ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Sur les solutions périodiques d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n

par A. LASOTA et F. H. SZAFRANIEC (Kraków)

Nous allons étudier la question d'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle ordinaire

$$Lx+a(t, x^{(n-1)}, \ldots, x)x = b(t, x^{(n-1)}, \ldots, x)\,, \tag{0.1}$$

où L désigne un opérateur linéaire d'ordre n

$$Lx = x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(t)x'\,.$$

La présente note se compose de trois parties. La première contient un lemme préliminaire. Dans la seconde on énonce et on démontre un théorème d'existence des solutions périodiques de (0.1). Enfin dans la troisième on en tire quelques conséquences immédiates concernant l'équation à coefficients constants.

1. Considérons l'équation différentielle homogène

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)x = 0 \tag{1.1}$$

à coefficients réels et périodiques en t, de période ω. Admettons les notations suivantes

$$\|f\|_\infty = \sup_{\langle 0,\omega\rangle}|f(t)|\,, \qquad \|f\|_k = \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega |f(t)|^k dt\right)^{1/k}, \qquad k = 1, 2\,.$$

On a alors le

LEMME. *Si les fonctions a_i satisfont à l'une des conditions*

$$\sum_{i=1}^{n-1}\|a_i\|_\infty\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^i+2\|a_n\|_\infty\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^n < 1, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^i < \frac{1}{\pi}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\omega}{2}\|a_1\|_1+\pi^2\sum_{i=2}^{n}\|a_i\|_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^i < 1\,, \tag{1.4}$$

toute solution de l'équation (1.1) *périodique de période* ω *est ou bien identiquement nulle ou bien différente de zéro pour tout* t.

Démonstration. Soit x une solution périodique de (1.1) qui s'annule au moins une fois, par exemple au point t_0. On a donc

$$\ldots, \quad x(t_0-\omega)=0, \quad x(t_0)=0, \quad x(t_0+\omega)=0, \quad \ldots$$

Par le théorème de Rolle on a des suites analogues pour les dérivées successives de la fonction x

$$\ldots, \quad x^{(i)}(t_i-\omega)=0, \quad x^{(i)}(t_i)=0, \quad x^{(i)}(t_i+\omega)=0, \quad \ldots, \quad i=1,\ldots,n-1.$$

Comme

$$\int_0^\omega x^{(i)}(t)\,dt = x^{(i-1)}(\omega)-x^{(i-1)}(0)=0, \qquad i=1,\ldots,n$$

de l'inégalité de Wirtinger ([1], p. 184) on obtient

$$\|x^{(i-1)}\|_2 \leqslant \frac{\omega}{2\pi}\|x^{(i)}\|_2, \qquad i=2,\ldots,n \tag{1.5}$$

et de même

$$\|x\|_2 \leqslant \frac{\omega}{\pi}\|x'\|_2. \tag{1.6}$$

Pour tout $t \in \langle t_i, t_i+\omega\rangle$ on a

$$|x^{(i)}(t)| = \tfrac{1}{2}\left|\int_{t_i}^{t} x^{(i+1)}(s)\,ds + \int_{t_i+\omega}^{t} x^{(i+1)}(s)\,ds\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\int_{t_i}^{t_i+\omega}|x^{(i+1)}(s)|\,ds$$

d'où

$$\|x^{(i)}\|_\infty \leqslant \frac{\omega}{2}\|x^{(i+1)}\|_1 \leqslant \frac{\omega}{2}\|x^{(i+1)}\|_2, \qquad i=0,\ldots,n-1. \tag{1.7}$$

De là il résulte pour $i=n-1$

$$\|x^{(n-1)}\|_2 \leqslant \|x^{(n-1)}\|_\infty \leqslant \frac{\omega}{2}\|x^{(n)}\|_1. \tag{1.8}$$

D'autre part de l'équation (1.1) on tire

$$\|x^{(n)}\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_\infty\,\|x^{(n-i)}\|_2, \tag{1.9}$$

$$\|x^{(n)}\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_2\|x^{(n-i)}\|_\infty, \tag{1.10}$$

$$\|x^{(n)}\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_1\|x^{(n-i)}\|_\infty. \tag{1.11}$$

