ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVI (1985)

О продолжении с оценками функции, голоморфной на алгебраическом множестве

Л. И. Ронкин, А. М. Руссаковский (Харков)

Franciszek Leja in memoriam

Резюмэ. Здесь будет рассмотрена задача продолжения функции, голоморфной на алгебраическом множестве из некоторого семейства и удовлетворяющей на этом множестве тем или иным оценкам роста. Решение ищется в классе целых функций, в определенном смысле, минимально возможного роста. В частности, будет показано существование продолжения с радиальным индикатором, не превосходящим индикатора (соответственным образом определенного) продолжаемой функции. Для функций, голоморфных на нулевом множестве полинома (и, более общо, псевдополинома), такого рода результаты ранее были получены в статье [9], продолжением и развитием которой можно считать данную работу. Переход от коразмерности I к произвольной коразмерности даже при наличии вводимых далее ограничений на алгебраические множества, как известно, не является тривиальным. Некоторые из возникающих при этом переходе трудностей преодолеваются нами с помощью методов и результатов статьи [3], в которой рассматривается задача продолжения с аналитических множеств весьма общего вида. Результаты, относящиеся к продолжению с алгебраических множеств, в том числе и произвольных, но с оценками, как и в [3], отличными от наших, см. в [4], [5], [8], [10]–[12], [15], [16].

§ 1. Продолжение в окрестности бесконечно удаленных точек. Всюду далее принято: $\lambda \in C^m$, $\zeta \in C^{n-m}$, $w \in C$, $z = (\lambda, \zeta, w)$, $t = (\lambda, \zeta)$. Через $C, C_1, \ldots, N, N_1, \ldots$ обозначаются положительные константы. Пространства функций, голоморфных на множестве E, плюрисубгармонических в области G, и непрерывных на множестве E, как обычно, обозначаются, соответственно, через $A(E)$, PSH (G) и $C(E)$. Через Λ_F, где F — голоморфное отображение одного комплексного линейного пространства в другое, обозначается множество корней этого отображения, т.е. прообраз начала координат. Наконец, через $V(:)$ обозначается элемент объема в пространстве переменных $(:)$.

Пусть D — ограниченная псевдовыпуклая область в C^m с кусочно-гладкой границей ∂D и пусть P: $\bar{D}\to C^m$ — отображение класса $A(\bar{D})$ Обозначим через $H(\lambda, \lambda')$ детерминант, элементами которого $H_{i,j}$ являются коэффициенты разложения Гефера отображения P:

$$P_i(\lambda)-P_i(\lambda') = \sum_{j=1}^{m} H_{i,j}(\lambda, \lambda')(\lambda_j-\lambda_i'), \qquad i = 1, \dots, m.$$

Обозначим также через $J_P(\lambda)$ комплексный якобиан отображения P. Будем предполагать, что $\min\{|P(\lambda)|\colon \lambda \in \partial D\} = \delta > 0$. При этом предположении множество Λ_P состоит из конечного числа точек (см., например, [1], стр. 34). Обозначим еще:

$$\Delta = \max\{|P(\lambda)|\colon \lambda \in \partial D\};$$

$$D_1 = \left\{\lambda \in D\colon |P_i(\lambda)| < \frac{\delta^2}{2\Delta m}, \ i = 1, \dots, m\right\};$$

$$\omega(f, g) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \langle f, g\rangle^{-m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} g_k dg[k] \wedge df;$$

$$\omega_1(f, g) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \langle f, g\rangle^{-m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} g_k dg_{[k]} \wedge d\lambda;$$

Здесь $f = (f_1, \dots, f_m)$, $g = (g_1, \dots, g_m)$, $df = df_1 \wedge \dots \wedge df_m$, и индекс $[k]$ означает отсутствие в соответствующем произведении k-го множителя.

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит классу $A(D)\cap C(\bar{D})$ и пусть*

$$I_\varphi \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial D} \varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda)\, \omega_1\big(P(\lambda'), \bar{P}(\lambda')\big). \tag{1}$$

Тогда:

1° $I_\varphi \in A(D)$;

2° *существуют функции* $a_i \in A(D_1)$, $i = 1, \dots, m$, *такие, что* $I_\varphi - \varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i P_i$, $\forall \lambda \in D_1$;

3° *если все корни отображения P простые, то*

$$(I_\varphi)(\lambda) = \sum_{a\in\Lambda_P} \varphi(a) \frac{H(a, \lambda)}{J_P(a)}, \quad \forall \lambda \in D;$$

4° *если* $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{m} g_i P_i$, *где* $g_i \in A(\bar{D})$, $i = 1, \ldots, m$, *то* $I_\varphi \equiv 0$.

Доказательство. В (1) под знаком интеграла стоит форма, непрерывная по $\lambda' \in \partial D$ и $\lambda \in D$ и аналитическая по $\lambda \in D$. Поэтому справедливо утверждение 1°.

