ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1963)

Sur les équations intégrales singulières dans l'espace résolubles par la méthode des approximations successives

par D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ (Warszawa)

1. Introduction. W. Pogorzelski [2] a démontré quelques propriétés importantes d'une intégrale singulière dans l'espace et il les a appliquées à la démonstration de l'existence de la solution d'une équation intégrale singulière dans l'espace. Nous résoudrons cette équation par la méthode des approximations successives, notamment par l'application du théorème du point invariant de Banach dans l'espace fonctionnel construit pour ce problème. Les résultats obtenus, fondés sur les propriétés démontrées par W. Pogorzelski, présentent une nouvelle application de la méthode donnée par l'auteur ([3] et [4]).

Pour généraliser les résultats aux systèmes d'équations il y a lieu de considérer des fonctions d'un espace, mais les propriétés établies par W. Pogorzelski sont évidemment vraies pour ces fonctions. C'est pourquoi nous ne donnerons pas leurs démonstrations, qui sont analogues à celles de W. Pogorzelski.

2. Notions et notations. Nous rappellerons d'abord quelques théorèmes de W. Pogorzelski [2] pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Soit E^n un espace euclidien à n dimensions. Soient $S_0, S_1, \ldots, S_p$ des surfaces de Liapounoff fermées, disjointes et telles que toutes les surfaces $S_1, \ldots, S_p$ soient situées à l'intérieur du domaine Ω_0 borné par la surface S_0. Désignons

$$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_p , \tag{1}$$

$$\Omega = \Omega_0 - (S_1 + \ldots + S_p) . \tag{2}$$

Soit X un espace de Banach donné. Soit $\mathfrak{H}_a^h$ l'ensemble des fonctions $u(x)$ appartenant à l'espace X, définies et continues dans le domaine Ω, qui satisfont aux inégalités:

$$\|u(x)\| \leqslant \frac{M}{|x - x_S|^a} , \tag{3}$$

$$\|u(x) - u(\widetilde{x})\| \leqslant \frac{k}{|x - x_S|^{a+h}} |x - \widetilde{x}|^h . \tag{4}$$

$\|u\|$ désigne la norme du point $u \in X$, $|x-\widetilde{x}|$ la distance euclidienne des points x et $\widetilde{x}$, x et $\widetilde{x}$ étant situés à l'intérieur de l'un des domaines bornés par les surfaces $S_0, S_1, \ldots, S_p$; x_S désigne le point de l'ensemble S, où la distance $|x-x_S|$ (por $x \in \Omega$ fixé arbitrairement) atteint sa borne inférieure. On peut admettre (sans restreindre la généralité), que

$$|x-x_S| \leqslant |\widetilde{x}-\widetilde{x}_S| .$$

Les constantes a et h satisfont aux inégalités:

$$(5) \qquad 0 < a < 1 , \quad 0 < h < 1 , \quad a+h < 1 .$$

Les constantes positives M, k sont arbitraires.

Nous désignons par $\mathfrak{H}_a^h(M, k)$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{H}_a^h$, les constantes M, k étant fixées.

Soit l'ensemble $\mathfrak{H}_a^{h,h_1}$ des fonctions $u(x, y)$ à valeurs de l'espace X, définies et continues pour $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, qui satisfont aux inégalités suivantes:

$$(6) \qquad \|u(x,y)\| \leqslant \frac{M}{|y-y_S|^a},$$

$$(7) \qquad \|u(x,y)-u(\widetilde{x},\widetilde{y})\| \leqslant \frac{k}{|y-y_S|^{a+h}} [|x-\widetilde{x}|^{h_1} + |y-\widetilde{y}|^h] ,$$

où les définitions sont les mêmes que dans le cas précédent et où l'on a posé

$$(8) \qquad 0 < h < h_1 \leqslant 1$$

et $|y-y_S| \leqslant |\widetilde{y}-\widetilde{y}_S|$.

