ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LII (1991)

Sur les solutions disjointes de l'équation de translation

par ANDRZEJ MACH (Kielce)

Résumé. On formule une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution $F\colon \Gamma \times G^+ \to \Gamma$ de l'équation de translation (1) remplissant la condition (2) soit disjointe en un point.

Soit $(G, +, e, \leqslant)$ un groupe linéairement ordonné et archimédien; désignons par G^+ le demi-groupe de ses éléments non négatifs.

Soit Γ un ensemble arbitraire non vide et soit $F\colon \Gamma \times G^+ \to \Gamma$ une solution de l'équation de translation

$$F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, x+y) \tag{1}$$

remplissant la condition

$$\underset{\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma}{\forall} \big(O(\alpha_1) \cap O(\alpha_2) \neq \emptyset \Rightarrow O(\alpha_1) \subset O(\alpha_2) \text{ ou } O(\alpha_2) \subset O(\alpha_1)\big), \tag{2}$$

où $O(\alpha) := F(\alpha, G^+)$.

Nous savons ([2]) qu'une telle solution F peut être construite de la façon suivante (Construction C):

1° Soit $f\colon \Gamma \to \Gamma$ une fonction telle que

$$\underset{\alpha \in \Gamma}{\forall} f(f(\alpha)) = f(\alpha).$$

2° Décomposons l'ensemble $f(\Gamma)$ en ensembles Γ_k, $k \in K$, non vides, disjoints et tels qu'il existe pour chaque k une décomposition invariante $\{W_{ik}\}_{i \in I_k}$, équipotente à Γ_k, d'un intervalle $\mathscr{I}_k$ de G, pour lequel $G^+ \subset \mathscr{I}_k$.

3° Soit $h_k\colon \{W_{ik}\}_{i \in I_k} \to \Gamma_k$ une bijection et définissons

$$g_k(x) := h_k(W_{ik}), \quad \text{pour } x \in W_{ik}.$$

4° Posons

$$F(\alpha, x) = \big\} g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha)) + x\big) \big\{, \quad \text{pour } f(\alpha) \in \Gamma_k,$$

où $\}A\{$ désigne l'élément d'un ensemble A n'ayant qu'un seul élément et $g_k^{-1}(f(\alpha))$ désigne l'image réciproque de l'ensemble $\{f(\alpha)\}$.

La famille d'ensembles non vides $\{W_{ik}\}_{i\in I_k}$ est appélée une *décomposition invariante* de $\mathcal{I}_k$ si

$$\mathcal{I}_k = \bigcup_{i\in I_k} W_{ik}, \quad \underset{i\neq j}{\forall}\ W_{ik}\cap W_{jk} = \emptyset, \quad \underset{\substack{i\in I_k\\ x\in G^+}}{\forall}\ \underset{j\in I_k}{\exists}\ W_{ik}+x \subset W_{jk}.$$

On sait ([3]) que chaque décomposition invariante de $\mathcal{I}_k$ satisfait aux conditions suivantes:

(i) il existe un élément u de la complétion de G tel que les ensembles $\{x\} \subset \Delta_k := \{x\in\mathcal{I}_k\colon xRu\}$, où $R = \leqslant$ ou $R = <$, forment les composantes de cette décomposition (on n'exclut pas le cas où $\Delta_k = \emptyset$),

(ii) d'autres composantes de la décomposition ci-dessus sont les restrictions à l'ensemble $\mathcal{I}_k\backslash\Delta_k$ des classes du groupe G par rapport à un sous-groupe G_k.

Dans [4] on trouve des conditions équivalentes aux certaines propriétés complémentaires des solutions de l'équation de translation concernant les paramètres f, K, Γ_k, Δ_k, G_k de ces solutions.

Le but de cette note est de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution $F\colon \Gamma\times G^+ \to \Gamma$ de l'équation de translation (1) remplissant la condition (2) soit disjointe au point $\alpha_0\in\Gamma$ (voir [1]), c'est-à-dire

$$\underset{x,y\in G^+}{\forall}\ \big[F(\alpha_0, x) = F(\alpha_0, y) \Rightarrow \underset{\alpha\in\Gamma}{\forall}\ F(\alpha, x) = F(\alpha, y)\big].$$

Dans [4] on a formulé la condition

(3) $$G_k = N \quad \text{pour } k \text{ tel que } f(\alpha_0)\in\Gamma_k, \text{ où } N := \bigcap_{l\in K} G_l,$$

qui est nécessaire mais non suffisante pour que $F(\alpha, x)$ soit disjointe en α_0.