Для доказательства утверждения 2° воспользуемся интегральным представлением

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{\partial D} \varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda) \omega_1\big(P(\lambda') - P(\lambda), \bar{P}(\lambda')\big),$$

имеющим место в D_1 в силу предложения 8.3 из [1], которое применимо благодаря оценкам, определяющим множество D_1. Из этого представления при $\lambda \in D_1$ следует, что

$$I_\varphi - \varphi = \int\limits_{\partial D} \varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda) [\langle P(\lambda'), \bar{P}(\lambda')\rangle^{-m} - \langle P(\lambda') - P(\lambda), \bar{P}(\lambda')\rangle^{-m}] \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \bar{P}_k(\lambda') d\bar{P}_{[k]} \wedge d\lambda'.$$

Выражение в квадратных скобках равно

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{C_m^l \langle P(\lambda'), \bar{P}(\lambda')\rangle^{m-l} \langle P(\lambda), \bar{P}(\lambda')\rangle^l}{|P(\lambda')|^{2m} \langle P(\lambda') - P(\lambda), \bar{P}(\lambda')\rangle^m},$$

и, значит, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i(\lambda', \lambda) P_i(\lambda)}{|P(\lambda')|^{2m} \langle P(\lambda') - P(\lambda), \bar{P}(\lambda')\rangle^m},$$

причем функции $\beta_i(\lambda', \lambda)$ голоморфны по λ в D_1. Теперь, чтобы получить 2°, достаточно положить

$$a_i = \int\limits_{\partial D} \frac{\varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda) \beta_i(\lambda', \lambda) \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \bar{P}_k dP_{[k]} \wedge d\lambda'}{|P(\lambda')|^{2m} \langle P(\lambda') - P(\lambda), P(\lambda')\rangle^m}.$$

Для доказательства утверждения 3° заметим, что в $D \diagdown A_P$ форма

$\omega_1(P, \bar{P})$ замкнута. Поэтому

$$\int_{\partial D} \varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda) \omega_1(P(\lambda'), \bar{P}(\lambda')) = \sum_{a \in A_P} \int_{\partial U_a} \varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda) \omega_1(P(\lambda'), \bar{P}(\lambda')) =$$
$$= \sum_{a \in A_P} \int_{\partial U_a} \frac{\varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda) \omega(P(\lambda'), \bar{P}(\lambda'))}{J_P(\lambda')}$$

где U_a – столь малые непересекающиеся шаровые окрестности точек $a \in A_P$, что $J_P(\lambda') \neq 0$, $\forall \lambda' \in \bigcup_{a \in A_P} U_a$. Отсюда, учитывая, что (см., например, [1], стр. 35)

$$\int_{\partial U_a} \frac{\varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda) \omega(P(\lambda'), \bar{P}(\lambda'))}{J_P(\lambda')} = \frac{\varphi(a) H(a, \lambda)}{J_P(a)},$$

получаем 3°.

Предположим теперь, что функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит идеалу, порожденному в $A(\bar{D})$ функциями P_i, $i = 1, \ldots, m$. В случае, когда все корни отображения P являются простыми, 4° есть очевидное следствие из 3°.

В общем случае, зададимся каким-либо положительным числом $\varepsilon < \delta/2\sqrt{m}$, затем возьмем какую-нибудь связную компоненту G множества $S_\varepsilon = \{\lambda \in D\colon |P_i| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, m\}$ и рассмотрим вместо отображения P отображение $P^\varkappa = P - \varkappa$, $\varkappa \in C^m$, $|\varkappa| < \varepsilon$. При этом $\varkappa$ выбираем таким, чтобы все (в D) корни $P^\varkappa$ были простыми и чтобы множество $G^\varkappa = \{\lambda \in G\colon |P_i^\varkappa(\lambda)| < \varepsilon - |\varkappa|\}$ было связным. Отметим, что $J_{P^\varkappa} = J_P$ и $H_\varkappa = H$.

Через $\Gamma^\varkappa$ и Γ обозначим, соответственно, остовы полиэдров $G^\varkappa$ и G.

Согласно одному из вариантов теоремы о логарифмическом вычете (см., например, теорему 4.5 в [1], [3]) имеем

$$\sum_{b \in A_{P^\varkappa} \cap G^\varkappa} \frac{\varphi(b) H(b, \lambda)}{J_P(b)} = \int_{\Gamma^\varkappa} \frac{\varphi(\lambda') H(\lambda', \lambda)}{P_1^\varkappa \ldots P_m^\varkappa}\, d\lambda'. \tag{2}$$

Правая часть этого равенства при $\varphi = \sum g_i P_i$, $g_i \in A(\bar{D})$, представляется в виде

$$\int_{\Gamma^\varkappa} \frac{H(\lambda', \lambda) \sum_i g_i(\lambda') P_i^\varkappa(\lambda')}{P_1^\varkappa(\lambda') \ldots P_m^\varkappa(\lambda')}\, d\lambda' + \sum_{i=1}^m \varkappa_i \int_{\Gamma^\varkappa} \frac{g_i(\lambda') H(\lambda', \lambda)}{P_1^\varkappa(\lambda') \ldots P_m^\varkappa(\lambda')}\, d\lambda'. \tag{3}$$

Поскольку для любого i, $\Gamma^{\varkappa} = \partial\Omega_i$, где

$$\Omega_i = \{\lambda \in \bar{G}^{\varkappa}\colon |P_i^{\varkappa}(\lambda)| = \varepsilon - |\varkappa|,\ |P_j^{\varkappa}(\lambda)| < \varepsilon - |\varkappa|,\ \forall_j \neq i\},$$

то

$$\int\limits_{\Gamma^{\varkappa}} \frac{g_i(\lambda')P_i^{\varkappa}(\lambda')H(\lambda', \lambda)}{P_1^{\varkappa}(\lambda')\dots P_m^{\varkappa}(\lambda')}\, d\lambda' = \int\limits_{\partial\Omega_i} g_i(\lambda')H(\lambda', \lambda)\Big(\prod_{j\neq i} P_j^{\varkappa}(\lambda')\Big)^{-1} d\lambda' = 0.$$