Les constantes M, k étant fixées, nous désignons par $\mathfrak{H}_a^{h,h_1}(M, k)$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{H}_a^{h,h_1}$.

Soit $N(x)$ une fonction complexe définie par les propriétés suivantes:

$$(9) \qquad N(x) = |x|^{-n} K(x') , \quad \text{où} \quad x' = x/|x| ,$$

$$(10) \qquad \int_\omega K(x')dx' = 0$$

ω désignant la sphère unité $|x| = 1$, et la fonction $K(x)$ satisfait à la condition de Hölder suivante:

$$(11) \qquad |K(x')-K(y')| \leqslant k|x'-y'|^{h_\omega} \quad (0 < h_\omega < 1) .$$

Nous appellerons *valeur principale d'une intégrale au sens de Cauchy* (ou simplement *intégrale de Cauchy*) la limite

$$(12) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} N(x-y)u(y)dy ,$$

si cette limite existe (la fonction $u(y)$ est ici à valeurs de l'espace X, Ω_ε désignant l'ensemble des points: $|x-y| \leqslant \varepsilon$). Nous désignons cette limite par

$$\int_{\Omega} N(x-y)u(y)dy \, . \tag{12'}$$

THÉORÈME 1. *Si la fonction* $u(y) \in \mathfrak{H}_a^h$, *alors la limite* (12) *existe toujours et elle appartient à l'espace* X.

THÉORÈME 2. *Si la fonction* $u(y) \in \mathfrak{H}_a^h(M, k)$, *alors la fonction*

$$\hat{u}(x) = \int_{\Omega} N(x-y)u(y)dy \tag{13}$$

appartient à l'ensemble $\mathfrak{H}_a^h(C_1M + C_2k;\ C_3M + C_4k)$; *les constantes positives* C_1, C_2, C_3, C_4 *ne dépendent pas de la fonction* u ($h_\omega \geqslant h$, *voir la formule* (11)).

THÉORÈME 3. *Si la fonction* $u(x, y) \in \mathfrak{H}_a^{h,h_1}(M, k)$, *alors la fonction*

$$\hat{u}(x) = \int_{\Omega} N(x-y)u(x, y)dy \in \mathfrak{H}_a^h(C_1M + C_2k;\ C_3M + C_4k)$$

et les constantes positives C_1, C_2, C_3, C_4 *sont indépendantes de la fonction* u.

Les constantes a, h, h_1 étant fixées, on a évidemment

$$\mathfrak{H}_a^h \subset \mathfrak{H}_a^{h,h_1} \, . \tag{14}$$

Désignons pour toute fonction $u(x, y) \in \mathfrak{H}_a^{h,h_1}$

$$s(u) = \sup_{x,y \in \Omega} |y - y_S|^a \|u(x, y)\| \, , \tag{15}$$

$$h(u) = \sup_{x,y,\tilde{x},\tilde{y} \in \Omega} \frac{|y-y_S|^{a+h} \|u(x, y) - u(\tilde{x}, \tilde{y})\|}{|x-\tilde{x}|^{h_1} + |y-\tilde{y}|^h} \, . \tag{16}$$

Nous admettons dans l'ensemble $\mathfrak{H}_a^{h,h_1}$ la norme:

$$\|u\|_{\mathfrak{H}} = s(u) + h(u) \, . \tag{17}$$

L'ensamble $\mathfrak{H}_a^{h,h_1}$ est donc normé.

L'ensemble $\mathfrak{H}_a^h(M, k)$, dont la métrique est déterminée par la norme (17), est complet. Il en résulte qu'on peut appliquer dans l'ensemble $\mathfrak{H}_a^h(M, k)$ le théorème du point invariant de Banach:

Si dans un espace métrique et complet X, *la transformation* A *diminue pour tout couple* $x, y \in X$ *la distance* $\varrho(x, y)$ *avec la constante positive* $q < 1$:

$$\varrho(Ax, Ay) \leqslant q\varrho(x, y) \, , \tag{18}$$

alors il existe un point invariant unique de la transformation A

$$u = Au \tag{19}$$

qui est la limite de la suite des approximations successives (au sens de la métrique)

(20) $$u = \lim_n Au_n\,, \quad \text{où} \quad u_n = Au_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

u_0 *étant un élément arbitrairement fixé de l'espace* X.

