ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1975)

Un théorème de prolongement spinoriel

par IULIAN POPOVICI (Bucarest)

Résumé. Dans le paragraphe 1 on obtient, à l'aide d'une involution sur une algèbre de Clifford, un diagramme commutatif que constitue le support algébrique du prolongement des structures spinorielles. On construit, pour la représentation canonique complexe de l'algèbre de Clifford considérée, un opérateur d'adjonction au sens de Dirac relativement à une forme hermitienne.

Dans le paragraphe 2, on indique quelques propriétés des fibrés différentiables, nécessaires pour exprimer d'une manière concise les résultats ci-dessous. On n'impose aucune restriction sur la topologie de la variété de base, convention qui subsistera aussi dans la suite.

Dans le paragraphe 3, on considère une variété pseudoriemannienne M de dimension n et on construit une métrique du type Sasakien sur chaque fibré M' sur M en droites affines, dont le fibré vectoriel réduit coïncide avec $\bigcup_{x\in M} \Lambda^n T_x(M)$. On associe, à chaque structure spinorielle sur M, une structure spinorielle spéciale canonique sur M' et on construit l'opérateur correspondant de prolongement des connexions spinorielles.

Dans le paragraphe 4, on construit, pour les variétés M et M' ci-dessus, l'opérateur de prolongement des champs spinoriels (en particulier du champ de Dirac), jouissant de la propriété de permutation avec la dérivée covariante spinorielle et l'adjonction.

On associe à chaque structure spinorielle [3], [5] sur la variété M de dimension n une structure spinorielle spéciale sur une variété M' de dimension $n+1$. On construit un opérateur correspondant de prolongement spinoriel, ayant la propriété de permutation avec la dérivée covariante et l'adjonction. La variété M' munie d'une métrique du type sasakien [6], [7], [9] qui contient la métrique de Kaluza–Klein [8] comme cas particulier, est un fibré en droites affines sur M dont la topologie est arbitraire. Les résultats obtenus s'appliquent, pour M orientable, à une théorie unitaire cylindrique.

1. Considérations sur les algèbres de Clifford. Soient une forme quadratique non dégénérée Q sur un espace vectoriel n-dimensionnel réel V et l'invariant ε_Q donné par:

$$(1)\qquad \varepsilon_Q = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n, \quad Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_1 (v^i)^2 \quad (\varepsilon_i = \pm 1,\ v \in V).$$

Désignons par $C(Q)$ l'algèbre de Clifford réelle associée à Q [1], [2] et par η son involution principale,

$$\eta: v \to -v, \quad v \in V,$$

l'espace V étant identifié à son image canonique dans $C(Q)$.

On sait que toute représentation linéaire complexe de l'algèbre $C(Q)$ est complètement réductible. L'ensemble des composantes irréductibles constitue, pour n pair, une classe d'équivalence caractérisée par un représentant ϱ et, pour n impair, deux classes caractérisées par les représentants ϱ, $\varrho \circ \eta$. On a dans les deux cas(1):

$$\varrho: C(Q) \to L(D), \quad \dim D = 2^{[n/2]}.$$

Nous utiliserons aussi la notation $\tilde{x} = \varrho(x)$, $x \in C(Q)$.

La représentation $\varrho \oplus \varrho \circ \eta$ est injective; si n est pair, ϱ est aussi injective.

Proposition 1. *Les opérateurs de l'espace $\varrho(V)$ sont, pour n pair ($n = 2r$), autoadjoints relativement à une forme hermitienne non dégénérée χ sur D. Si Q est définie positive, χ est définie; dans le cas contraire χ est de signature zéro.*

Démonstration. Nous reprenons la méthode classique de construction, par induction relativement à r, d'un système de matrices $e_1, \ldots, e_n$ d'ordre 2^r pour lesquelles:

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\varepsilon_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

et nous établissons en même temps leur propriété d'être autoadjointes.

Pour $r = 1$ cette propriété se déduit en utilisant les matrices:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \sqrt{-1}\, b. \tag{3}$$

En effet, les matrices a, b sont hermitiennes et a, c, d sont autoadjointes relativement à la forme hermitienne $z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2$.

Supposons maintenent qu'il existe un système de matrices autoadjointes $f_1, \ldots, f_{n-2}$ d'ordre 2^{r-1} pour lesquelles:

$$f_i f_j + f_j f_i = 2\varepsilon\varepsilon_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n-2;\ \varepsilon = \pm 1). \tag{2'}$$

Si Q est définie positive, nous prenons:

$$e_i = \sqrt{-1}\, ab \otimes f_i \quad (i = 1, \ldots, n-2), \quad e_{n-1} = a \otimes 1, \quad e_n = b \otimes 1 \tag{2''}$$

(1) Désignons pour un espace vectoriel arbitraire U, par $L(U)$ l'algèbre des opérateurs linéaires de U et par U' le dual de U.

avec $\varepsilon = 1$. Dans le cas contraire, on peut toujours supposer $\varepsilon_n = -1$. Pour $\varepsilon_{n-1} = -1$, nous remplaçons dans (2″) les matrices a, b par c resp. d et nous prenons $\varepsilon = 1$; pour $\varepsilon_{n-1} = 1$, nous remplaçons dans (2″) la matrice b par c et nous prenons $\varepsilon = -1$. Q.E.D.