Следовательно, (см. (2) и (3))

$$\sum_{b\in \Lambda_{P^{\varkappa}}\cap G^{\varkappa}} \frac{\varphi(b)H(b, \lambda)}{J_P(b)} = \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i \int\limits_{\Gamma^{\varkappa}} \frac{g_i(\lambda')H(\lambda', \lambda)}{P_1^{\varkappa}(\lambda')\dots P_m^{\varkappa}(\lambda')}\, d\lambda'. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что интегралы, стоящие в правой части этого равенства, ограничены по $\varkappa$, $|\varkappa| < \varepsilon$ и по $\lambda \in D$. Поэтому при $\varkappa \to 0$ правая часть равенства (4) равномерно (в D) стремится к нулю. Тем самым доказано, что

$$\lim_{\varkappa\to 0} \sum_{b\in G^{\varkappa}\cap \Lambda_{P^{\varkappa}}} \frac{\varphi(b)H(b, \lambda)}{J_P(b)} = 0, \qquad \forall\lambda \in D.$$

Теперь для доказательства утверждения 4° достаточно заметить что

$$\begin{aligned} I_{\varphi}(\lambda) &= \lim_{\varkappa\to 0} \int\limits_{\partial D} \frac{\varphi(\lambda')H(\lambda', \lambda)}{J_P(\lambda')}\, \omega\big(P^{\varkappa}(\lambda'), \bar{P}^{\varkappa}(\lambda')\big) = \\ &= \lim_{\varkappa\to 0} \sum_{b\in \Lambda_{P^{\varkappa}}} \frac{\varphi(b)H(b, \lambda)}{J_P(b)} = \\ &= \sum_{G\subset S_{\varepsilon}} \lim_{\varkappa\to 0} \sum_{b\in \Lambda_{P^{\varkappa}}\cap G^{\varkappa}} \frac{\varphi(b)H(b, \lambda)}{J_P(b)} = 0. \end{aligned}$$

При этом, конечно, предполагается, что $\varkappa \to 0$, пробегая значения, удовлетворяющие указанным выше требованиям.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть компоненты $P_i(z)$ отображения $P\colon C^{n+1} \to C^m$ имеют вид* [1]

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{q_i} Q_{i,j}(t)w^j, \qquad i = 1, \dots, m,$$

---

[1] Напомним, что $z = (\lambda, \zeta, w) = (t, w) \in C^{n+1}$, $\lambda \in C^m$, $\zeta \in C^{m-n}$, $t = (\lambda, \zeta)$.

где $Q_{i,j}$ — полиномы, причем отображение

$$Q(\lambda) = \{Q_1, q_1(\lambda, 0), \ldots, Q_m, q_m(\lambda, 0)\}$$

имеет в точке $\lambda = 0$ изолированный корень. Пусть, кроме того, на каждой неприводимой компоненте множества Λ_p не равен тождественно нулю комплексный Якобиан J_P отображения P по переменным $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Тогда существует такая область

$$G = \{z\colon |\lambda| < \varepsilon_0, |\xi| < \varepsilon_0', |w| > R_0\},$$

что

(a) *для любой целой функции $\varphi(z)$ найдется функция $\Phi(z) \in A(G)$, удовлетворяющая условиям*

(a$_1$) $|\Phi(t, w)| \leqslant C(1+|w|^2)^N \sup\{|\varphi(t, w)|\colon |t| < \varepsilon, (t, w) \in \Lambda_p\}$, $\forall (t, w) \in G$, *где* $\varepsilon = 4\max\{\varepsilon_0, \varepsilon_0'\}$, $P = (P_1, \ldots, P_m)$;

(a$_2$) $\Phi(z) - \varphi(z) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(z) P_i(z)$, *где* $a_i(z) \in A(G)$;

(b) *каждая функция $f(z)$ из $A(\bar{G})$, принадлежащая идеалу, порожденному в $A(\bar{G})$ полиномами P_i, представляется в виде*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} g_i(z) P_i(z),$$

где $g_i \in A(G)$ и при некотором $N > 0$

$$\int_G |g_i|^2 \exp\{-N \ln(1+|w|^2) - 2\ln \sup_{|\lambda| \leqslant \varepsilon_0} |f(\lambda, \zeta, w)|\} dV_z < \infty.$$

Доказательство. Поскольку отображение $Q(\lambda)$ имеет изолированный корень в точке $\lambda = 0$, то найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что $\sum\limits_i |Q_i, q_i(\lambda, 0)| > 0$ при $\frac{1}{4}\varepsilon_1 \leqslant |\lambda| \leqslant 2\varepsilon_1$. Далее, найдется такое $\varepsilon_2 > 0$, что $\sum |Q_i, q_i(t)| > 0$ при $\frac{1}{4}\varepsilon_1 \leqslant |\lambda| \leqslant 2\varepsilon_1$, $|\xi| \leqslant \varepsilon_2$. Положим

$$\mu = \inf\{\max_i |Q_i, q_i(t)|\colon \tfrac{1}{4}\varepsilon_1 \leqslant |\lambda| \leqslant 2\varepsilon_1, |\xi| \leqslant \varepsilon_2\};$$

$$R_0' = \frac{1}{\mu} \sup\left\{\sum_{j=0}^{Q_i} |Q_{i,j}(t)|\colon 1 \leqslant i \leqslant m, \tfrac{1}{4}\varepsilon_1 \leqslant |\lambda| \leqslant 2\varepsilon_1, |\xi| \leqslant \varepsilon_2\right\};$$

$$\Lambda_p(\xi, w) = \{\lambda\colon (\lambda, \xi, w) \in \Lambda_p, |\lambda| \leqslant \varepsilon_1\}.$$

