ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

Sur un théorème de la géométrie différentielle globale

par S. GOŁĄB (Kraków)

Etant donné dans l'espace euclidien R_3 une surface S fermée orientable de classe C^2 on a, en désignant par $\mathcal{K}$ la courbure de Gauss, la formule

$$\iint_S \mathcal{K} dS = 4\pi(1-p)\,, \tag{1}$$

où p est le genre de S. Pour les surfaces qui sont topologiquement équivalentes à la sphère on a $p = 0$ et la formule précédente se réduit à la suivante:

$$\iint_S \mathcal{K} dS = 4\pi\,. \tag{2}$$

Si nous désignons par $\mathcal{H}$ la courbure moyenne de S, alors, comme l'a montré H. Minkowski, l'intégrale

$$\iint_S \mathcal{H} dS \tag{3}$$

représente, sous une hypothèse convenable concernant le signe, à un facteur constant près, la distance moyenne des plans tangents à S à un point situé à l'intérieur de S. Si le diamètre de S augmente à l'infini, alors l'intégrale (3) se comporte de façon analogue, ce qui peut être vérifié par l'exemple d'une sphère. Il n'existe, par conséquent, aucune borne supérieure fixe pour l'intégrale (3). On peut cependant chercher une majoration de l'intégrale (3) au moyen du diamètre de S. En plaçant l'origine des coordonnées O au milieu du segment réalisant le diamètre D on obtient facilement que la distance de tout point P de S au point O est au plus égale à $D\cdot\sqrt{3}/2$, donc la distance de O au plan tangent à S au point P est $\leqslant D\cdot\sqrt{3}/2$. La distance moyenne M vérifie aussi l'inégalité $M \leqslant D\cdot\sqrt{3}/2$ et, par conséquent, nous avons

$$\iint_S \mathcal{H} dS = 4\pi M \leqslant 4\pi D\cdot\sqrt{3}/2 = 2\pi\sqrt{3}\,D\,. \tag{4}$$

Bien entendu, cette évaluation n'est pas exacte.

En désignant par $\varkappa_1, \varkappa_2$ les courbures (algébriques) des sections normales suivant les directions principales, on a les formules

$$\mathcal{K} = \varkappa_1 \cdot \varkappa_2 , \quad \mathcal{H} = (\varkappa_1 + \varkappa_2)/2 . \tag{5}$$

La question se pose d'évaluer les intégrales

$$I_i = \iint\limits_S \varkappa_i dS \quad (i = 1, 2) . \tag{6}$$

Cependant une difficulté fondamentale consiste à donner pour les courbures $\varkappa_i$ une définition univoque, présentant un caractère intrinsèque et non accidentel. La définition

$$\varkappa_1 = \min(\varkappa_1, \varkappa_2) , \quad \varkappa_2 = \max(\varkappa_1, \varkappa_2) , \tag{7}$$

la plus simple du point de vue analytique, ne serait pas utile ici. La détermination du numérotage des $\varkappa_1, \varkappa_2$ en un point fixé qui n'est pas un ombilic peut être prolongée d'une façon univoque seulement sur un domaine qui ne contient aucun ombilic, donc pas à toute la surface fermée S qui contient certainement des ombilics.

Tenant compte de ces difficultés de détermination des fonctions $\varkappa_1(P)$, $\varkappa_2(P)$ sur toute la surface fermée S, nous nous occuperons dans ce travail des surfaces fermées de révolution de genre zéro pour lesquelles la définition univoque des fonctions $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ ne présente aucune difficulté. Nous adoptons notamment la définition suivante:

$$\begin{aligned} &\varkappa_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \text{courbure normale dans le sens du parallèle,} \\ &\varkappa_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \text{courbure normale dans le sens du méridien.} \end{aligned} \tag{8}$$

La définition (8) ne se confond pas en général avec la définition (7).