Remarque 1. L'adjonction relativement à χ définit une antiinvolution sur $L(D)$, qui induit l'antiinvolution principale de l'algèbre de Clifford $C(Q)$.

Remarque 2. La forme hermitienne χ définit une adjonction, qui est une bijection $D \to D'$. Par produit tensoriel on obtient une application involutive sur $D \otimes D'$, qui coïncide avec l'adjonction sur $L(D)$, en vertu de l'isomorphisme naturel entre $D \otimes D'$ et $L(D)$.

PROPOSITION 2. *Les opérateurs de l'espace $\varrho(V)$ vérifient, pour n impair ($n = 2r+1$), la condition $v^* = \varepsilon_Q v$, où le symbole $*$ signifie l'adjonction relativement à une forme hermitienne non dégénérée χ sur D. Si Q est définie, χ est définie; dans le cas contraire, χ est de signature zéro.*

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un repère orthonormé de V. L'élément $\tilde{e}_1 \ldots \tilde{e}_n$ est un scalaire, car $e_1 \ldots e_n$ est central dans $C(Q)$ et $L(D)$ est engendrée par $\varrho(C(Q))$. Alors:

$$\varrho(e_n) = k\varrho(e_1 \ldots e_{n-1}), \qquad k^2 = (-1)^r \varepsilon_Q, \qquad k \text{ scalaire}. \tag{4}$$

En vertu de la proposition 1, nous pouvons supposer que $\varrho(e_i)^* = \varepsilon_Q \varrho(e_i)$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. Alors on vérifie cette dernière condition pour $i = n$ à l'aide de (4). Q.E.D.

Soient $W = \{v \in V\colon Q(v) = \pm 1\}$ et les groupes multiplicatifs $\mathrm{Pin}Q$, $\mathrm{Spin}Q$ engendrés dans $C(Q)$ par W resp. $W \cdot W$. L'homomorphisme p: $\mathrm{Pin}Q \to O(Q)$

$$p(x)v = \varepsilon_x x v x^{-1}, \qquad x \in \mathrm{Pin}Q, \; v \in V$$

(où $x \to \varepsilon_x$ est l'homomorphisme de $\mathrm{Pin}Q$ sur le groupe multiplicatif $\{\pm 1\}$ de noyau $\mathrm{Spin}Q$) définit un revêtement d'ordre deux de $O(Q)$ par $\mathrm{Pin}Q$ ou de $SO(Q)$ par $\mathrm{Spin}Q$.

Nous allons indiquer une construction nécessaire pour le prolongement des structures spinorielles. Soient l'espace vectoriel $(n+1)$-dimensionnel réel $V_0 = V \oplus R \cdot e_0$, la forme quadratique Q_0 sur V_0, $Q_0 = Q$ sur V, e_0 orthogonal sur V, $Q(e_0) = -1$, l'involution σ de $C(Q)$

$$\sigma\colon\; v \to v e_0 \quad (v \in V), \qquad e_0 \to -e_0 \tag{5}$$

et l'homomorphisme τ: $O(Q) \to SO(Q_0)$,

$$\tau(A)\colon\; v \to Av \quad (v \in V), \qquad e_0 \to \det A \cdot e_0. \tag{5'}$$

On peut toujours supposer $C(Q) \subset C(Q_0)$ et on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pin}Q & \xrightarrow{p} & O(Q) \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\tau \\ \mathrm{Spin}Q_0 & \xrightarrow[p]{} & SO(Q_0) \end{array} \tag{5''}$$

la restriction de σ à $\mathrm{Spin}Q$ étant l'inclusion $\mathrm{Spin}Q \subset \mathrm{Spin}Q_0$.

Nous déduirons quelques conséquences des propositions 1 et 2, nécessaires à la comparaison des opérateurs d'adjonction et de prolongement spinoriel. Nous désignons, pour éviter la confusion, par D_1 l'espace de la représentation $\varrho\circ\eta$ et par $D_0 = D\oplus D_1$, l'espace D_1 étant, bien entendu, supposé un exemplaire de D. En identifiant l'algèbre $C(Q)$ à son image par la représentation $\varrho\oplus\varrho\circ\eta$, nous allons obtenir une représentation linaire fidèle de l'inclusion $C(Q) \subset C(Q_0)$. Remarquons d'abord que tout élément $v\in V$ est de la forme $v = a\otimes\tilde{v}$, la matrice a étant donnée par (3). Prenons

$$e_0 = \begin{cases} a\otimes e & (n \text{ pair}), \\ c\otimes 1 & (n \text{ impair}), \end{cases} \tag{6}$$

où l'opérateur $e\in L(D)$ s'obtient d'un repère orthonormé $(e_1, \ldots, e_n)$ de V par

$$e = k\varrho(e_1 \ldots e_n), \quad e^2 = -1, \quad k \text{ scalaire}. \tag{6'}$$