Pour $\alpha_0\in\Gamma$ et $f(\alpha_0)\in\Gamma_k$ désignons

$$A := \{x\in G^+\colon\ g_k^{-1}(f(\alpha_0))+x \subset \mathcal{I}_k\backslash\Delta_k\},$$

et pour chaque l de K posons

$$B_l := \{x-y\colon\ x, y\in\Delta_l\}.$$

Remarquons que si $G_k = \{e\}$, on a $\Delta_k = \emptyset$ et alors $A = G^+$ et si $\Delta_l = \emptyset$, alors $B_l = \emptyset$.

Soit G' la complétion du groupe G. Choisissons $a\in G'$ et $b_l\in G'$ comme suit:

$$a := \inf A,$$

$$b_l := \begin{cases} \sup B_l & \text{si } B_l \neq \emptyset \text{ et } B_l \text{ est majoré},\\ e & \text{si } B_l = \emptyset. \end{cases}$$

THÉORÈME. *Soient* $(G, +, e, \leqslant)$ *un groupe linéairement ordonné et archimédien,* G^+ *son demi-groupe d'éléments non négatifs et* Γ *un ensemble* *arbitraire. La solution* $F\colon \Gamma\times G^+\to\Gamma$ *de l'équation de translation* (1) *remplissant* (2), *donnée par la construction C, est disjointe en* $\alpha_0\in\Gamma$ *si et seulement si les conditions* (3) *et*

$$(4)\quad \Big[G_k\neq\{e\}\Rightarrow \underset{l\in K}{\forall}\big(B_l \text{ est majoré par } a \text{ et } (a\in A\Rightarrow(b_l<a \text{ ou } b_l\notin B_l))\big)\Big]$$

sont satisfaites.

Démonstration. *Suffisance.* Supposons que $\alpha_0\in\Gamma$, $f(\alpha_0)\in\Gamma_k$ et que les conditions (3) et (4) soient remplies. Si $G_k=\{e\}$, on a $F(\alpha_0,x)\neq F(\alpha_0,y)$ pour $x\neq y$ et la solution $F(\alpha,x)$ est disjointe en α_0.

Supposons maintenant que $G_k\neq\{e\}$, alors

$$(5)\qquad \underset{l\in K}{\forall}\big(B_l \text{ est majoré par } a \text{ et } (a\in A\Rightarrow(b_l<a \text{ ou } b_l\notin B_l))\big).$$

Soient $x,y\in G^+$, $x\neq y$ et $F(\alpha_0,x)=F(\alpha_0,y)$. Nous allons démontrer que $F(\alpha,x)=F(\alpha,y)$ pour chaque α de Γ Soit $\alpha\in\Gamma$, $f(\alpha)\in\Gamma_l$. On peut supposer que $y-x\in G^+$ (dans le cas contraire nous pouvons raisonner d'une manière analogue). Nous avons

$$(6)\quad F(\alpha_0,x)=\big\}g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_0))+x\big)\big\{=\big\}g_k\big(g_k^{-1}(f(\alpha_0))+x+y-x\big)\big\{=F(\alpha_0,y).$$

D'après la définition de g_k et de la forme des décompositions invariantes de $\mathscr{I}_k$ nous avons $y-x\in G_k\cap G^+$, et puisque $G_k=N=\bigcap_{l\in K}G_l$, alors $y-x\in G_l\cap G^+$ D'après (6) nous avons aussi $g_k^{-1}(f(\alpha_0))+x\subset\mathscr{I}_k\backslash\Delta_k$, d'où $x\geqslant a$.

Nous allons maintenant démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $g_l^{-1}(f(\alpha))+x\subset\mathscr{I}_l\backslash\Delta_l$. L'hypothèse $g_l^{-1}(f(\alpha))+x\subset\Delta_l$ entraîne $g_l^{-1}(f(\alpha))\subset\Delta_l$, d'où $x\in B_l$ et $x\leqslant b_l$. D'après (5), puisque $x\geqslant a$ nous avons $a\leqslant x\leqslant b_l\leqslant a$, et par suite $b_l=x=a$. Il en résulte que $a\in A$, $b_l=a$ et $b_l\in B_l$, ce qui contredit (5).