Il est bien connu que le signe de la courbure moyenne $\mathcal{H}$ (contrairement à $\mathcal{K}$) dépend de l'orientation de la surface S. Nous établirons une paramétrisation de S telle que le vecteur normal N soit dirigé à l'intérieur de la surface S. Dans ce but nous prendrons l'axe des x_3 pour axe de révolution. L'hypothèse que la surface S est de genre zéro implique que le méridien est un arc simple de Jordan, dont les extrémités sont situées sur l'axe de révolution. Pour premier paramètre u nous prenons la longeur d'arc du méridien comptée à partir du pôle méridional, le secod paramètre v sera la longitude et le méridien nul sera celui qui est contenu dans le demi-plan x_1, x_3 $(x_1 \geqslant 0)$. Bien entendu, l'angle v est compté conformément à l'orientation du plan (x_1, x_2). Dans ces hypothèses les équations paramétriques de notre surface S peuvent être mises sous la forme

$$x_1 = \varphi(u)\cos v , \quad x_2 = \varphi(u)\sin v , \quad x_3 = \psi(u) \tag{9}$$

où, en désignant par L la longueur du méridien, on a les relations suivantes

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0\,, \tag{10}$$

$$\varphi'^2(u) + \psi'^2(u) \equiv 1\,, \tag{11}$$

$$\varphi'(0) = 1\,, \quad \varphi'(L) = -1\,, \tag{12}$$

$$\psi'(0) = \psi'(L) = 0\,, \tag{13}$$

$$\psi(L) > \psi(0)\,. \tag{14}$$

Les relations (12) et (13) découlent de l'hypothèse que S admet un plan tangent aussi aux pôles, nécessairement perpendiculaire à l'axe de révolution. Comme les fonctions φ et ψ ne dépendent que de la variable u, nous omettrons dans la suite le symbole de la variable indépendante. Les courbures $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$ s'expriment (sauf aux pôles) par les formules

$$\mathcal{K} = \frac{\psi'(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')}{\varphi} = \frac{\psi'\Delta}{\varphi}\,, \tag{15}$$

$$\mathcal{H} = \frac{\psi' + \varphi(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')}{2\varphi} = \frac{\psi' + \varphi\Delta}{2\varphi}\,, \tag{16}$$

$$\Delta = \varphi'\psi'' - \psi'\varphi''\,. \tag{17}$$

Remarquons que Δ représente la courbure (algébrique) du méridien. Les courbures principales $\varkappa_1, \varkappa_2$ sont racines de l'équation

$$\varkappa^2 - 2\mathcal{H}\varkappa + \mathcal{K} = 0\,. \tag{18}$$

En tenant compte des relations (15) et (16) nous obtenons pour $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{\psi' + \varphi\Delta + \varepsilon(\psi' - \varphi\Delta)}{2\varphi}\,, \qquad \varepsilon = \pm 1\,, \tag{19}$$

donc les deux valeurs suivantes

$$\psi'/\varphi\,, \qquad \Delta\,.$$

Comme Δ est la courbure du méridien, nous obtenons conformément à la définition

$$\varkappa_1 = \psi'/\varphi\,, \qquad \varkappa_2 = \Delta\,. \tag{20}$$

Mais

$$dS = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv = \sqrt{\varphi^2}\,du\,dv = \varphi\,du\,dv\,. \tag{21}$$

Nous avons supposé que le méridien nul, d'équations

$$x_1 = \varphi(u)\,, \qquad x_3 = \psi(u)\,,$$

est situé du côté positif de l'axe des x_1, donc

$$\varphi(u) \geqslant 0\,, \tag{22}$$

Nous avons, par conséquent,

$$I_1 = \iint_S \varkappa_1 dS = \iint_R \psi'(u)\,du\,dv\,, \tag{23}$$

$$I_2 = \iint_S \varkappa_2 dS = \iint_R \Delta(u)\varphi(u)\,du\,dv\,, \tag{24}$$

où R est le rectangle défini par les inégalités

$$0 \leqslant u \leqslant L\,, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\,. \tag{25}$$

L'intégrale (23) est facile à calculer. Nous avons notamment

$$\iint_R \psi'(u)\,du\,dv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^L \psi'(u)\,du = 2\pi \int_0^L \psi'(u)\,du = 2\pi[\psi(L) - \psi(0)]\,.$$

En désigant par h la distance des pôles ou la largeur de S dans le sens de l'axe de révolution nous avons

$$h = \psi(L) - \psi(0) \tag{26}$$

et on obtient finalement pour I_1 la simple formule suivante:

$$I_1 = 2\pi h\,. \tag{27}$$

L'intégrale I_1 est donc proportionnelle à la distance des pôles et toujours positive.