Supposons maintenant que n soit pair. En considérant l'involution $\tilde{\sigma}$ de $L(D)$ définie par $\tilde{\sigma}(v) = ve$, $v\in\varrho(V)$, on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} C(Q) & \xrightarrow{\sigma} & C(Q_0) \\ \varrho\downarrow & & \downarrow\varrho \\ L(D) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & L(D) \end{array} \tag{7}$$

L'involution $\tilde{\sigma}$ étant intérieure, il existe $S\in L(D)$ tel que:

$$\tilde{\sigma}: x\to SxS, \quad S^2 = 1, \quad x \text{ arbitraire de } L(D). \tag{8}$$

Les opérateurs de $\varrho(V_0)$ vérifient, pour $\varepsilon_Q = 1$, la condition $v^- = -v$, où l'indice supérieur „ $-$ " signifie l'adjonction relativement à une forme hermitienne non dégénérée χ_- sur D. Si Q est définie négative, χ_- est définie; dans le cas contraire χ_- est de signature zéro. On a d'après (8):

$$ve = SvS = S^-vS^-, \quad v \text{ arbitraire de } \varrho(V).$$

Donc $S^- = \lambda S$ (λ scalaire), car l'algèbre $L(D)$ est engendrée par $\varrho(V)$. Mais $\lambda = \pm 1$ et on obtient en remplaçant éventuellement S par $\sqrt{-1}S$:

$$\tilde{\sigma}: x\to SxS^{-1}, \quad S^2 = \pm 1, \quad S^- = S\in L(D). \tag{8'}$$

Si $\varepsilon_Q = -1$, les opérateurs de $\varrho(V)$ vérifient la condition $v^- = -v$, tandis que les opérateurs de $\varrho(V_0)$ vérifient la condition $v^+ = v$, où les indices supérieurs "$+$" et "$-$" signifient l'adjonction relativement à deux formes hermitiennes non dégénérées, de signature zéro, χ_+ resp. χ_- sur D. On a, par l'extension de la relation $v^+ = -v^-$ de $\varrho(V)$ à $L(D)$:

$$(9) \qquad x^+ = ex^-e^{-1}, \quad x \text{ arbitraire de } L(D).$$

L'involution principale de $L(D)$ et l'involution $\tilde{\sigma}$ étant inversibles, il en résulte que $Se = \varepsilon eS$ (ε scalaire) et le calcul de SeS nous montre que $\varepsilon = \pm 1$. La relation

$$ve = SvS = -S^-vS^-, \quad v \text{ arbitraire de } \varrho(V),$$

implique $S^- = \lambda Se$ (λ scalaire, $\lambda^2 = -\varepsilon$). Par suite l'opérateur S de (8) vérifie les conditions:

$$(8'') \qquad S^- = \varepsilon S^+ = SF = \varepsilon FS, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

où $F = e$ ou $F = \sqrt{-1}\, e$.

Dans le cas où n est impair, il existe $S \in L(D_0)$ tel que

$$(10) \qquad \sigma\colon x \to SxS, \quad S^2 = 1, \quad x \text{ arbitraire de } C(Q_0).$$

Les opérateurs de $\varrho(V)$ vérifient, pour $\varepsilon_Q = -1$ la condition $v^- = -v$, relativement à une forme hermitienne non dégénérée χ_- sur D. Si Q est définie négative, χ_- est définie: dans le cas contraire χ_- est de signature zéro. D'après (6), $v^- = -v$ relativement à la forme hermitienne $\chi_- \oplus \chi_-$ sur $D_0 = D \oplus D_1$, quel que soit $v \in V_0$, ce qui implique:

$$(10') \qquad \sigma\colon x \to SxS^{-1}, \quad S^2 = \pm 1, \quad S^- = S \in L(D_0).$$

Les opérateurs de $\varrho(V)$ vérifient pour $\varepsilon_Q = 1$ la condition $v^* = v$, relativement à une forme hermitienne non dégénérée χ sur D. Si Q est définie positive, χ est définie; dans le cas contraire χ est de signature zéro. Par suite, les opérateurs de V vérifient la condition $v^- = -v$ relativement à $\chi_- = b \otimes \chi$, tandis que les opérateurs de V_0 vérifient la condition $v^+ = v$ relativement à $\chi_+ = a \otimes \chi$, où les matrices a et b sont données par (3). Les formes hermitiennes χ_+ et χ_- sont, d'après la proposition 1, de signature zéro et on a

$$(9') \qquad x^+ = e_0x^-e_0^{-1}, \quad x \text{ arbitraire de } L(D_0).$$

Alors l'opérateur S de (10) vérifie les conditions (8'') avec $F = e_0$ ou $F = \sqrt{-1}\, e_0$.