Remarquons enfin qu'on peut, d'après les définitions (15) et (16), énoncer les théorèmes 2 et 3 comme il suit:

Théorème 2. *Si* $u \in \mathfrak{H}_a^h$, *alors* $\hat{u} \in \mathfrak{H}_a^h$ *et*

(21) $$s(\hat{u}) \leqslant C_1 s(u) + C_2 h(u)\,,$$

(21) $$h(\hat{u}) \leqslant C_3 s(u) + C_4 h(u)\,,$$

les constantes positives C_1, C_2, C_3, C_4 *ne dépendant pas de la fonction* u.

Théorème 3. *Si* $u \in \mathfrak{H}_a^{h,h_1}$, *alors* $\hat{u} \in \mathfrak{H}_a^h$ *et*

(22) $$s(\hat{u}) \leqslant C_1 s(u) + C_2 h(u)\,,$$

(23) $$h(\hat{u}) \leqslant C_3 s(u) + C_4 h(u)\,,$$

les constantes positives C_1, C_2, C_3, C_4 *ne dépendant pas de la fonction* u.

3. Opérations de la classe $\mathcal{H}_a^h$. Définissons une classe $\mathcal{H}_a^h$ d'opérations par un procédé analogue à celui des travaux [3] et [4].

L'opération $F(x, y, u) \in X$ est déterminée pour $x, y \in \Omega$, $u \in X$ (X est un espace de Banach), appartient à la classe $\mathcal{H}_a^h$, si

(24) $$F(x, y, u_1) - F(x, y, u_2) = F_1(x, y, u_1, u_2)[F_2(u_1 - u_2)]\,,$$

où:

1. L'opération F_2 transforme l'espace X en lui-même.
2. $F_2(0) = 0$.
3. F_2 satisfait à la condition de Lipschitz:

(25) $$\|F_2(u) - F_2(\tilde{u})\| \leqslant k_2 \|u - \tilde{u}\|\,.$$

4. L'opération $F_1(x, y, u_1, u_2)[u]$ est linéaire pour x, y, u_1, u_2 fixés ($u \in X$) et transforme l'espace X en lui-même.

5. F_1 satisfait aux conditions suivantes:

(26) $$\|F_1(x, y, u_1, u_2)\|_{X\to X} \leqslant M_1 + M_1' |y - y_S|^a [\|u_1\| + \|u_2\|]\,,$$

(27) $$\|F_1(x, y, u_1, u_2) - F_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\|_{X\to X}$$
$$\leqslant k_1 \frac{|x - \tilde{x}|^{h_1} + |y - \tilde{y}|^h}{|y - y_S|^h} + M_1' |y - y_S|^a [\|u_1 - u_1\| + \|u_2 - u_2\|]$$

où les constantes positives a, h, h_1 sont soumises aux inégalités (5), (8), $\|F\|_{X\to X}$ désigne la norme de l'opération linéaire F (dans l'espace des opérations linéaires transformant l'espace X en lui-même).