Nous avons donc démontré que $g_l^{-1}(f(\alpha))+x\subset\mathscr{I}_l\backslash\Delta_l$.

Comme $y-x\in G_l\cap G^+$, nous avons

$$F(\alpha,x)=\big\}g_l\big(g_l^{-1}(f(\alpha))+x\big)\big\{=\big\}g_l\big(g_l^{-1}(f(\alpha))+x+y-x\big)\big\{=F(\alpha,y),$$

et par suite la solution $F(\alpha,x)$ est disjointe en α_0.

Nécessité. Supposons que $F\colon\Gamma\times G^+\to\Gamma$ soit disjointe en α_0 et que $f(\alpha_0)\in\Gamma_k$. Si $G_k=\{e\}$, alors $N=\{e\}=G_k$. Supposons que $G_k\neq\{e\}$. Pour u dans $G_k\cap G^+$,

$$\underset{\bar{x}\in G^+}{\exists}\ F(\alpha_0,\bar{x}+u)=F(\alpha_0,\bar{x}),$$

et puisque $F(\alpha,x)$ est disjointe en α_0,

$$\underset{l\in K}{\forall}\ \underset{\alpha\in\Gamma_l}{\forall}\ F(\alpha,\bar{x}+u)=F(\alpha,\bar{x}),$$

d'où

$$\underset{l\in K}{\forall}\ u\in G_l\cap G^+$$

Ceci montre que $G_k = \bigcap_{l\in K} G_l = N$.

En raisonnant par l'absurde supposons d'abord qu'il existe l dans K tel que B_l ne soit pas majoré par a. Il en résulte qu'il existe $\bar{x}$, $\bar{y}\in\Delta_l$ tels que $a<\bar{x}-\bar{y}$, et il existe $\tilde{x}\in G^+$ tel que $g_k^{-1}(f(\alpha_0))+\tilde{x}\subset\mathscr{I}_k\backslash\Delta_k$ et $\tilde{x}<\bar{x}-\bar{y}$, d'où $\tilde{x}+\bar{y}\in\Delta_l$. Fixons ε_k dans $G_k\cap G^+\backslash\{e\}$. Alors

$$F(\alpha_0,\tilde{x}) = F(\alpha_0,\tilde{x}+\varepsilon_k).$$

D'autre part, pour $\alpha := g_l(\bar{y})$ nous avons $F(\alpha,\tilde{x}) = g_l(\bar{y}+\tilde{x})$ et lorsque $\bar{y}+\tilde{x}\in\Delta_l$, on a $g_l(\bar{y}+\tilde{x})\neq g_l(\bar{y}+\tilde{x}+\varepsilon_k)$, d'où

$$F(\alpha,\tilde{x}) = g_l(\bar{y}+\tilde{x})\neq g_l(\bar{y}+\tilde{x}+\varepsilon_k) = F(\alpha,\tilde{x}+\varepsilon_k),$$

contrairement a l'hypothèse que $F(\alpha, x)$ soit disjointe en α_0.

Par conséquent, pour chaque l dans K l'ensemble B_l est majoré par a.

Supposons maintenant que $a\in A$, et en raisonnant par l'absurde supposons que

$$\underset{l\in K}{\exists}\ (b_l = a \text{ et } b_l\in B_l).$$

Il existe donc $\bar{x}$, $\bar{y}\in\Delta_l$ tels que $a=\bar{x}-\bar{y}$. Fixons ε_k dans $G_k\cap G^+\backslash\{e\}$. Puisque $a\in A$ on a $F(\alpha_0, a+\varepsilon_k) = F(\alpha_0, a)$. Lorsque $\bar{x}\in\Delta_l$, donc $g_l(\bar{x})\neq g_l(\bar{x}+\varepsilon_k)$, d'où pour $\alpha := g_l(\bar{y})$ nous avons

$$F(\alpha, a+\varepsilon_k) = g_l(\bar{y}+a+\varepsilon_k) = g_l(\bar{y}+\bar{x}-\bar{y}+\varepsilon_k)\neq g_l(\bar{x}) = g_l(\bar{y}+a) = F(\alpha, a),$$

d'où une contradiction à l'hypothèse faite sur $F(\alpha, x)$.