2. Considérations sur les fibrés différentiables. Désignons, pour chaque variété différentiable réelle M de dimension n et pour chaque groupe de Lie G, par $\mathscr{P}(M, G)$ l'ensemble des fibrés pricipaux de base M et de groupe structurel G, dans lequel on introduit la relation d'équivalence suivante: $P_1 \sim P_2$ s'il existe un homomorphisme $P_1 \to P_2$ [4] qui correspond à l'aplication identique de G et qui se projette sur l'application identique de M, c'est-à-dire si P_1 et P_2 admettent les mêmes fonctions de transition. On n'impose aucune condition de nature topologique à la base M (par exemple d'être séparée ou paracompacte). Si $P \in \mathscr{P}(M, G)$ désignons par $\mathscr{C}(P)$ l'ensemble des connexions sur P.

Soient l'application différentiable f: $M' \to M$, l'homomorphisme des groupes de Lie g: $G \to G'$ et les fibrés $P \in \mathscr{P}(M, G)$, $P' \in \mathscr{P}(M', G')$, ayant pour fonctions de transition $t_{\alpha\beta}$ resp. $t'_{\alpha\beta}$ relativement aux systèmes d'isomorphismes locaux

$$t_\alpha\colon\ U_\alpha \times G \to P, \qquad t'_\alpha\colon\ U'_\alpha \times G' \to P'.$$

Si les applications t_α, t'_α peuvent être choisies de manière que $t'_{\alpha\beta} = g \circ t_{\alpha\beta} \circ f$, désignons par $gf[P]$ la classe de P' dans $\mathscr{P}(M', G')$. Supposons maintenant que P' soit un fibré arbitraire de $gf[P]$ et soient les connexions $\Gamma \in \mathscr{C}(P)$, $\Gamma' \in \mathscr{C}(P')$ caractérisées respectivement par les familles de 1-formes ω_α, ω'_α sur U_α. Considérons l'application gf_*: $\mathscr{C}(P) \to \mathscr{C}(P')$ donnée par $\Gamma \to \Gamma'$ avec $\omega'_\alpha = dg \circ \omega_\alpha \circ df$. Si $M = M'$ et f est l'application identique de M, posons $gf[P] = g[P]$, $gf_* = g_*$

Remarque 3. Soit un homomorphisme h: $P \to P'$ qui correspond à g et qui se projette sur l'application identique de M. On a, pour t_α, t'_α convenables: $t'_{\alpha\beta} = g \circ t_{\alpha\beta}$ et h est défini par le système de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times G & \xrightarrow{t_\alpha} & P \\ {\scriptstyle 1\times g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ U_\alpha \times G' & \xrightarrow{t'_\alpha} & P' \end{array} \qquad . \tag{11}$$

Donc l'existence de h est caractérisée par $P' \in g[P]$ et g_* est l'application canonique $\mathscr{C}(P) \to \mathscr{C}(P')$ associée à h [4].

Soit E un fibré associé à P, de fibre type T et de projection π. Notons, pour chaque point $u \in E$, par V_u l'espace vertical en u et définissons, à l'aide d'une connexion $\Gamma \in \mathscr{C}(P)$, l'espace horizontal H_u en u. Alors, l'espace tangent en u à E est donné par $T_u(E) = H_u \oplus V_u$, relation qui induit, par dualité, une application canonique d'inclusion de H'_u dans $T_u(E)'$. Les bijections

$$d\pi^{-1}\colon\ T_x(M) \to H_u \subset T_u(E) \qquad (x = \pi(u)),$$

$$d\pi'\colon\ T_x(M)' \to H'_u \subset T_u(E)' \qquad \text{(la duale de } d\pi)$$

définissent, par produits tensoriels, un opérateur de prolongement tensoriel q: $T^r_s(M) \to T^r_s(E)$.

Les isomorphismes locaux ci-dessus définissent une famille d'isomorphismes locaux de E par le diagramme commutatif:

(11′)
$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times G \times T & \xrightarrow{1\times\lambda} & U_\alpha \times T \\ {\scriptstyle t_\alpha\times 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_\alpha} \\ P\times T & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & E \end{array}$$

où λ est l'action de G sur T et μ est la surjection canonique $(v, w)\to vw$ [4]. Si on a une action unique $G\times T\to T$ nous utilisons la notation $E = PT$.

Particularisons maintenant le groupe structural, en prenant au lieu de G le groupe affine A de la droite réelle R et supposons que E soit le fibré affine associé à P; on a donc $P\in\mathscr{P}(M, A)$ et E correspond à l'action canonique de A sur la droite réelle(²). Désignons par P_0, E_0 les *fibrés réduits* de P resp. de E, à savoir $P_0\in\mathscr{P}(M, R^*)$ est le fibré associé à P qui correspond à la surjection canonique de A sur le groupe multiplicatif $R^* = R\setminus\{0\}$ et E_0 est le fibré vectoriel, de fibre type R, associé à P_0. Supposons que chaque U_α soit muni d'un système local de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ et notons par s'_α les isomorphismes locaux associés, à l'aide des diagrammes de la forme (11′), au fibré vectoriel E_0. Si nous considérons les nombres réels x^0, x'^0 donnés par:

(11″)
$$s_\alpha^{-1}(u) = \big(\pi(u), x^0\big), \qquad s_\alpha'^{-1}(u') = \big(\pi_0(u'), x'^0\big),$$

où π_0 est la projection $E_0\to M$, on obtient les systèmes de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n, x^0)$, $(x^1, \ldots, x^n, x'^0)$, appelés *canoniques*, dans E resp. E_0. Introduisons à l'aide des coordonnées ci-dessus, *l'opérateur de translation* z: $\pi_0^{-1}(x)\to V_u$, x arbitraire de M, u arbitraire de $\pi^{-1}(x)$ par:

$$u' = (x^1, \ldots, x^n, x'^0)\to z(u') = (0, \ldots, 0, x'^0).$$

3. Prolongement des structures spinorielles. Supposons, avec les notations du paragraphe 2, que M soit pseudoriemannienne, en particulier riemannienne, et que la forme quadratique Q du paragraphe 1 soit de même signature que la métrique de M. Alors $O(Q)$ devient le groupe structural du fibré principal $O(M)$ des repères orthonormés de M. Une *structure spinorielle* sur M [3], [5] est un homomorphisme de fibrés principaux f: $\Sigma\to O(M)$ qui correspond à la représentation p: $\mathrm{Pin}Q\to O(Q)$ et qui se projette sur l'application identique de M. Une telle structure sera identifiée, d'après la remarque 3, à un fibré $\Sigma\in\mathscr{P}(M, \mathrm{Pin}Q)$ pour lequel $O(M)\in p[\Sigma]$. L'application p_*: $\mathscr{C}(\Sigma)\to\mathscr{C}\big(O(M)\big)$ est bijective, car p est un isomorphisme local.

Si M est orientable, $SO(Q)$ est le groupe structural du fibré principal $SO(M)$ des repères orthonormés et orientés de M et la structure spino-

(²) Si la base M est paracompacte, P admet une réduction de groupe structural $\{\pm 1\}$ et E est un fibré vectoriel.

rielle f s'appelle *spéciale*. D'autre part f induit, par restriction, l'homomorphisme f': $\Sigma' \to SO(M)$ qui correspond à la représentation p: $\mathrm{Spin}Q \to \to SO(Q)$. Alors, une structure spinorielle spéciale sur M sera identifiée à un fibré $\Sigma' \in \mathscr{P}(M, \mathrm{Spin}Q)$ pour lequel $SO(M) \in p[\Sigma']$. L'application p_*: $\mathscr{C}(\Sigma') \to \mathscr{C}(SO(M))$ est bijective.

On obtient une méthode de prolongement des structures spinorielles par le

THÉORÈME. *Soient une variété pseudoriemannienne M de métrique g et de dimension n, un fibré $P \in \mathscr{P}(M, A)$ et le fibré affine M' associé à P, de fibre type R. Supposant qu'il existe une connexion Γ sur P et que le fibré vectoriel réduit M_0' coïncide avec la variété $M_A = \bigcup_{x \in M} \Lambda^n T_x(M)$, alors:*

1° *la variété M' admet une métrique pseudoriemannienne g' telle que $SO(M') \in \tau\pi[O(M)]$, où la représentation τ: $O(Q) \to SO(Q_0)$ est donnée par* (5') *et π est la projection de M' sur M;*

2° *si Σ est une structure spinorielle sur M, tout fibré $\Sigma' \in \sigma\pi[\Sigma]$, avec σ définie par* (5), *est une structure spinorielle spéciale sur M';*

3° *on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\Sigma) & \xrightarrow{p_*} & \mathscr{C}(O(M)) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma\pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \tau\pi_*} \\ \mathscr{C}(\Sigma') & \xrightarrow{p_*} & \mathscr{C}(SO(M')) \end{array} \tag{12}$$

Démonstration. On associe à chaque champ de repères orthonormés $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ de M le champ de repères linéaires $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \zeta_0)$ de M' par:

$$\zeta_i = q \circ \theta_i \circ \pi \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \zeta_0 = z \circ (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \circ \pi \tag{13}$$

où q est l'opérateur de prolongement tensoriel $T(M) \to T(M')$ et z est l'opérateur de translation relativement aux fibrés M', $M_0' = M_A$ (voir le paragraphe 2). En considérant la projection π_0 de M_0 sur M, nous introduisons sur chaque fibre $\pi_0^{-1}(x)$, $x \in M$, la forme quadratique

$$g_0(u') = \lambda^2, \quad u' = \lambda\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n \tag{14}$$

et la métrique pseudoriemannienne sur M'

$$g'(X) = g(q^{-1}(X_h)) - g_0(z^{-1}(X_v)) = g(d\pi(X)) - g_0(z^{-1}(X_v)), \tag{15}$$

où X_h et X_v sont respectivement les composantes horizontale et verticale du vecteur $X \in T_u(M')$, $u \in M'$.