Pour l'intégrale I_1 nous allons trouver des bornes supérieure et inférieure. Nous avons

$$I_2 = 2\pi \int_0^L \varphi(u)\Delta(u)\,du \tag{28}$$

et la valeur I_2 peut être négative, puisque $\varphi \geqslant 0$, mais Δ représente une quantité algébrique.

Si nous supposons que S est une surface convexe, le méridien sera aussi une courbe convexe et nous aurons

$$\Delta \geqslant 0\,. \tag{29}$$

Dans ce cas l'intégrale I_2 sera positive. Nous trouverons sa borne supérieure en désignant par s la largeur de la section axiale de S, c'est-à-dire le diamètre du cylindre vertical circonscrit à S. Dans ce cas nous avons

$$s/2 = \max \varphi(u) \tag{30}$$

et, comme $\varphi \geqslant 0$, $\Delta \geqslant 0$, on peut écrire

$$I_2 = 2\pi \int_0^L \varphi\Delta\,du \leqslant 2\pi \int_0^L \Delta \cdot \max\varphi\,du = \pi s \int_0^L \Delta(u)\,du\,.$$

Mais d'autre part, on a

$$\Delta = d\Theta/du\ ,$$

si Θ est l'angle entre la tangente orientée du méridien et l'axe des x_1. En égard à la convexité du méridien on a

$$\int_0^L \Delta(u)\,du = \int_0^L \frac{d\Theta}{du}\,du = \Theta(L)-\Theta(0) = \pi\ ,$$

d'où l'on tire l'évaluation suivante

$$I_2 \leqslant \pi^2 s\ . \tag{31}$$

L'inégalité précédente peut être remplacée par une inégalité forte puisque le méridien est de classe C^2 et, par conséquent, il existe des valeurs $u < u_0$ $(\varphi(u_0) = s/2)$ pour lesquelles $\Delta > 0$. Nous avons donc

$$I_2 < \pi^2 s\ . \tag{32}$$

Cette évaluation est inexacte pour la sphère. Pour la sphère on a notamment

$$I_2 = 4R\pi$$

et l'erreur est 57%. Cette évaluation est, d'autre part, exacte en ce sens que pour tout nombre positif ε il existe une surface de révolution telle que

$$I_2 = \pi^2 s - \varepsilon\ .$$

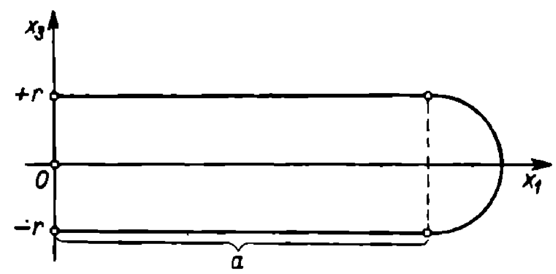

Fig. 1

Nous allons construire un exemple d'une telle surface dont le méridien est de classe C^2 par morceaux (Δ aura deux discontinuités; ce fait ne jouera ici aucun rôle, car il s'agit de l'intégrale dont un des facteurs sous le signe de l'intégrale est Δ). Supposons le méridien composé de deux segments de longueur a, parallèles à l'axe des x_1 et de la demi-circonférence de diamètre $2r = h$, comme le montre la figure 1. Alors

$$\int_0^L \varphi\Delta\,du = \int_0^a \varphi\Delta\,du + \int_a^{a+r\pi} \varphi\Delta\,du + \int_{a+r\pi}^{2a+r\pi} \varphi\Delta\,du\ .$$

La première et troisième intégrale du second membre sont nulles, car $\Delta = 0$ dans les intervalles correspondants. Il reste donc