Пусть, далее,

$$H(z', z) = H(\lambda', \lambda; \xi, w) = \det\{H_{k,l}(\lambda', \lambda; \xi, w)\},$$

где, как и прежде, $z = (\lambda, \xi, w)$, $z' = (\lambda', \xi, w)$, а $H_{i,j}(\lambda', \lambda; \xi, w)$ — аналитически зависящие от ξ и w коэффициенты разложения Гефера

$$P_i(\lambda', \xi, w) - P_i(\lambda, \xi, w) = \sum_{j=0}^{m} H_{i,j}(\lambda', \lambda; \xi, w)(\lambda'_j - \lambda_j).$$

Положим также

$$\Phi(z) = \int_{|\lambda'|=\varepsilon_1} \varphi(z') H(z', z)\, \omega_1\big(P(z'), \bar{P}(z')\big)$$

(дифференциальная форма ω_1 берется относительно переменной λ').

Покажем, что $\Phi \in A(\Omega)$, где $\Omega = \{z\colon |\lambda| < \varepsilon_1,\ |\xi| < \varepsilon_2,\ |w| > R'_0\}$. Для этого заметим, что равенство

$$\Phi(z) = \int_{|\lambda'|=\varepsilon_1} \varphi(z') H(z', z)\, \omega_1\big(P(z'), g(\lambda')\big) \tag{5}$$

справедливо при заданных ξ и w, какова бы ни была функция $g(\lambda') \in C^1$ ($|\lambda'| = \varepsilon_1$), удовлетворяющая условию $\min\limits_{|\lambda'|=\varepsilon_1} |\langle P(z'), g(\lambda')\rangle| > 0$ (см. [1], стр. 41, 48).

Зафиксируем произвольным образом точку $z_0 \in \Omega$ и выберем ε_3 так, чтобы $\langle P(\lambda', \xi, w), \bar{P}(\lambda', \xi_0, w_0)\rangle \neq 0$ при $|\lambda'| = \varepsilon_1$, $|\xi - \xi_0| < \varepsilon_3$, $|w - w_0| < \varepsilon_3$. Тогда в представлении (5) в качестве функции $g(\lambda')$ можно взять функцию $\bar{P}(\lambda', \xi_0, w_0)$. При этом форма, стоящая в (5) под знаком интеграла, будет голоморфной в области

$$\{z\colon \lambda \in C^m,\ |\xi - \xi_0| < \varepsilon_3,\ |w - w_0| < \varepsilon_3\},$$

а стало быть функция $\Phi(z)$ будет голоморфной в точке z_0. Следовательно, $\Phi \in A(\Omega)$.

Оценим $|\Phi(z)|$ при $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_1$, $|\xi| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon_2$, $|w| > R'_0$.

Ввиду плюрисубгармоничности функции имеем

$$\ln|\Phi(z)| \leqslant \frac{2^{4n-2m}}{\varepsilon_1^{2m}\varepsilon_2^{2n-2m}\omega_m\omega_{n-m}} \int\limits_{\substack{|\lambda'-\lambda|<\varepsilon_1/2\\ |\xi'-\xi|<\varepsilon_2/4}} \ln^+|\Phi(\lambda', \xi', w)|\, dV_{(\lambda', \xi')}, \tag{6}$$

где ω_k — объем единичного шара в C^k.

Так как $J_P \not\equiv 0$ на компонентах Λ_P то $\operatorname{codim}\{\Lambda_P \cap \Lambda_{J_P}\} = m+1$. Поэтому равна нулю лебегова мера в C^{n+1-m} множества E тех точек

(ξ^0, w^0), для которых отображение $P(\lambda;\ \xi^0, w^0)$: $C^m \to C^m$ имеет хотя бы один кратный корень. Соответственно, лебегову меру ноль (в C) имеет и множество E' точек w^0, для которых отлична от нуля лебегова мера (в C^{n-m}) пересечения $\{(\xi, w)\colon w = w_0\} \cap E \overset{\text{def}}{=} E_{w^0}$. Отсюда и из вытекающего из леммы 1 представления

$$\Phi(z) = \sum_{a \in \Lambda_P(\xi, w)} \varphi(a, \xi, w)\, \frac{H(a, \lambda;\ \xi, w)}{J_P(a;\ \xi, w)}, \qquad (\xi, w) \notin E,$$

следует, что при $w \notin E'$, $|w| > R_0'$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_1$, $|\xi| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon_2$ выполняется неравенство

$$(7) \qquad \int\limits_{\substack{|\lambda'-\lambda| \leqslant \varepsilon_1/2 \\ |\xi'-\xi| \leqslant \varepsilon_2/4}} \ln^+ |\Phi(\lambda', \xi', w)|\, dV_{(\lambda', \xi')} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\substack{|\lambda'-\lambda| \leqslant \varepsilon_1/2 \\ |\xi'-\xi| \leqslant \varepsilon_2/4}} \sum_{a \in \Lambda_P(\xi', w)} \ln^+ \left| \frac{H(a, \lambda';\ \xi', w)}{J_P(a;\ \xi', w)} \right| dV_{(\lambda', \xi')} +$$

$$+ \omega_m \omega_{n-m} \frac{\varepsilon_1^{2m} \varepsilon_2^{2n-2m}}{2^{4n-2m}} [\ln N_1 + \sup\{\ln^+ |\varphi(z)|\colon\ |\lambda| \leqslant \varepsilon_1,\ |\xi| \leqslant \varepsilon_2,\ z \in \Lambda_p\}].$$

где N_1 — число точек множества $\Lambda_P(\xi, w)$, которое конечно и не зависит от (ξ, w).