Chaque champ de repères donné par (13) est orthonormé relativement à la métrique (15) et l'ensemble de ces champs de repères définit une famille d'isomorphismes locaux de $SO(M')$ dont les fonctions de transition s'expriment à l'aide de celles de $O(M)$ par $u'_{\alpha\beta} = \tau \circ u_{\alpha\beta} \circ \pi$; donc la propriété 1° est démontrée.

D'autre part, les fonctions de transition $t_{\alpha\beta}$, $t'_{\alpha\beta}$ des fibrés Σ respectivement Σ' vérifient les conditions

$$t'_{\alpha\beta} = \sigma \circ t_{\alpha\beta} \circ \pi, \quad u_{\alpha\beta} = p \circ t_{\alpha\beta},$$

donc $t'_{\alpha\beta} = p \circ u'_{\alpha\beta}$, en vertu du diagramme commutatif (5''), ce qui implique la propriété 2°.

La propriété 3° est aussi une conséquence de (5''). Q.E.D.

Remarque 4. Il y a une analogie évidente entre la métrique (15) et celle de Sasaki [7], [9] sur $T(M)$.

Remarque 5. Soit t_a: $U_a \times A \to P$ un système d'isomorphismes locaux compatible avec la propriété de réduction du fibré réduit P_0 au groupe $\{\pm 1\}$. Alors la connexion Γ sur P est caractérisée, naturellement, par la famille des 1-formes réelles ξ sur M et ξ_a sur U_a. Si $\pi^{-1}(U_a)$ est muni d'un système canonique de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n, x^0)$, la métrique (15) s'écrit:

$$g' = g \circ d\pi - (x^0 \xi + \xi_a + dx^0)^2, \tag{15'}$$

ce qui représente, pour $\xi = 0$, la métrique de Kaluza–Klein [8].

Remarque 6. Si la variété M est orientable, $M_0 = M \times R$ et M' représente le cas général d'une théorie unitaire cylindrique [8]. Si $M' = M_0 = M_A$ on obtient l'espace d'une théorie unitaire projective et il existe toujours une connexion $\Gamma \in \mathscr{C}(P)$ (par exemple en prenant $\xi = 0$, $\xi_a = 0$). Si M est paracompacte, on a ce dernier cas.

4. Prolongement des champs spinoriels. Soit, avec les notations du théorème ci-dessus, l'opérateur de prolongement tensoriel q (voir le paragraphe 2) correspondant aux variétés M et M'. Nous nous proposons d'abord de construire une extension de cet opérateur aux champs spinoriels. Nous désignons par $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des sections d'un fibré E quelconque.

Dans le paragraphe 1 nous avons considéré les représentations canoniques ϱ, $\varrho \circ \eta$, $\varrho \oplus \varrho \circ \eta$ de l'algèbre de Clifford $C(Q)$ et nous avons désigné par D, D_1, D_0 les espaces de ces représentations. Un *spineur contravariant* (resp. *covariant*) sur M est, pour n pair ou pour M orientable, une section dans le fibré vectoriel ΣD (resp. dans le fibré dual $\Sigma D'$). Par multiplication tensorielle on obtient des spineurs ou spin-tenseurs de divers types [5]. Si n est impair et M n'est pas orientable, il faut considérer aussi des *spineurs* de $\mathscr{S}(\Sigma D_1)$ et de $\mathscr{S}(\Sigma D_0)$, pour avoir une définition du champ de Dirac et de l'opérateur d'adjonction. Les spineurs contravariants sur M' sont caractérisés par $\mathscr{S}(\Sigma' D)$ pour n pair et par $\mathscr{S}(\Sigma' D_0)$ pour n impair, car M' est orientable.

Considérons les fonctions de transition $t_{\alpha\beta}$, $t'_{\alpha\beta} = \sigma \circ t_{\alpha\beta} \circ \pi$ des fibrés principaux σ resp. σ' relativement aux isomorphismes locaux

$$t_\alpha\colon\; U_\alpha \times \mathrm{Pin}Q \to \Sigma, \qquad t'_\alpha\colon\; \pi^{-1}(U_\alpha) \times \mathrm{Spin}Q_0 \to \Sigma'.$$

Soient pour n pair les spineurs $\varphi \in \mathcal{S}(\Sigma D)$, $\psi \in \mathcal{S}(\Sigma D')$, qui sont caractérisés par les applications $\varphi_\alpha\colon\; U_\alpha \to D$, resp. $\psi_\alpha\colon\; U_\alpha \to D'$ pour lesquelles

$$\varphi_\beta = t_{\beta\alpha}\varphi_\alpha, \qquad \psi_\beta = \psi_\alpha t_{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Alors en utilisant le diagramme commutatif (7) et les relations (8), (8′), nous définissons les spineurs $q\varphi \in \mathcal{S}(\Sigma' D)$, $q\psi \in \mathcal{S}(\Sigma' D')$ par

$$q\varphi_\alpha(u) = S\varphi_\alpha\big(\pi(u)\big), \qquad q\psi_\alpha(u) = \psi_\alpha\big(\pi(u)\big)S^{-1}, \qquad u \in \pi^{-1}(U_\alpha). \tag{16′}$$

Si n est impair on définit les spineurs $q\varphi \in \mathcal{S}(\Sigma' D_0)$, $q\psi \in \mathcal{S}(\Sigma' D'_0)$ par (16′), l'opérateur S étant donné par (10) ou (10′). Dans ce qui suit les spineurs φ, ψ sont identifiés aux familles d'applications φ_α resp. ψ_α et par conséquent nous omettrons l'indice α.

