ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1973)

Vergleichssatz für die Lösungen linearer Differential-Ungleichungen

Von HORST HEROLD (Berlin)

Mikusiński [7] stellte den folgenden Vergleichssatz für die Lösungen linearer Differentialgleichungen auf: Für $a \leqslant x \leqslant \beta$ seien die Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ stetig, $A(x) \geqslant 0$ und $B(x) < A(x)$. Die Lösung $\omega(x)$ von $y^{(n)}+A(x)y = 0$ $(n \geqslant 2)$ mit $\omega^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$, $\omega^{(n-1)}(a) = 1$ verschwinde in (a, β) nicht. Sind dann $y(x)$ bzw. $z(x)$ nichttriviale Lösungen von $y^{(n)}+A(x)y = 0$ bzw. $z^{(n)}+B(x)z = 0$, die den gleichen Anfangsbedingungen bei a genügen und deren eine für $a \leqslant x \leqslant \beta$ nicht negativ sei, so gilt $y(x) < z(x)$ für $a < x \leqslant \beta$.

Im Hinblick auf dieses Ergebnis soll ein Vergleichssatz für die Lösungen linearer Differential-Ungleichungen angegeben werden. Unter einer Lösung einer linearen Differential-Ungleichung n-ter Ordnung wird dabei eine n-mal stetig-differenzierbare Funktion verstanden, die im zugrunde gelegten Intervall der Differential-Ungleichung genügt.

Im folgenden wird stets angenommen, daß die in den Differentialausdrücken auftretenden (reellwertigen) Funktionen in $[a, b)$ stetig seien.

Es sei

$$L(y) = y^{(n)}+\sum_{i=1}^{n-1} p_i(x)y^{(i)} \qquad (n \geqslant 2).$$

Mit $K(x, s)$ werde die vom Parameter s, $a \leqslant s < b$, abhängige Lösung der Differentialgleichung $L(y)+P(x)y = 0$ bezeichnet, für die

$$\frac{\partial^k K(s, s)}{\partial x^k} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \qquad \frac{\partial^{n-1} K(s, s)}{\partial x^{n-1}} = 1$$

ist ($K(x, s)$ heißt Cauchy-Funktion der Differentialgleichung).

$L(y)+P(x)y \in K^+$ soll gleichbedeutend sein mit $K(x, s) \geqslant 0$ für $a \leqslant s < x < b$.

$L(y)+P(x)y \in K^+$ ist beispielsweise erfüllt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $p_i(x) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $P(x) \leqslant 0$ in (a, b).

(b) $p_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $P(x) \geqslant 0$, $K(x, a) \geqslant 0$ in (a, b) (siehe Mikusiński [7]).

(c) $p_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\int\limits_a^b |P(x)|\,dt < \dfrac{4^{n-1}(n-1)!}{(b-a)^{n-1}}$

(siehe Levin [6]).

(d) $L(y) + \bar{P}(x)y \in K^+$, wo $P(x) \leqslant \bar{P}(x)$ in (a, b) (siehe Azbelev und Caljuk [1]).

(e) $\bar{K}(x, s) > 0$ für $a \leqslant x < s < b$, wo $\bar{K}(x, s)$ die Lösung der adjungierten Differentialgleichung $\bar{L}(y) + P(x)y = 0$ ist, die für $x = s$ die gleichen Anfangsbedingungen wie $K(x, s)$ erfüllt.

Schließlich sei bemerkt, daß jedes für die Diskonjugiertheit(¹) von $L(y) + P(x)y = 0$ in $[a, b)$ hinreichende Kriterium trivialerweise auch $L(y) + P(x)y \in K^+$ sichert.

Die Bedingung (a) folgt daraus, daß die Differentialgleichung $L(y) + P(x)y = 0$ einem System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit nicht negativen Koeffizienten äquivalent ist und $K(x, s)$ für $x = s$ nicht negative Anfangswerte besitzt.

Die Bedingung (e) ergibt sich daraus, daß das Randwertproblem $L(y) + P(x)y = 0$, $y^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$, $y(\beta) = 0$ $(a \leqslant a < \beta < b)$ genau dann lösbar ist, wenn das Randwertproblem

$$\bar{L}(y) + P(x)y = 0, \quad y(a) = 0, \quad y^{(k)}(\beta) = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, n-2)$$

lösbar ist.