Поскольку отображение P — полиномиальное, то, не нарушая общности, функцию $H(\lambda', \lambda;\ \xi, w)$ можно считать полиномом, и, значит, существуют такие константы C_1 и N_2, что

$$(8) \qquad \ln^+ \max\{|H(\lambda', \lambda;\ \xi, w)|\colon\ |\lambda'| \leqslant \varepsilon_1,\ |\lambda| \leqslant \varepsilon_1,\ |\xi| \leqslant \varepsilon_2\} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + N_2 \ln(1 + |w|^2).$$

Отметим, что N_2 зависит только от степеней полиномов по переменному w, а C_1 — от ε_1, ε_2 и суммы модулей всех коэффициентов полиномов P_i.

Теперь при наличии неравенства (8) оценка первого слагаемного справа в (7) сводится к оценке интеграла

$$(9) \qquad K_1 = \int\limits_{|\xi'-\xi| \leqslant \varepsilon_2/4} \sum_{a \in \Lambda_P(\xi', w)} \ln^+ \frac{1}{|J_P(a;\ \xi', w)|}\, dV(\xi').$$

Поскольку $J_P(\lambda, \xi, w)$ — полином, то

$$K_1 = \int\limits_{|\xi'-\xi|\leqslant \varepsilon_2/4} \sum_{a\in\Lambda_P(\xi',w)} \ln^+ \left| \frac{\prod\limits_{\substack{b\in\Lambda_P(\xi',w)\\ b\neq a}} J_P(b;\xi',w)}{\prod\limits_{b\in\Lambda_P(\xi',w)} J_P(b;\xi',w)} \right| dV_{(\xi')} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 + N_3\ln(1+|w|^2) + N_1 \int\limits_{|\xi'-\xi|\leqslant\varepsilon_2/4} \ln^+ \left\{ \left| \prod_{a\in\Lambda_P(\xi',w)} J_P(a;\xi',w) \right| \right\}^{-1} dV_{(\xi')}.$$

Нетрудно видеть, что функция $\tilde{J}(\xi, w) = \prod\limits_{a\in\Lambda_P(\xi,w)} J_P(a;\xi,w)$ является голоморфной функцией при $|\xi| \leqslant \varepsilon_2$, $|w| \geqslant R_0'$ от ξ, w, и по w имеет степенной рост. Следовательно, главная часть $\tilde{\tilde{J}}(\xi, w)$ „лорановского" разложения функции $\tilde{J}(\xi, w)$ по степеням w в окрестности точки $w = \infty$ есть псевдополином относительно w. Далее, если $\tilde{\tilde{J}}(\xi, w) \not\equiv 0$, выберем точку ξ_0, $|\xi_0| < \frac{1}{4}\varepsilon_2$ так, чтобы $\tilde{\tilde{J}}(\xi_0, w) \not\equiv 0$. Тогда

$$(10)\qquad K_2 \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{|\xi'-\xi|\leqslant\varepsilon_2/4} \ln^+ \frac{1}{|\tilde{J}(\xi', w)|} dV_{(\xi')} \leqslant \int\limits_{|\xi'-\xi_0|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_2} \ln^+ \frac{1}{|\tilde{J}(\xi', w)|} dV_{(\xi')} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|\xi'-\xi_0|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_2} \ln^+|\tilde{J}(\xi', w)|\, dV_{(\xi')} - 2^{2m-2n}\varepsilon_2^{2n-2m}\omega_{n-m}\ln|\tilde{J}(\xi_0, w)|.$$

Далее, выберем $R \geqslant R_0'$ так, чтобы $\min\{\ln|\tilde{J}(\xi_0, w)|: |w| \geqslant R_0\} > -\infty$. Тогда из (10) с учетом того, что $\tilde{J}(\xi, w)$ — псевдополином, следует справедливость следующего неравенства

$$(11)\qquad K_2 \leqslant C_3 + N_4\ln(1+|w|^2), \qquad |w| > R_0.$$

Из (6)–(11) следует, что при $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_1$, $|\xi| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon_2$, $|w| > R_0$, $w \notin E'$ выполняется неравенство

$$(12)\qquad \ln|\Phi(z)| \leqslant C + N\ln(1+|w|^2) + \sup\{|\varphi(\lambda', \xi', w)|: |\lambda'| \leqslant \varepsilon_1,$$
$$|\xi'| \leqslant \varepsilon_2, (\lambda', \xi', w) \in \Lambda_p\},$$

а поскольку $\operatorname{mes} E' = 0$, то это неравенство выполняется и при $w \in E'$.

В случае, когда $\tilde{\tilde{J}}(\xi_0, w) \equiv 0$ неравенство (11) также имеет место, поскольку тогда $\tilde{J}(\xi_0, w)$ при $w \to \infty$ эквивалентна некоторой функции aw^{-N}. Чтобы теперь получить (a_1), достаточно положить $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_1$, $\varepsilon_0' = \frac{1}{4}\varepsilon_2$.