Par produits tensoriels on obtient l'opérateur q de prolongement, de M à M', des spin-tenseurs de type arbitraire. Cet opérateur est permutable avec la dérivation covariante des spin-tenseurs, à savoir

$$\nabla_{qX}(q\Phi) = q(\nabla_X \Phi), \qquad \nabla_{\zeta_0}(q\Phi) = 0 \tag{17}$$

quel que soit le champ X de vecteurs sur M; le champ ζ_0 sur M' est défini par (13). Si Φ est un spineur, les deux opérateurs de dérivation covariante correspondent aux connexions spinorielles $\Delta \in \mathscr{C}(\Sigma)$ resp. $\Delta' = \sigma\pi_* \Delta \in \mathscr{C}(\Sigma')$; si Φ est un spin-tenseur, la dérivation covariante relativement aux indices tensoriels est donnée par les connexions $p_*\Delta$ et $p_*\Delta'$ (voir le diagramme commutatif (12)).

Remarque 7. On peut exprimer l'opérateur ∇_{qX} à l'aide de l'opérateur de dérivation covariante relativement à la connexion Δ'' associée à la métrique (15) et du tenseur associé au couple de connexions $p_*\Delta'$, Δ''.

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ un repère orthonormé de l'espace vectoriel V et ν, ν' deux constantes réelles ($\nu' = \pm\nu$).

Si n est pair nous considérons le *spin-tenseur fondamental* $f^i = \tilde{\sigma}\big(\varrho(e^i)\big) = \varrho\big(\sigma(e^i)\big)$ et nous définissons le champ de Dirac, contravariant resp. covariant, par:

$$f^i \nabla_i \varphi + \nu\varphi = 0, \qquad \nabla_i \psi f^i + \nu'\psi = 0. \tag{18}$$

Si M est orientable on obtient l'équation de Dirac classique. En effet, les spineurs $e\varphi$ et ψe^{-1}, où l'opérateur e est donné par (6′), vérifient respectivement les équations:

$$e^i \nabla_i \Phi + \nu\Phi = 0, \qquad \nabla_i \Psi e^i + \nu'\Psi = 0. \tag{19}$$

Si n est impair, nous considérons le *spin-tenseur fondamental* $f^i = \sigma(e^i)$ et nous définissons le champ de Dirac par (18), mais nous sommes obligés de supposer que $\varphi \in \mathscr{S}(\Sigma D_0)$, $\psi \in \mathscr{S}(\Sigma D_0')$. Si $\varphi = \varphi' + \varphi''$, $\varphi' \in \mathscr{S}(\Sigma D)$, $\varphi'' \in \mathscr{S}(\Sigma D_1)$ et $\psi = \psi' + \psi''$, $\psi' \in \mathscr{S}(\Sigma D')$, $\psi'' \in \mathscr{S}(\Sigma D_1')$ on a d'après (5) et (6):

$$(19') \qquad e^i \nabla_i \varphi' + \nu\varphi'' = 0, \qquad \nabla_i \psi' e^i + \nu' \psi'' = 0,$$

$$(19'') \qquad e^i \nabla_i \varphi'' + \nu\varphi' = 0, \qquad \nabla_i \psi'' e^i + \nu' \psi' = 0.$$

Si M est orientable, $\Sigma D = \Sigma D_1$; en prenant $\varphi' = \varphi''$, $\psi' = \psi''$, l'équation (18) se réduit aussi à (19).

On établit que l'*image par l'opérateur* q *d'un champ de Dirac est aussi un champ de Dirac*, à savoir, si φ et ψ vérifient (18), $q\varphi$ et $q\psi$ sont des solutions des équations:

$$(18') \qquad e^a \nabla_a \Phi + \nu\Phi = 0, \qquad \nabla_a \Psi e^a + \nu' \Psi = 0 \qquad (a = 1, \ldots, n, 0)$$

où les opérateurs ∇_a correspondent au champ de repères (13) et à la connexion $\sigma\pi_* \Delta$, $\Delta \in \mathscr{C}(\Sigma)$.

Nous allons étudier un *opérateur d'adjonction* qui généralise l'adjonction de Dirac.