Remarquons, d'après les propriétés (2) et (3), qu'on a

(28) $$\|F_2(u)\| \leqslant k_2\|u\|.$$

Désignons

$$\mathcal{F}u = F(x, y, u).$$

THÉORÈME 4. *Chaque opération $F(x, y, u) \in \mathcal{H}_a^h$, satisfait sur l'ensemble $\mathfrak{H}_a^h(M, k)$ aux conditions suivantes*:

(29) $$s(\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2) \leqslant a_1 s(u_1 - u_2),$$

(29′) $$h(\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2) \leqslant a_2 s(u_1 - u_2) + a_1 h(u_1 - u_2)$$

où

(29″) $$a_1 = k_2(M_1 + 2M_1' M), \quad a_2 = k_2(k_1 + 2M_1' k).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F}u = F(x, y, u)$ une opération de la classe $\mathcal{H}_a^h$. Nous pouvons écrire

(30) $$\begin{aligned}\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\| &= \|F_1(x, y, u_1, u_2)[F_2(u_1 - u_2)]\| \\ &\leqslant \|F_1(x, y, u_1, u_2)\|_{X\to X}\|F_2(u_1 - u_2)\| \\ &\leqslant \{M_1 + M_1'|y - y_S|^a[\|u_1\| + \|u_2\|]\}k_2\|u_1 - u_2\|,\end{aligned}$$

(31) $$\begin{aligned}&\|(\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2) - (\mathcal{F}\tilde{u}_1 - \mathcal{F}\tilde{u}_2)\| \\ &= \|F_1(x, y, u_1, u_2)[F_2(u_1 - u_2)] - F_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)[F_2(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)]\| \\ &\leqslant \|F_1(x, y, u_1, u_2) - F_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\|_{X\to X}\|F_2(u_1 - u_2)\| + \\ &\quad + \|F_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\|\|F_2(u_1 - u_2) - F_2(u_1 - u_2)\| \\ &\leqslant \left\{\frac{k_1}{|y - y_S|^h}(|x - \tilde{x}|^{h_1} + |y - \tilde{y}|^h) + M_1'|y - y_S|^a[\|u_1 - \tilde{u}_1\| + \|u_2 - \tilde{u}_2\|]\right\}k_2\|u_1 - u_2\| + \\ &\quad + \{M_1 + M_1'|y - y_S|^a[\|u_1\| + \|u_2\|]\}k_2\|(u_1 - u_2) - (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)\|.\end{aligned}$$

Si $u_1, u_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \mathfrak{H}_a^h(M, k)$, nous avons les inégalités suivantes:

(32) $$\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\| \leqslant [M_1 + 2M_1' M]k_2\|u_1 - u_2\|,$$

(33) $$\begin{aligned}&\|(\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2) - (\mathcal{F}\tilde{u}_1 - \mathcal{F}\tilde{u}_2)\| \\ &\qquad \leqslant (k_1 + 2M_1' k)\frac{|x - \tilde{x}|^{h_1} + |y - \tilde{y}|^h}{|y - y_S|^{a+h}} k_2\|u_1 - u_2\| \cdot |y - y_S|^a + \\ &\qquad + (M_1 + 2M_1' M)k_2\|(u_1 - u_2) - (\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)\|.\end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2 \in \mathfrak{H}_a^h$ et les formules (29), (29′), (29″) sont donc vraies.

THÉORÈME 5. *Si l'opération $F(x, y, u)$, qui dépend des paramètres $x, y \in \Omega$, admet une différentielle $dF_{x,y,u}$ (au sens de Fréchet) satisfaisant à la condition suivante*:

(34) $$\|dF_{x,y,u} - dF_{\tilde{x},\tilde{y},\tilde{u}}\|_{X\to X} \leqslant c\,\frac{|x - \tilde{x}|^{h_1} + |y - \tilde{y}|^h}{|y - y_S|^{a+h}} + c'|y - y_S|^a\|u - \tilde{u}\|$$

(où les constantes positives a, h_1, h *satisfont aux inégalités* (5), (8)), *alors* $F \in \mathcal{H}_a^h$ *et*

$$F_1(x, y, u_1, u_2) = \int_0^1 dF_{x,y,u_2+\sigma(u_1-u_2)}d\sigma\,, \qquad F_2(u) = u\,. \tag{35}$$

La démonstration résulte immédiatement du théorème d'Hadamard (voir [3], p. 249 et 263).