En appliquant à (1.9) les inégalités (1.5), (1.6) on obtient

$$\|x^{(n)}\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^i \|a_i\|_\infty \|x^{(n)}\|_2 + 2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^n \|a_n\|_\infty \|x^{(n)}\|_2$$

d'où

$$(1.12)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n-1}\|a_i\|_\infty\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^i + 2\|a_n\|_\infty\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^n - 1\right)\|x^{(n)}\|_2 \geqslant 0 .$$

De même d'après (1.10), (1.7) et (1.5) on a

$$\|x^{(n)}\|_2 \leqslant \frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_2\|x^{(n-i+1)}\|_2 \leqslant \frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{i-1}\|x^{(n)}\|_2$$

d'où

$$(1.13)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^i\|a_i\|_2 - \frac{1}{\pi}\right)\|x^{(n)}\|_2 \geqslant 0 .$$

Enfin, en vertu des l'inégalités (1.11), (1.7), (1.5) et (1.8) on obtient

$$\begin{aligned}\|x^{(n)}\|_1 &\leqslant \frac{\omega}{2}\|a_1\|_1\|x^{(n)}\|_1 + \frac{\omega}{2}\sum_{i=2}^{n}\|a_i\|_1\|x^{(n-i+1)}\|_2\\ &\leqslant \frac{\omega}{2}\|a_1\|_1\|x^{(n)}\|_1 + \frac{\omega}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{i-2}\|a_i\|_1\ \|x^{(n-1)}\|_2\\ &\leqslant \frac{\omega}{2}\|a_1\|_1\|x^{(n)}\|_1 + \frac{\omega^2}{4}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{i-2}\|a_i\|_1\|x^{(n)}\|_1\end{aligned}$$

d'où

$$(1.14)\qquad \left(\frac{\omega}{2}\|a_1\|_1 + \pi^2\sum_{i=2}^{n}\|a_i\|_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^i - 1\right)\|x^{(n)}\|_1 \geqslant 0 .$$

Dans nos hypothèses les inégalités (1.12), (1.13) et (1.14) mènent à la conclusion $x^{(n)}(t) \equiv 0$ ce qui montre, vu (1.5), (1.6), que $x(t) \equiv 0$. Donc toute solution périodique x de (1.1) qui s'annule une fois est identiquement nulle et le lemme se trouve ainsi démontré.

2. Revenons à l'étude de l'équation (0.1). Nous allons supposer dans la suite que les fonctions $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ définies sur toute la droite R^1 sont réelles, périodiques de période ω et ont des dérivées $a_i^{(n-i)}$ sommables dans l'intervalle $\langle 0, \omega\rangle$. Supposons de plus que les fonctions réelles $a(t, x_1, \ldots, x_n)$, $b(t, x_1, \ldots, x_n)$ soient définies dans l'espace cartésien réel R^{n+1} à $(n+1)$-dimensions et satisfassent aux conditions de Carathéodory. Elles sont donc mesurables par rapport à t, quels que soient les $x_1, \ldots, x_n$, et continues par rapport à l'ensemble des variables $x_1, \ldots, x_n$ pour tout t fixe. Admettons enfin que la fonction $a(t, x_1, \ldots, x_n)$ est bornée par une fonction sommable $a_n(t)$

$$|a(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant a_n(t).$$

Soit L^+ l'opérateur adjoint à L, c'est-à-dire

$$L^+x = -(a_{n-1}x)' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_1 x)^{(n-1)} + (-1)^n x^{(n)}.$$