Далее нам понадобятся следующие обозначения:

$$\delta(w) = \min\{|P(z)|: \ |\lambda| = \varepsilon_0, \ |\xi| \leqslant \varepsilon_0'\};$$

$$\Delta(w) = \max\{|P(z)|: \ |\lambda| \leqslant \varepsilon_0, \ |\zeta| \leqslant \varepsilon_0'\};$$

$$d(w) = \delta^2(w)/\Delta(w).$$

Заметим, что

$$d(w) \geqslant C_0(1+|w|^2)^{-N_0}, \qquad \forall w, \ |w| > R_0. \tag{13}$$

Действительно, $\Delta(w)$ оценивается непосредственно

$$\Delta(w) \leqslant C(1+|w|^2)^N,$$

а для оценки $\delta(w)$ используем известное неравенство (см., например, [8], стр. 86)

$$|P(z)| \geqslant \frac{C[\operatorname{dist}(z, \Lambda_p)]^q}{(1+|z|)^N}.$$

Чтобы получить (13), теперь достаточно заметить, что при $|\lambda| = \varepsilon_0$, $|\zeta| \leqslant \varepsilon_0'$, $|w| \geqslant R_0$ выполняется оценка

$$\operatorname{dist}(z, \Lambda_P) \geqslant \tfrac{1}{2}\min\{\varepsilon_0, \varepsilon_0'\}.$$

Обозначим

$$S_{C,N} = \left\{z \in G: \ |P_i| < \frac{C(1+|w|^2)^{-N}}{2m}, \quad i = 1, \ldots, m\right\}.$$

Легко видеть, что при $z \in S_{C,N}$, где $C \leqslant C_0$, $N \geqslant N_0$ и $z' = (\lambda', \zeta, w)$, $|\lambda'| = \varepsilon_0$, выполняется неравенство

$$|\langle P(z') - P(z), \ \overline{P}(z')\rangle| \geqslant \tfrac{1}{2}\delta^2(w) > 0.$$

Поэтому в $S_{C,N}$ справедливо представление (см. лемму 1)

$$\varphi(z) = \int\limits_{|\lambda'| = \varepsilon_0} \varphi(z') H(z', z)\, \omega_1\big(P(z') - P(z), \ \overline{P}(z')\big), \tag{14}$$

C и N в этом представлении фиксированы. Так же, как и в лемме 1, записывая разность $\Phi(z) - \varphi(z)$ в виде разности двух интегралов и проводя соответствующие рассуждения, получаем, что при $z \in S_{C,N}$ функция $\Phi(z) - \varphi(z)$ представима в виде

$$\Phi(z)-\varphi(z) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^*(z) P_i(z),$$

где $\gamma_i^* \in A(S_{C,N})$. Отсюда, согласно свойствам когерентных пучков (см., например, [15], теорема 7.2.9), вытекает существование таких функций $\gamma_i \in A(G)$, что

$$\Phi(z)-\varphi(z) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(z) P_i(z), \qquad \forall z \in G.$$

Тем самым доказано утверждение ($а_2$).

Пусть теперь $f(z)$ — функция из пункта (в), т.е. какая-либо функция из идеала, порожденного в $A(\bar{G})$ полиномами P_i, $i = 1, \ldots, m$. Как следует из леммы 1, функция

$$F(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{|\lambda'|=\varepsilon_0} f(z') H(z', z)\, \omega_1\big(P(z'),\ \bar{P}(z')\big) \tag{15}$$

тождественно равна нулю в области G. Поэтому

$$f(z) = f(z) - F(z)$$

и, используя (15) и (14) с подстановкой в (14) f вместо φ, получаем, что при $z \in S_{C,N}$

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} a_i(z) P_i(z),$$

где

$$a_i(z) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \int\limits_{|\lambda'|=\varepsilon_0} \frac{f(z') H(z', z) \beta_i(z', z) \sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^{k-1} \bar{P}_k(z')\, d\bar{P}_{[k]} \wedge d\lambda'}{|P(z')|^{2m} \langle P(z') - P(z'),\ \bar{P}(z') \rangle^m}$$

и β_i — полиномы. Легко видеть, что знаменатель подинтегрального выражения оценивается снизу величиной $C'(1+|w|^2)^{-N'}$, а все величины, стоящие в числителе, имеют по w степенной рост. Поэтому существуют такие C_1 и N_1, что

$$|a_i(z)| \leqslant C_1 (1+|w|^2)^{N_1} \max_{|\lambda'|=\varepsilon_0} |f(z')|, \qquad z \in S_{C,N}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь функцию χ: $C^{n+1} \to [0, 1]$, удовлетворяющую условиям: (i) $\chi \in C^\infty(C^{n+1})$; (ii) $\chi(z) = 0$, $\forall z \notin S_{C,N}$; (iii) $\chi(z) = 1$, $\forall z \in S_{C/2,N}$.

Заметим, что расстояние любой точки $z \in S_{C/2,N}$ до дополнения к $S_{C,N}$ оценивается снизу величиной $C_2(1+|w|^2)^{-N_2}$. Действительно, из разложения Гефера

$$P_i(z)-P_i(z^*) = \sum_{j=1}^{n+1} G_{i,j}(z, z^*)(z_j-z_j^*)$$

следует, что

$$\forall i: \ |z-z^*| \geqslant \frac{|P_i(z)|-|P_i(z^*)|}{\sup\limits_{i,j} |G_{i,j}(z, z^*)|},$$

и для получения указанной оценки достаточно сослаться на то, что функции $G_{i,j}(z, z^*)$ могут быть выбраны полиномами.