THÉORÈME 6. *Si l'opération* $F(x, y, u)$ *appartient à la classe* $\mathcal{H}_a^h$ *et s'il existe pour chaque* $v \in X$ *(suffisamment petit), une suite de nombres positifs* $r_j \to 0$ *telle que la limite*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{F_2(r_j v)}{r_j} < +\infty \tag{*}$$

existe, alors la différentielle $dF_{x,y,u}$ *(au sens de Fréchet) existe et elle satisfait à la condition* (34).

La démonstration de l'existence d'une différentielle dF est analogue à celle du théorème 17 dans le travail [3], p. 263. Il résulte, d'après le même travail (p. 265-266), que l'hypothèse (*) sur les opérations $F \in \mathcal{H}_a^h$ ne peut être omise que dans un espace à un nombre fini de dimensions.

4. Solution du problème. THÉORÈME 7. *Admettons les hypothèses suivantes*:

1. *La fonction complexe* $N(x)$ *satisfait aux conditions* (9), (10), (11).

2. *L'opération* $F(x, y, u)$ *de l'espace* X, *déterminée et continue pour* $x, y \in \Omega$, $u \in X$, *satisfait aux conditions suivantes*

$$\|F(x, y, u)\| \leqslant \frac{M_F}{|y-y_S|^a} + M'_F\|u\|\,, \tag{36}$$

$$\|F(x, y, u) - F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u})\| \leqslant \frac{k_F}{|y-y_S|^{a+h}}\,[|x-\tilde{x}|^{h_1} + |y-\tilde{y}|^h] + M'_F\|u-\tilde{u}\|\,, \tag{37}$$

où les constantes positives a, h, h_1 *satisfont aux inégalités* (5), (8), $h_\omega \geqslant h$ *(théorème 2); en outre l'opération* $F(x, y, u) \in \mathfrak{H}_a^h$.

3. *La fonction* $f(x) \in \mathfrak{H}_a^h(M_f, k_f)$.

Sous ces hypothèses l'équation intégrale singulière

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega N(x-y)F[x, y, u(y)]dy \tag{38}$$

admet une solution unique

$$u(x) \in \mathfrak{H}_a^h(M, k)\,, \qquad \text{où} \qquad M > M_f\,, \qquad k > k_f$$

pour les valeurs du paramètre complexe λ satisfaisant à l'inégalité

(39) $$|\lambda| < \lambda^*(M, k)$$

où

(40) $$\lambda^*(M, k) = \min[\lambda_1^*(M, k), \lambda_2^*(M, k), \lambda_3^*(M, k)]$$

et

(41) $$\lambda_1^*(M, k) = \frac{M - M_f}{C_1(M_F + M_F' M) + C_2(k_F + M_F' k)},$$

(42) $$\lambda_2^*(M, k) = \frac{k - k_f}{C_3(M_F + M_F' M) + C_4(k_F + M_F' k)},$$

(43) $$\lambda_3^*(M, k) = 1/\max[(C_1 + C_3)a_1 + (C_2 + C_4)a_2;\ (C_2 + C_4)a_1],$$

(44) $$a_1 = k_2(M_1 + 2M_1' M), \qquad a_2 = k_2(k_1 + 2M_1' k);$$

les constantes k_1, k_2, M_1, M_1' sont déterminées par la définition de la classe $\mathcal{H}_a^h$, les constantes C_1, C_2, C_3, C_4 sont indépendantes de la fonction u.

