut faire correspondre un nombre positif $\delta$ tel que l'on ait:

$$(63)\qquad |R|<\varepsilon\,,\quad \text{si}\quad k<\delta\,.$$

On traite d'une façon analogue le cas où $k<0$ (dans ce cas nous admettons l'hypothèse que $|k|<\min\big((t-\tau_x)/2,\,t/2\big)$) et on justifie l'égalité (34) dans le cas où $k_0=1$, c. q. f. d.

COROLLAIRE. *Le potentiel généralisé de simple couche* $U(X,t)$ *vérifie l'équation parabolique* (1) *en tout point* $(X,t)$ *du domaine non cylindrique* $D_T$.

Démonstration. Supposons que $(X,t)\in D_T-\operatorname{int}(\omega_t\times[0,T])$; d'après le théorème 1 nous obtenons:

$$(64)\qquad \Psi[U(X,t)]=\int_0^t\iint_{S_\tau}\Psi[\Gamma(X,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau\,.$$

Décomposons la fonction $\Psi[U(X,t)]$ en deux intégrales:

$$(65)\qquad \Psi[U(X,t)]=\Psi[U_1(X,t)]+\Psi[U_{-1}(X,t)]$$

$$=\int_0^t\iint_{\Sigma_\tau^1}\big(\Psi[w^{(Q,\tau)}(X,t;Q,\tau)]+\Psi[\overline{w}(X,t;Q,\tau)]\big)\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\iint_{S_\tau-\Sigma_\tau^1}\Psi[\Gamma(X,t;Q,\tau)]\varphi(Q,\tau)\,dS_Q\,d\tau$$

étendues à la portion $\Sigma_\tau^1$ de la variété $S_\tau$ et à la portion restante $S_\tau-\Sigma_\tau^1$.

Remarquons maintenant que pour $\varrho_1\neq 0$ on aura:

$$(66)\qquad \Psi[U_{-1}(X,t)]=0\,.$$

Grâce à la régularité de la quasi-solution $w^{(M,\theta)}(X,t;Q,\tau)$ le terme restant $\Psi[U_1(X,t)]$ est arbitrairement petit si $\varrho_1$ est suffisamment petit, c'est-à-dire à tout nombre positif $\varepsilon$ on peut faire correspondre un nombre positif $\delta$ tel que

$$(67)\qquad |\Psi[U_1(X,t)]|<\varepsilon\,,\quad \text{si}\quad \varrho_1<\delta\,.$$

Donc, en vertu des relations (65), (66), (67) nous concluons que l'on a:

$$|\Psi[U(X,t)]| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad \varrho_1 < \delta \tag{68}$$

ce qui établit le corollaire, puisque d'après (68) on a:

$$\Psi[U(X,t)] = 0 \tag{69}$$

c. q. f. d.

### Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Rixerche di Matematica 5, Napoli 1956.

[2] A. Piskorek, *Propriétés d'une intégrale de l'équation parabolique dans un domaine non cylindrique*, Annales Polonici Mathematici 8 (1960), p. 125-137.

*Reçu par la Rédaction le 18. 5. 1961*