Из сказанного вытекает, что функцию $\chi(z)$ можно выбрать так, чтобы

$$|\bar{\partial}\chi| \leqslant C_3(1+|w|^2)^{N_3}. \tag{17}$$

Положим

$$\tilde{a}_i(z) = \chi(z)\,a_i(z)+\big(1-\chi(z)\big)\,\frac{\bar{P}_i(z)}{|P(z)|^2}f(z).$$

Тогда

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i(z)P_i(z), \qquad \forall z \in G.$$

Оценим $|\bar{\partial}\tilde{a}_i(z)|$. Имеем

$$\bar{\partial}\tilde{a}_i = a_i\bar{\partial}\chi+(1-\chi)f\bar{\partial}\left[\frac{\bar{P}_i}{|P|^2}\right]-f\,\frac{\bar{P}_i}{|P|^2}\,\bar{\partial}\chi$$

и, следовательно,

$$|\bar{\partial}\tilde{a}_i(z)| \leqslant |a_i|\,|\bar{\partial}\chi|+(1-\chi)\,|f|\left|\bar{\partial}\,\frac{\bar{P}_i}{|P|^2}\right|+|f|\,\frac{|P_i|}{|P|^2}\,|\bar{\partial}\chi|.$$

Учитывая (16), (17) и то, что форма $\bar{\partial}\tilde{a}_i$ отлична от нуля лишь в $G\setminus S_{C/2,N}$, получаем теперь, что для любого $k \in N$ найдутся такие положительные числа C_k и M_k, что $\forall z \in G$

$$|\bar{\partial}\tilde{a}_i| \leqslant C_k(1+|w|^2)^{M_k}|P(z)|^k \max_{|\lambda'|=\varepsilon_0} |f(z')|.$$

Зафиксируем $k > m+1$ и положим

$$\nu_M = 2M\ln(1+|w|^2)+2k\ln|P(z)|+2\ln\max_{|\lambda'|=\varepsilon_0}|f(z')|.$$

Очевидно, что

$$\int_G |\bar\partial\tilde a_i|^2 l^{-\nu_{M_k}} dV_{(z)} < \infty.$$

Поэтому (см. [15]) существуют такие функции $\gamma_i \in C^\infty(G)$, что $\bar\partial\gamma_i = \bar\partial\tilde a_i$ и

$$\int_G |\gamma_i|^2 l^{-\nu_{M_k+2}} dV^{(z)} < \infty.$$

Положим $X(z) = \sum_{i=1}^m \gamma_i(z)P_i(z)$. Из определения функций γ_i следует, что $\partial X = 0$ (и, значит, $X \in A(G)$), и при некотором $N_4 > 0$

$$\int_G |X(z)|^2 e^{-\nu_{N_4}} dV_{(z)} < \infty.$$

Отсюда, согласно одной теореме А. Шкоды (см. [14]), заключаем, что функция $X(z)$ представима в виде

$$X(z) = \sum_{i=1}^m h_i(z)P_i(z),$$

где функции $h_i(z) \in A(G)$ и

$$\int_G |h_i|^2 \exp\{-2N_5\ln(1+|w|^2)-2\ln\max_{|\lambda'|=\varepsilon_0}|f(z')|\} dV_{(z)} < \infty.$$

Теперь для доказательства утверждения (b) достаточно положить $g_i = \tilde a_i - \gamma_i + h_i$. Действительно, из изложенного следует, что $\bar\partial g_i = 0$, $\forall i$, $\sum_{i=1}^m g_iP_i = f$ и

$$\int_G |g_i|^2 \exp\{-2N_6\ln(1+|w|^2)-2\ln\max_{|\lambda'|=\varepsilon_0}|f(z')|\} dV_{(z)} > \infty.$$

Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что рассуждения, проведенные при доказательстве п. (b) позволяют также осуществить переход от представления $\Phi-\varphi = \sum\gamma_i^* P_i$ к представлению $\Phi-\varphi = \sum\gamma_i P_i$ (см. конец доказательства утверждения (a_2)) без ссылки на теоремы о когерентных пучках.

Для формулировки леммы 3 нам понадобится обозначение

$$u^{[r]}(z) = [u(z)]^{[r]} = \sup\{u(z'):\ |z'-z| \leqslant r\}.$$

Кроме того, будет использовано отображение проективизации π: $C^{n+1} \to CP^n$, т.е. отображение $s \to \pi s = [s_1, \ldots, s_{n+1}] = \{z \in C^{n+1}:\ z_1 = ws_1, \ldots, z_{n+1} = ws_{n+1},\ w \in C\}$. Через $B(\varkappa_0, R)$ мы будем обозначать шар в пространстве CP^n с центром в точке $\varkappa_0 \in CP^n$ и радиусом R, а через $G^* = G^*(\varkappa, R, R_0)$ — оболочку голоморфности области

$$G = G(\varkappa, R, R_0) = \{z \in C^{n+1}:\ z \in \pi^{-1}(B(\varkappa, R)),\ |z| > R_0\}.$$

Условимся также говорить, что полиномиальное отображение P: $C^{n+1} \to C^m$ удовлетворяет условию (A), если старшие однородные составляющие Q_i многочленов P_i таковы, что множество A_Q, $Q = (Q_1, \ldots, Q_m)$ имеет чистую коразмерность m и, кроме того, на каждой неприводимой компоненте множества A_P максимум ранга матрицы Якоби отображения P равен m. Нетрудно видеть, что из выполнения условия (A) следует, что $\operatorname{codim} A_p = m$.