Démonstration. Soit $u(x) \in \mathfrak{H}_a^h(M, k)$. En vertu des inégalités (36), (37) nous pouvons écrire

$$\|F(x, y, u(y))\| \leqslant \frac{M_F + M_F' M}{|y - y_S|^a},$$

$$\|F(x, y, u(y)) - F(\tilde{x}, \tilde{y}, u(\tilde{y}))\| \leqslant \frac{k_F + M_F' k}{|y - y_S|^{a+h}}[|x - \tilde{x}|^{h_1} + |y - \tilde{y}|^h]$$

d'où il suit que la fonction $F(x, y, u(y)) \in \mathfrak{H}_a^{h,h_1}$ et que

(45) $$s[F(x, y, u(y))] \leqslant M_F + M_F' M,$$

(46) $$h[F(x, y, u(y))] \leqslant k_F + M_F' k.$$

Il résulte du théorème 3' que la fonction

(47) $$\hat{u}(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega N(x - y) F(x, y, u(y))\, dy$$

appartient à la classe $\mathfrak{H}_a^h$ et

(48) $$s(\hat{u}) \leqslant M_f + |\lambda|[C_1(M_F + M_F' M) + C_2(k_F + M_F' k)],$$

(49) $$h(\hat{u}) \leqslant k_f + |\lambda|[C_3(M_F + M_F' M) + C_4(k_F + M_F' k)]$$

où les constantes positives C_1, C_2, C_3, C_4 sont indépendantes de la fonction u. Alors pour les valeurs du paramètre λ satisfaisant à l'inégalité

(50) $$|\lambda| \leqslant \lambda_1^{**}(M, k)$$

où

(50') $$\lambda_1^{**}(M, k) = \min[\lambda_1^*(M, k), \lambda_2^*(M, k)]$$

(les nombres positifs λ_1^*, λ_2^* sont définis par les formules (41) et (42)), la fonction $u(x)$ appartient à la classe donnée $\mathfrak{H}_a^h(M, k)$.

L'opération $F(x, y, u)$ appartient, en vertu des hypothèses 2, à la classe $\mathcal{H}_a^h$. En désignant

$$\hat{u}_i(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega N(x-y)F[x, y, u_i(y)]dy \qquad (i = 1, 2, \dots) \tag{51}$$

et en admettant $u_i \in \mathfrak{H}_a^h(M, k)$, nous obtenons, en vertu des théorèmes 4, 3',

$$\begin{aligned} s(\hat{u}_1 - \hat{u}_2) &\leqslant C_1 s(\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2) + C_2 h(\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2) \\ &\leqslant (C_1 a_1 + C_2 a_2) s(u_1 - u_2) + C_2 a_1 h(u_1 - u_2), \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} h(\hat{u}_1 - \hat{u}_2) &= C_3 s(\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2) + C_4 h(\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2) \\ &\leqslant (C_3 a_1 + C_4 a_2) s(u_1 - u_2) + C_4 a_1 h(u_1 - u_2) \end{aligned} \tag{53}$$

où a_1, a_2 sont définies par les formules (44).

Alors, pour les valeurs du paramètre λ, satisfaisant à l'inégalité

$$|\lambda| \leqslant \lambda_3^*(M, k) \tag{54}$$

(λ_3^* est définie par l'égalité (43)), nous avons l'inégalité

$$\|\hat{u}_1 - \hat{u}_2\|_{\mathfrak{H}} < q\|u_1 - u_2\|_{\mathfrak{H}}, \qquad \text{où} \qquad 0 < q < 1.$$

Nous obtenons ainsi, en vertu du théorème du point invariant de Banach (p. 291), pour les valeurs du paramètre λ qui satisfont à la condition (39), une solution unique $u \in \mathfrak{H}_a^h(M, k)$ de l'équation (38). Cette solution est la limite au sens de la norme dans l'ensemble $\mathfrak{H}_a^h$ de la suite des fonctions $u_n(x)$:

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega N(x-y)F\big(x, y, u_{n-1}(y)\big)dy \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

(u_0 est une fonction arbitraire, appartenant à l'ensemble $\mathfrak{H}_a^h(M, k)$).