Ceci achève la démonstration du théorème.

Dans [4] on trouve un exemple d'une solution $F\colon \Gamma\times G^+\to\Gamma$ de (1) remplissant (2) et (3) et n'étant en même temps pas disjointe en α_0. Nous présenterons cette solution dans l'exemple 1 ci-dessous et montrerons que la condition (4) n'y est pas remplie.

Exemple 1. Prenons $G := (\boldsymbol{R}, +, 0, \leqslant)$, $K := \{1\}$, $G_1 := \boldsymbol{Z}$, où $\boldsymbol{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers, $\Gamma=\Gamma_1 := [-2, 1)$, $\mathscr{I}_1 := [-2, +\infty)$, $\Delta_1 := [-2, 0)$, $f = \mathrm{id}_\Gamma$,

$$g_1(x) := \begin{cases} x & \text{si } x\in[-2, 0), \\ M(x) & \text{si } x\in[0, +\infty), \end{cases}$$

où $M(x)$ désigne la partie fractionnaire de x. Posons

$$F(\alpha, x) := \}g_1(g_1^{-1}(\alpha)+x)\{ \quad \text{et} \quad \alpha_0 := 0.$$

Puisque

$$F(0, 0) = F(0, 1) \quad \text{et} \quad F(-2, 0) \neq F(-2, 1),$$

la solution $F(\alpha, x)$ n'est pas disjointe en α_0. Nous avons $G_1 = N = Z \neq \{0\}$, $a = 0$, $b_1 = 2$. Evidemment la condition (3) est remplie et on voit que la condition (4) n'est pas satisfaite, puisque $2 \nleqslant 0$.

L'exemple suivant met en évidence que la condition $a \in A \Rightarrow (b_l < a$ ou $b_l \notin B_l)$ dans (4) du théorème est essentielle.

EXEMPLE 2. Soient $G = (R, +, 0, \leqslant)$, $K = \{1, 2\}$, $G_1 = G_2 = Z$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où $\Gamma_1 := [-2, 1)$, $\Gamma_2 := [2, 4] \cup [5, 6)$, $\mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_2 := [-2, +\infty)$, $\Delta_1 = [-2, 0)$, $\Delta_2 = [-2, 0]$, $f = \mathrm{id}_\Gamma$,

$$g_1(x) := \begin{cases} x & \text{pour } x \text{ de } [-2, 0), \\ M(x) & \text{pour } x \text{ de } [0, +\infty), \end{cases}$$

$$g_2(x) := \begin{cases} x+4 & \text{pour } x \text{ de } [-2, 0], \\ M(x)+5 & \text{pour } x \text{ de } (0, +\infty). \end{cases}$$

Posons

$$F(\alpha, x) := \}g_k(g_k^{-1}(\alpha)+x)\{, \quad \text{pour } \alpha \in \Gamma_k.$$

Soit $\alpha_0 := -2$. Nous avons $f(\alpha_0) \in \Gamma_1$, $G_1 = Z = N \neq \{0\}$, $a = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2$. $F(\alpha, x)$ n'est pas disjointe en α_0 puisque

$$F(-2, 2) = F(-2, 3) \quad \text{et} \quad F(2, 2) = 4 \neq 5 = F(2, 3).$$

Nous avons ici: $a \in A$ et en même temps $b_2 = a$ et $b_2 \in B_2$.

Travaux cités

[1] M. A. McKiernan, *On iteration groups and related functional equations*, en manuscrit.

[2] Z. Moszner, *Solution générale de l'équation de translation sur un demi-groupe*, Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie, Travaux Math. 9 (1979), 97–104.

[3] —, *Décompositions invariantes du demi-groupe des éléments non négatifs du groupe archimédien*, Tensor 34 (1980), 8–10.

[4] —, *Sur les propriétés complémentaires des solutions de l'équation de translation*, Ann. Polon. Math., ce volume, 27–36.

INSTYTUT MATEMATYKI WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
INSTITUTE OF MATHEMATICS, HIGHER PEDAGOGICAL COLLEGE
Konopnickiej 21, 25-406 KIELCE, POLAND

Reçu par la Rédaction le 04.10.1988