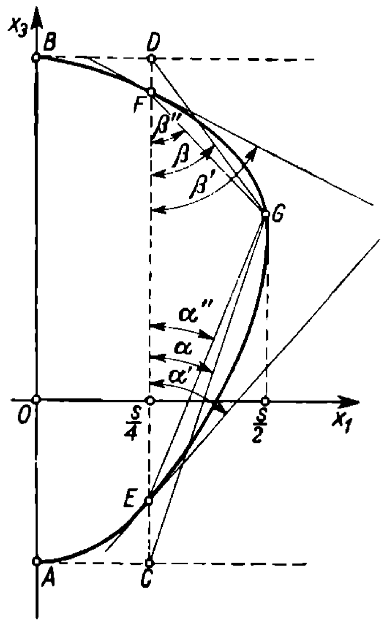

Fig. 2

$$\int_a^{a+r\pi} \varphi\Delta\, du = \frac{1}{r}\int_a^{a+r\pi} \varphi\, du\,.$$

Cette dernière intégrale est facile à calculer. Elle est égale à $a\pi r + 2r^2$. Nous avons ainsi

$$I_2 = 2\pi \int_0^L \varphi\Delta\, du = 2\pi(a\pi + 2r)$$
$$= \pi^2(s-2r) + 4\pi r\,.$$

Il est évident que a étant fixé, si nous faisons tendre r vers zéro nous aurons

$$I_2 \to \pi^2 s\,,$$

ce qui démontre notre conclusion.

Passons au calcul qui nous permettra d'obtenir la borne inférieure de l'intégrale I_2. Désignons, comme auparavant, par u_0 la valeur pour laquelle on a

$$\varphi(u_0) = s/2 = \max\varphi(u)$$

et soit

$$\mu \overset{\text{df}}{=} \frac{\psi(u_0)-\psi(0)}{\psi(L)-\psi(0)}\,.$$

Comme

$$\psi(0) < \psi(u_0) < \psi(L)\,,$$

nous avons

$$0 < \mu < 1\,. \tag{33}$$

Considérons la figure 2; traçons dans le plan (x_1, x_3) la droite $x_1 = s/4$ et désignons par A, B, C, D, G respectivement les points $A[0,\psi(0)]$, $B[0,\psi(L)]$, $C[s/4,\psi(0)]$, $D[s/4,\psi(L)]$, $G[s/2,\psi(u_0)]$. La droite $x_1 = s/4$ coupera le méridien convexe en deux points $E[s/4,\psi(u_1)]$, $F[s/4,\psi(u_2)]$, où $u_1 < u_0 < u_2$. Désignons ensuite par α, β les angles entre les vecteurs $\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CD}$ resp. $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DC}$. Désignons enfin par α', β' respectivement les angles contenus entre les tangentes au méridien aux points E resp. F et la droite CD, et par α'', β'' les angles analogues entre les vecteurs $\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FC}$. Des considérations géométriques élémentaires donnent les inégalités

$$\alpha'' > \alpha\,, \quad \beta'' > \beta\,.$$

Le méridien étant convexe, on conclut

$$\alpha' > \alpha'' , \quad \beta' > \beta'' .$$

Par conséquent

$$\alpha' > \alpha , \quad \beta' > \beta . \tag{34}$$

La variation totale de l'angle de la tangente au méridien le long de l'arc $\breve{EF}$ est égale à $\alpha' + \beta'$. Cette variation est d'autre part égale à

$$\alpha' + \beta' = \int_{u_1}^{u_2} \Delta du . \tag{35}$$

Des inégalités (34) on tire

$$\int_{u_1}^{u_2} \Delta du > \alpha + \beta . \tag{36}$$

Mais

$$\int_0^L \varphi \Delta \, du > \int_{u_1}^{u_2} \varphi \Delta \, du .$$

Toutes les abscisses des points de l'arc $\breve{EF}$ étant au moins égales à $s/4$ on peut écrire

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \Rightarrow \varphi(u) \geqslant s/4 ,$$

d'où résulte l'inégalité

$$\int_0^L \varphi \Delta \, du > \frac{s}{4} \int_{u_1}^{u_2} \Delta du . \tag{37}$$