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du théorème* 7, *l'équation* (38) *admet une solution unique* $u(x) \in \mathfrak{H}_a^h(M, k)$ *pour les valeurs du paramètre qui satisfont à l'inégalité*:

$$|\lambda| < \lambda^{**}(M, k) \tag{55}$$

où

$$\lambda^{**}(M, k) = \min[\lambda_3^*(M, k), \lambda_4^*], \tag{56}$$

$$\lambda_4^* = \frac{2}{M_F'(C^* + C_1 + C_4)}, \tag{56'}$$

$$C^* = \sqrt{(C_1 - C_4)^2 + 2C_2C_3} \tag{56''}$$

et $\lambda_3^*(M, k)$ *est déterminé par la formule* (43), λ_4^* *ne dépend pas de* M *et* k.

Démonstration. Considérons les formules (50), (50'). Soit un positif M, fixé pour l'instant. Nous obtiendrons la valeur la plus avantageuse du nombre $\lambda_1^{**}(M, k)$ en supposant

$$\lambda_1^*(M, k) = \lambda_2^*(M, k) \tag{57}$$

(λ_1^* est une fonction décroissante de k, λ_2^* est une fonction croissante). La dernière égalité est équivalente à l'équation qui suit:

$$a(M)k^2 + b(M)k + c(M) = 0 . \tag{58}$$

Cette équation a une racine positive $k_0(M)$. On peut facilement calculer que

$$\lim_{M\to\infty} \frac{k_0(M - k_f)}{M - M_f} = \frac{C^* - (C_1 - C_4)}{2C_2} \tag{59}$$

d'où résultent

$$\begin{gathered} \lambda_1^*[M, k_0(M)] = \lambda_2^*[M, k_0(M)] = \lambda_1^{**}[M, k_0(M)] , \\ \lim_{M\to\infty} \lambda_1^{**}[M, k_0(M)] = \lambda_4^* \end{gathered} \tag{60}$$

et, enfin, le corollaire en question.

5. Remarque sur l'équation linéaire. L'équation (38) est linéaire, si l'opération $F(x, y, u)$ est linéaire par rapport à u, donc si elle est de la forme suivante:

$$F(x, y, u) = G(x, y)u \tag{61}$$

où l'opérations G qui dépend des paramètres x, y, est linéaire.

Nous ne savons pas résoudre cette équation pour toute valeur du paramètre λ, mais en nous appuyant sur les considérations précédentes, nous obtenons, pour les valeurs du paramètre λ suffisamments petites, le théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Admettons les hypothèses suivantes*:

1. *La fonction complexe $N(x)$ satisfait aux conditions* (9), (10), (11).

2. *L'opération linéaire $G(x, y)$ déterminée pour $x, y \in \Omega$ et transformant l'espace X en lui-même, satisfait aux conditions suivantes*:

$$\|G(x, y)\|_{X\to X} \leqslant M_G , \tag{62}$$

$$\|G(x, y) - G(\widetilde{x}, \widetilde{y})\|_{X\to X} \leqslant \frac{k_G}{|y - y_S|^h}[|x - \widetilde{x}|^{h_1} + |y - \widetilde{y}|^h] , \tag{63}$$

où les constantes positives h, h_1 satisfont à l'inégalité:

$$0 < h < h_1 \leqslant 1 , \quad h_\omega \geqslant h .$$

3. *La fonction* $f(x) \in \mathfrak{H}_a^h(M_f, k_f)$, *où* $0 < a < 1-h$.

Sous ces hypothèses l'équation intégrale singulière

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega N(x-y) G(x, y) u(y) dy \tag{64}$$

admet une solution unique

$$u(x) \in \mathfrak{H}_a^h(M, k) \qquad (M > M_f,\ k > k_f)$$

pour les valeurs du paramètre λ *qui satisfont à l'inégalité*:

$$|\lambda| < \min[C^{**}, \lambda_5^*(M, k); \lambda_6^*(M, k)] \tag{65}$$

où

$$C^{**} = \min\left[\frac{1}{(C_2+C_4)M_G} \cdot \frac{1}{(C_1+C_3)M_G+(C_2+C_4)k_G}\right], \tag{66}$$

$$\lambda_5^*(M, k) = \frac{M-M_f}{(C_1 M_G + C_2 k_G) M + C_2 M_G k}, \tag{66'}$$

$$\lambda_6^*(M, k) = \frac{k-k_f}{(C_3 M_G + C_4 k_G) M + C_4 M_G k}. \tag{66''}$$