Die Bedingung (d) erhält man auch unmittelbar aus dem folgenden Satz.

SATZ. *Sei* $L(y) + P(x)y \in K^+$ *und* $p(x) \leqslant P(x)$ *in* $[a, b)$; $y(x)$ *sei eine Lösung der Differential-Ungleichung*

$$L(y) + P(x)y \leqslant h(x),$$

$v(x)$ *eine Lösung von*

$$L(v) + p(x)v \geqslant h(x),$$

wobei $y^{(k)}(a) = v^{(k)}(a)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$, $y^{(n-1)}(a) \leqslant v^{(n-1)}(a)$ *gelte.*

Ist $v(x) \geqslant 0$ *in* (a, b), *so folgt* $y(x) \leqslant v(x)$ *in* (a, b) (²).

Ist in einem Intervall $(a, a+\varepsilon)$ $v(x) > 0$ *und* $p(x) < P(x)$ *und ist in* (a, b) $v(x) \geqslant 0$ *oder* $y(x) \geqslant 0$, *so folgt* $y(x) < v(x)$ *in* (a, b).

(¹) Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung heißt im Intervall I diskonjugiert, wenn jede nichttriviale Lösung weniger als n (mit Vielfachheit gezählte) Nullstellen in I besitzt.

(²) Voraussetzung $v(x) > 0$ im Falle $p(x) \equiv P(x)$ entbehrlich (siehe (¹)).

Ist in einem Intervall $(a, a+\varepsilon)$ $v(x) > 0$ *und ist in* (a, b) $y(x) > 0$, *so folgt* $y(x) \leqslant v(x)$ *in* (a, b).

Bemerkung. Den eingangs zitierten Vergleichssatz von Mikusiński erhält man, wenn man (b) beachtet.

Beweis. Sei $v(x) \geqslant 0$ in (a, b). Mit $u(x) = v(x) - y(x)$ gilt

$$(1) \qquad \begin{aligned} L(u) + P(x)u &= L(v) + P(x)v - \big(L(y) + P(x)y\big) \\ &\geqslant L(v) + P(x)v - h(x) \geqslant L(v) + p(x)v - h(x) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Setzt man

$$(2) \qquad g(x) = L(u) + P(x)u,$$

so ist $u(x)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$L(u) + P(x)u = g(x),$$

die den Anfangsbedingungen $u^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$, $u^{(n-1)}(a) = C \geqslant 0$ genügt. Nach der Formel von Cauchy ist somit

$$(3) \qquad u(x) = \int_a^x K(x, s) g(s) ds + CK(x, a).$$

Da wegen (1) und (2) $g(x) \geqslant 0$ in (a, b) ist, folgt auf Grund der Voraussetzung $u(x) \geqslant 0$ in (a, b).

Es sei jetzt in einem Intervall $(a, a+\varepsilon)$ $v(x) > 0$ und $p(x) < P(x)$. Nach (1) und (2) ist dann $g(x) > 0$ in $(a, a+\varepsilon)$.

Ist nun $v(x) \geqslant 0$ in (a, b), so erhält man aus (1), (2) und (3) $u(x) > 0$ in (a, b).

Ist aber $y(x) \geqslant 0$ in (a, b), so wird mit (a, c), $c \in (a, b]$, das größte Intervall bezeichnet, in dem $v(x) > 0$ gilt. Wäre $c \neq b$, so erhielte man wegen (3) $v(x) - y(x) > 0$ in $(a, c]$, woraus sich der Widerspruch $v(c) > y(c) \geqslant 0$ ergäbe. Also ist $c = b$, und es folgt nach dem eben Bewiesenen $v(x) > y(x)$ in (a, b).

Schließlich sei in einem Intervall $(a, a+\varepsilon)$ $v(x) > 0$ und in (a, b) $y(x) > 0$. Wird c wie eben gewählt, so ergäbe sich im Falle $c \neq b$ aus (1), (2) und (3) $v(x) \geqslant y(x)$ in $(a, c]$. Hieraus würde $v(c) > 0$ folgen. Also ist $c = b$.