Comme la fonction $x(t) \equiv 1$ est solution périodique de l'équation $Lx = 0$, il existe ([2], p. 410) au moins une solution x_+ périodique de période ω et non identiquement nulle de l'équation adjointe

$$L^+x = 0. \tag{2.1}$$

Théorème. *Si les fonctions a_i $(i = 1, \ldots, n)$ satisfont à l'une des conditions* (1.2), (1.3), (1.4) *et si l'on a*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_0^\omega \sup_{|X_i| \leqslant k} |b(t, x_1, \ldots, x_n)|\, dt = 0, \tag{2.2}$$

$$a(t, x_1, \ldots, x_n)x_+(t) \geqslant \varphi(t) \geqslant 0 \qquad \Big(\int_0^\omega \varphi(t)\,dt > 0\Big), \tag{2.3}$$

l'équation (0.1) *admet au moins une solution périodique de période ω.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème il suffit de prouver [3] que pour toute fonction $a(t)$ mesurable, périodique de période ω et satisfaisant aux conditions

$$|a(t)| \leqslant a_n(t), \qquad x_+(t)\,a(t) \geqslant \varphi(t), \tag{2.4}$$

l'équation

$$Lx + a(t)x = 0 \tag{2.5}$$

n'a aucune solution périodique de période ω autre que la solution identiquement nulle. Supposons en effet qu'une telle solution périodique x existe. En vertu du lemme la solution x ne s'annule pas dans l'intervalle $\langle 0, \omega\rangle$, par exemple on a $x(t) > 0$. De l'équation (2.5) on tire

$$x_+Lx + x_+ax = 0. \tag{2.6}$$

Comme x_+ est la solution de l'équation (2.1), l'expression x_+Lx est la différentielle d'une forme bilinéaire de x et de x_+. Plus précisément on a

$$x_+Lx = \frac{d}{dt}[x, x_+] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j+k=i-1} (-1)^j x^{(k)}(a_{n-i}x_+)^{(j)},$$

d'où

$$\int_0^\omega x_+ Lx\,dt = [x, x_+](\omega) - [x, x_+](0) = 0\,.$$

En intégrant l'identité (2.6) dans l'intervalle $\langle 0, \omega\rangle$ on obtient

$$\int_0^\omega x_+ ax\,dt = 0\,.$$

D'autre part de la seconde des conditions (2.4) il vient

$$\int_0^\omega x_+ ax\,dt \geqslant \int_0^\omega \varphi x\,dt \geqslant \min_{\langle 0,\omega\rangle} x \int_0^\omega \varphi\,dt > 0,$$

ce qui est impossible.

3. Lorsque les coefficients a_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ de l'opérateur L satisfont à la condition supplémentaire

$$a'_{n-1} - a''_{n-2} + \ldots + (-1)^n a_1^{(n-1)} = 0\,, \tag{3.1}$$

la fonction $x_+ \equiv 1$ vérifie l'équation (2.1). L'inégalité (2.3) admet alors la forme

$$a(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \varphi(t) \geqslant 0 \qquad \Big(\int_0^\omega \varphi(t)\,dt > 0\Big). \tag{3.2}$$

Dans le cas où les coefficients a_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ sont constants la relation (3.1) est vérifiée automatiquement. Par exemple pour l'équation

$$x^{(n)} + a(t, x^{(n-1)}, \ldots, x)x = b(t, x^{(n-1)}, \ldots, x) \tag{3.3}$$

on obtient le résultat suivant, qui est une généralisation du théorème 5 donné dans le travail [3] et du théorème connu de M. Volpato [4].

Corollaire. *Si les fonctions a et b satisfont aux conditions* (3.2), (2.2) *et à l'une des conditions*

$$\|a_n\|_\infty < \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^n, \qquad \|a_n\|_2 < \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^n, \qquad \|a_n\|_1 < \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^n$$

$(|a(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant a_n(t))$, *il existe au moins une solution de l'équation* (3.3) *périodique de période* ω.

Travaux cités

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge 1934.

[2] Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, New York 1964.

[3] A. Lasota et Z. Opial, *Sur les solutions périodiques des équations différentielles ordinaires*, Ann. Polon. Math. 16 (1964), p. 69-94.

[4] M. Volpato, *Sull'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del second ordine*, Rend. Sem. Math. Padova 25 (1956), p. 371-385.

Reçu par la Rédaction le 17. 8. 1965