Démonstration. Remarquons que, d'après la formule (61), nous avons pour toute fonction $u(x) \in \mathfrak{H}_a^h(M, k)$

$$\|F(x, y, u)\| \leqslant \|G(x, y)\|_{X\to X}\|u\| \leqslant M_G\|u\|,$$

$$\begin{aligned}\|F(x, y, u) - F(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{u})\| &\leqslant \|[G(x, y) - G(\widetilde{x}, \widetilde{y})]\|\,\|u\| + \|G(\widetilde{x}, \widetilde{y})(u-\widetilde{u})\| \\ &\leqslant \frac{k_G\|u\|}{|y-y_S|^h}[|x-\widetilde{x}|^{h_1} + |y-\widetilde{y}|^h] + M_G\|u-\widetilde{u}\| \\ &\leqslant \frac{k_G M}{|y-y_S|^{a+h}}[|x-\widetilde{x}|^{h_1} + |y-\widetilde{y}|^h] + M_G\|u-\widetilde{u}\|\end{aligned}$$

d'où

$$M_F = 0, \qquad M'_F = M_G, \qquad k_F = k_G M. \tag{67}$$

En outre, d'après l'égalité

$$F(x, y, u_1) - F(x, y, u_2) = G(x, y)(u_1 - u_2) \tag{68}$$

l'opération $F(x, y, u) \in \mathcal{H}_a^h$ et

$$F_1(x, y, u_1, u_2) = G(x, y) \quad (\text{pour toutes } u_1, u_2), \qquad F_2(u) = u \tag{69}$$

enfin, nous avons

$$M_1 = M_G, \qquad M'_1 = 0, \qquad k_1 = k_G, \qquad k_2 = 1. \tag{70}$$

Il en résulte, d'après le théorème 7, la conclusion du théorème 8.

Remarquons que l'inégalité obtenue par la limitation de la norme de l'opération linéaire

$$\mathcal{N}u = \int_\Omega N(x-y)G(x,y)u(y)dy$$

fait correspondre au paramètre λ un intervalle plus petit que la limitation (65).

Remarquons en outre, que nous avons, en vertu du corollaire 1:

COROLLAIRE 2. *Sous les hypothèses du théorème* 8, *l'équation* (64) *admet une solution unique*:

$$u(x) \in \mathfrak{H}_a^h$$

si les valeurs du paramètre λ *satisfont à l'inégalité*:

$$|\lambda| < \min[C^{**}, 2/M_G(C^* + C_1 + C_4)] \tag{71}$$

où la constante C^{**} *est définie par la formule* (66).

Démonstration. Nous obtenons l'inégalité (71) de la même manière que l'inégalité (56). L'inégalité (71) ne dépend pas de M et k, ces constantes peuvent être arbitraires.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Sur une classe de fonctions discontinues et une intégrale singulière dans l'espace*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. 8 (1960), p. 445-451.

[2] — *О свойствах сингулярного интеграла в пространстве и их применении к одной системе сингулярных интегральных уравнений*, Проблемы Механики сплошной среды, Издательство А.Н. СССР, Москва 1961, p. 288-301.

[3] D. Przeworska-Rolewicz, *Sur les systèmes d'équations intégrales pour les lignes fermées*, Studia Math. 18 (1959), p. 247-248.

[4] — *Étude des systèmes d'équations intégrales singulières pour les arcs non fermés par la méthode des approximations successives*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. 6 (1958), p. 697-703.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 7. 1. 1961