Als Anwendung des Satzes wird gezeigt:

Die Funktion $p(x)$ sei in (α, β) stetig und es gelte dort

$$|p(x)| \leqslant P(x) \equiv \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(\beta-\alpha)^3}{(x-\alpha)^3(\beta-x)^3}.$$

Dann ist die Differentialgleichung

$$(4) \qquad v''' + p(x)v = 0$$

in (α, β) diskonjugiert. ($2/3\sqrt{3}$ kann nicht durch eine größere Zahl ersetzt werden.)

Beweis. Kim [5] hat bewiesen, daß

$$y''' + A\frac{(\beta-\alpha)^3}{(x-\alpha)^3(\beta-x)^3}\,y = 0, \qquad A \text{ reelle Konstante},$$

genau dann in (α, β) diskonjugiert ist, wenn $|A| \leqslant 2/3\sqrt{3}$ ist.

Wäre $v''' + p(x)v = 0$ in (α, β) nicht diskonjugiert, so müßte sie bekanntlich (siehe Hanan [4] oder Azbelev und Caljuk [2]) eine nichttriviale Lösung $v(x)$ mit $v(a) = v'(a) = 0$ $(a \in (\alpha, \beta))$ besitzen, die eine weitere Nullstelle in (α, β) besitzt. Nach dem Satz kann $v(x)$ in (a, β) nicht verschwinden, da die Lösung $y(x)$ von $y''' + P(x)y = 0$ mit $y^{(k)}(a) = v^{(k)}(a)$ $(k = 0, 1, 2)$ in (a, β) nullstellenfrei ist. Die Lösung $v(x)$ kann aber auch in (α, a) nicht verschwinden, da sonst die adjungierte Differentialgleichung $v''' - p(x)v = 0$ eine Lösung haben müßte, bei der einer Nullstelle eine doppelte Nullstelle vorausgeht, was aber wegen $-p(x) \leqslant P(x)$ nach dem Satz ebenfalls ausscheidet.

Aus den Ergebnissen von Mikusiński [7] kann noch eine Folgerung gezogen werden (man vgl. hierzu auch Čaplygin [3]):

Mit $\omega_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ werden die Lösungen von

$$y^{(n)} + A(x)y = 0, \qquad A(x) \geqslant 0 \text{ und stetig in } [\alpha, \beta],$$

bezeichnet, für die $\omega_i^{(k)}(\alpha) = \delta_{ik}$ gilt.

Es sei $y(x)$ eine Lösung von $y^{(n)} + A(x)y \geqslant 0$ mit $y^{(k)}(\alpha) = c_k \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Gilt $c_k = 0$ $(k = 0, \ldots, l-1;\ 0 \leqslant l \leqslant n-1)$ und verschwindet $\omega_l(x)$ in (α, β) nicht, so ist $y(x) \geqslant 0$ in $[\alpha, \beta]$.

Für $y(x)$ gilt nämlich die Darstellung

$$y(x) = \int_\alpha^x K(x,s)\big(y^n(s) + A(s)y(s)\big)\,ds + \sum_{i=0}^{n-1} c_i\omega_i(x)$$

und da $\omega_i(x) > 0$ in $(\alpha, \beta]$ gilt für $i > l$ (siehe Mikusiński [7]) folgt wegen (b) die Behauptung.

Literatur

[1] N. V. Azbelev und Z. B. Caljuk, *On Čaplygin's problem*, Ukrain. Mat. Ž. 10 (1958), No. 1, p. 3-12.

[2] — *On the question of distribution of zeros of solutions of linear differential equations of third order*, Mat. Sb. (N. S.) 51 (93) (1960), p. 475-486; Amer. Math. Soc. Transl. (2) 42 (1964), p. 233-245.

[3] S. A. Čaplygin, *New methods in the approximate integration of differential equations*, GITTL, Moscow (1950).

[4] M. Hanan, *Oscillation criteria for third-order linear differential equations*, Pacific J. Math. 11 (1961), p. 919-944.

[5] W. J. Kim, *On the zeros of solutions of* $y^{(n)}+py = 0$, J. Math. Anal. Appl. 25 (1969), p. 189-208.

[6] A. Ju. Levin, *Some problems bearing on the oscillation of solutions of linear differential equations*, Soviet Math. Dokl. 4 (1963), p. 121-124.

[7] J. Mikusiński, *Sur l'équation* $x^{(n)}+A(t)x = 0$, Ann. Polon. Math. 1 (1955), p. 207-221.

Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1971