Les inégalités (36) et (37) donnent

$$\int_0^L \varphi \Delta \, du > \frac{s}{4} (\alpha + \beta) . \tag{38}$$

Nous avons ensuite

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{4\mu h} , \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{4h(1-\mu)} . \tag{39}$$

Il est facile de montrer que la fonction

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{s}{4h\mu} + \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{4h(1-\mu)} , \tag{40}$$

où s, h sont considérés comme des constantes et μ comme une variable parcourant l'intervalle $(0, 1)$, atteint son minimum pour $\mu = \frac{1}{2}$. On a, par conséquent,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{s}{4h\mu} + \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{4h(1-\mu)} > 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{2h} .$$

Donc

$$I_2 > \pi s \operatorname{arctg} \frac{s}{2h}. \tag{41}$$

De l'inégalité connue

$$2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} > \operatorname{arctg} x \quad \text{pour} \quad x > 0$$

on obtient ensuite

$$I_2 > \frac{\pi}{2} s \operatorname{arctg} \frac{s}{h}. \tag{42}$$

En résumant les résultats obtenus nous pouvons énoncer les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *Si la surface S de genre zéro et de classe de régularité C^2 est une surface de révolution, on a la formule*

$$I_1 = 2\pi h. \tag{43}$$

THÉORÈME 2. *Si la surface S de genre zéro et de classe de régularité C^2 est une surface convexe de révolution, on a les inégalités suivantes*

$$\frac{\pi s}{2} \operatorname{arctg} \frac{s}{h} < I_2 < \pi^2 s. \tag{44}$$

Dans ces formules interviennent deux constantes h, s liées à la forme géométrique de la surface S. Nous rappelons que h est la largeur de S dans le sens vertical alors que s est sa largeur dans le sens horizontal.

Pour s petits on a

$$\operatorname{arctg} \frac{s}{h} \approx \frac{s}{h}$$

et la borne inférieure est donnée par la quantité

$$\frac{\pi s}{2} \operatorname{arctg} \frac{s}{h} \approx \frac{\pi}{2h} s^2 = \frac{\pi}{2} \cdot s \cdot \frac{s}{h}$$

qui est un infiniment petit du deuxième ordre. L'exemple cité ci dessous nous montre que I_2 peut être un infiniment petit d'ordre plus grand que 1 par rapport à s.

Calculons I_2 pour un ellipsoïde de révolution. Si nous posons

$$h = 2b, \quad s = 2a \quad (a, b \text{ demi-axes de l'ellipse})$$

alors (l'intégrale I_2 peut être calculée effectivement bien que le calcul soit différent suivant que $\lambda = b/a$ est plus grand ou plus petit que 1) nous obtenons

$$I_2 = \begin{cases} \dfrac{4\pi a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2}-1} & \text{pour} \quad \lambda < 1\,, \\ \dfrac{4\pi a^2}{\sqrt{b^2-a^2}} \log[\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}] & \text{pour} \quad \lambda > 1\,. \end{cases}$$

Si l'ellipsoïde est de forme aplatie (s/h grand), alors λ est petit. Réciproquement, si l'ellipsoïde est en forme d'aiguille (s/h petit), alors λ est grand.

Dans le premier cas nous avons

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}} = \frac{s}{2\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \approx \frac{s}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi s}{4}$$

et, par conséquent,

$$I_2 \approx \pi^2 s\,.$$

Dans le deuxième cas

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}} \log[\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}] = \frac{s}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \log[\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}]\,.$$

Ici, quand λ tend vers l'infini,

$$\frac{\log(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})}{\sqrt{\lambda^2-1}} \to 0$$

donc $I_2 \to 0$ et dans ce cas la borne inférieure fournit une meilleure évaluation.

Remarque. L'hypothèse que le genre de S est zéro est essentielle dans les théorèmes énoncés ci-dessus. Pour les surfaces de genre un les évaluations précédentes ne sont plus valables, comme le montre l'exemple d'un tore de révolution pour lequel on a

$$I_1 = 0\,, \qquad I_2 = 4a\pi\,,$$

où a désigne la distance du centre cercle-méridien à l'axe de révolution.

Reçu par la Rédaction le 7. 3. 1961