Supposons que le fibré Σ admette, pour n pair, une réduction de groupe structural $U = \{x \in \operatorname{Pin} Q\colon \varrho(x)\varrho(x)^- = 1\}$, cas où Σ' admet, d'après (8'), (8'') et (9), une réduction du groupe structural U' défini ci-dessous([3]). Si $\varepsilon Q = 1$, $U' = \{x \in \operatorname{Spin} Q_0\colon \varrho(x)\varrho(x)^- = 1\}$ et il en résulte deux opérateurs d'adjonction $\mathscr{S}(\Sigma D) \to \mathscr{S}(\Sigma D')$, $\mathscr{S}(\Sigma' D) \to \mathscr{S}(\Sigma' D')$ donnés par $\varphi \to \varphi^-$ (voir la remarque 2). On a la propriété de permutation:

$$(20) \qquad (q\varphi)^- = q(\varphi^-), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\Sigma D)$$

et, en choisissant $\nu' = -\nu$, on peut prendre dans (18) et (18'): $\psi = \varphi^-$, $\Psi = \Phi^-$. Si $\varepsilon Q = -1$, $U' = \{x \in \operatorname{Spin} Q_0\colon \varrho(x)\varrho(x)^+ = 1\}$ et il en résulte deux opérateurs d'adjonction $\mathscr{S}(\Sigma D) \to \mathscr{S}(\Sigma D')$ $(\varphi \to \varphi^-)$, $\mathscr{S}(\Sigma' D) \to \mathscr{S}(\Sigma' D')$ $(\Phi \to \Phi^+)$. On a la propriété de permutation:

$$(20') \qquad (q\varphi)^+ = \varepsilon' q(\varphi^-), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\Sigma D), \qquad \varepsilon' \text{ scalaire}$$

et en choisissant $\nu' = \nu$, on peut prendre dans (18) et (18'): $\psi = \varphi^-$, $\Psi = \Phi^+$.

Supposons que Σ admette, pour n impair, une réduction du groupe structural $U = \{x \in \operatorname{Pin} Q\colon xx^- = 1\}$, cas où Σ' admet d'après (10'), (8'') et (9') une réduction de groupe structural U' défini ci-dessous. Si $\varepsilon Q = -1$, $U' = \{x \in \operatorname{Spin} Q_0\colon xx^- = 1\}$ et il en résulte deux opérateurs d'adjonction $\mathscr{S}(\Sigma D) \to \mathscr{S}(\Sigma D')$, $\mathscr{S}(\Sigma' D_0) \to \mathscr{S}(\Sigma' D_0')$ donnés par $\varphi \to \varphi^-$. On a la propriété de permutation (20) et en choisissant $\nu' = -\nu$, on peut prendre dans (18) et (18'): $\psi = \varphi^-$, $\Psi = \Phi^-$. Si $\varepsilon Q = 1$, $U' = \{x \in \operatorname{Spin} Q_0\colon xx^+ = 1\}$

([3]) Les opérateurs „+", „−" ont été introduits à la fin du paragraphe 1.

et il en résulte deux opérateurs d'adjonction $\mathscr{S}(\Sigma D)\to\mathscr{S}(\Sigma D_1')(\varphi\to\varphi^-)$, $\mathscr{S}(\Sigma' D_0)\to\mathscr{S}(\Sigma' D_0')$ $(\Phi\to\Phi^+)$. On a la propriété de permutation (20') et en choisissant $\nu' = \nu$, on peut prendre dans (18) et (18'): $\psi = \varphi^-$, $\Psi = \Phi^+$.

Remarque 8. Supposons que la métrique de M soit hyperbolique normale, c'est-à-dire que $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \ldots = -\varepsilon_n = 1$ dans (1). Alors la *condition de réduction ci-dessus s'exprime par l'existence d'une orientation temporelle sur M.* En effet, la transformation pseudoorthogonale $p(x)$, $x = x_1 \ldots x_k \in \mathrm{Pin}Q$ $(x_1, \ldots, x_k \in W)$ conserve l'orientation temporelle si et seulement si elle contient un nombre pair de symétries temporelles. D'autre part, $\varrho(x)\varrho(x)^- = (-1)^m$ resp. $xx^- = (-1)^m$, où m est le nombre des vecteurs temporels de la suite $(x_1, \ldots, x_k)$.

Travaux cités

[1] M. Atiyah, R. Bott et A. Shapiro, *Clifford moduls*, Topology 3, Suppl. 1 (1964), p. 3–38.

[2] C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*, New York 1954.

[3] A. Crumeyrolle, *Structures spinorielles*, Ann. Inst. H. Poincaré 11, 1 (1969), p. 19–55

[4] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Foundations of differential geometry I*, New York 1963.

[5] A. Lichnerowicz, *Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), p. 11–100.

[6] I. Popovici et A. Turtoi, *Generalized spinor structure*, Proc. Conf. Clifford algebra, its generalization and applications, Madras 1971, p. 97–113.

[7] S. Sasaki, *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J. 10 (1958), p. 338–354.

[8] M. A. Tonnelat, *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Paris 1965.

[9] K. Yano et S. Kobayashi, *Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles*, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), p. 194–210.

Reçu par la Rédaction le 24. 7. 1973