Лемма 3. *Пусть $P(z)$ — полиномиальное отображение $C^{n+1} \to C^m$, удовлетворяющее условию* (A). *Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и любого $\varkappa_0 \in CP^n$ можно указать такую область $G(\varkappa_0, R, R_0)$, $R = R(\varepsilon, \varkappa_0)$, $R_0 = R_0(\varepsilon, \varkappa_0)$, что для любых функций $\varphi \in A(C^{n+1})$ и $u(z) \in \mathrm{PSH}(C^{n+1})$, связанных неравенством*

$$\ln|\varphi(z)| \leqslant u(z), \qquad \forall z \in A_P.$$

в G^* существует функция $\Phi(z) \in A(G^*)$, удовлетворяющая условиям:

1° $\ln|\Phi(z)| \leqslant C + N\ln(1+|z|^2) + u^{[2\varepsilon|z|]}(z), \quad \forall z \in G^*$;

2° $\Phi(z) - \varphi(z) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(z)P_i(z)$, *где* $a_i(z) \in A(G^*)$,

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $\varkappa_0 = [0, \ldots, 0, 1]$. Положим $\tilde P(z) = \tilde P(t, w) = P(tw, w)$, $\tilde\varphi(z) = \tilde\varphi(t, w) = \varphi(tw, w)$. Заметим, что старшие коэффициенты $\tilde Q_i(t)$ разложения полиномов $\tilde P_i(t, w)$ по степеням w связаны со старшими составляющими $Q_i(z)$ полиномов $P_i(z)$ равенством $\tilde Q_i(t) = Q_i(t_1, \ldots, t_n, 1)$. Поэтому из условия (A) следует, что множество $A_{\tilde Q}$, где $\tilde Q = (\tilde Q_1, \ldots, \tilde Q_m)$, имеет чистую коразмерность m. В этой ситуации, как известно (см., например, [6]), можно так выбрать базис в пространстве $C^n_{(t)}$, что отображение $\tilde Q(t^*) = \tilde Q(t_1^*, \ldots, t_m^*, 0, \ldots, 0)$ будет иметь в начале координат изолированный корень. Нетрудно видеть также, что в силу условия (A) упомянутый базис можно считать таким, что Якобиан J_P отображения P по переменным $t_1, \ldots, t_m$ не равен тождественно нулю на Λ_P. Тогда применима лемма 2, согласно которой для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\varepsilon_0'' \in [0, \varepsilon/4)$, $R_0' > 0$, $\tilde{\Phi}(t, w) \in A(\tilde{G})$, где $\tilde{G} = \{(t, w)\colon |t| \leqslant \varepsilon_0'', |w| > R_0'\}$, что

1° $\ln|\tilde{\Phi}(z)| \leqslant C + N\ln(1+|w|^2) + \ln\sup\{|\tilde{\varphi}(z')|\colon |t'| < \varepsilon, (t', w') \in \Lambda_P\}$, $\forall z \in G$;

2° $\tilde{\Phi}(z) - \tilde{\varphi}(z) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i(z)\tilde{P}_i(z)$, $\tilde{a}_i \in A(\tilde{G})$.

Положим $\Phi(z) = \Phi(t, w) = \tilde{\Phi}(t_1/w, \ldots, t_n/w, w)$, $a_i(z) = a_i(t, w) = \tilde{a}_i(t_1/w, \ldots, t_n/w, w)$, $i = 1, \ldots, m$. Очевидно, что функции $\Phi(z)$ и $a_i(z)$ голоморфны в области $\{z\colon |t| < \varepsilon_0''|w|, |w| > R_0\}$. Выберем R и R_0 так, чтобы $B(\varkappa_0, R) \subset \pi\{z\colon |t| \leqslant \varepsilon_0''|w|\}$ и чтобы $\Phi(t, w) \subset A(G)$.

Тогда

$$\ln|\Phi(z)| \leqslant C + N\ln(1+|w|^2) + \ln\sup\{|\varphi(z')|\colon z' \in \Lambda_p, |t'| < \varepsilon|w|\} \leqslant$$
$$\leqslant C + N\ln(1+|z|^2) + u^{[2\varepsilon|z|]}(z), \qquad \forall z \in G^*,$$

и

$$\Phi(z) - \varphi(z) = \sum_{i=1}^{m} a_i(z)P_i(z), \qquad a_i(z) \in A(G^*).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $P(z)$ — то же, что и в лемме 3, и пусть $\varkappa_0$ — какая-нибудь точка из CP^n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любых $R > 0$, $R_0 > 0$ существует такая область $\tilde{G} = G^*(\varkappa_0, \tilde{R}, \tilde{R}_0)$, $\tilde{R} = \tilde{R}(\varkappa_0, \varepsilon, R)$, $\tilde{R}_0 = \tilde{R}_0(\varkappa_0, \varepsilon, R, R_0)$, что каждую функцию $f = \sum_{i=1}^{m} a_i P_i$, где $a_i \in A(G)$, $G = G(\varkappa_0, R, R_0)$, удовлетворяющую условию*

$$\ln|f(z)| \leqslant u(z), \qquad \forall z \in G,$$

где $u(z) \in \mathrm{PSH}(G)$, можно в $\tilde{G}$ представить в виде

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(z)P_i(z),$$

где $\beta_i \in A(\tilde{G})$ и

$$\ln|\beta_i(z)| \leqslant C + N\ln(1+|z|^2) + u^{[2\varepsilon|z|]}(z), \qquad \forall z \in \tilde{G}. \tag{18}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3, положим $\varkappa_0 = [0, \ldots, 0, 1]$, $\tilde{P}(z) = P(tw, w)$, $\tilde{f}(z) = f(tw, w)$, $\tilde{a}_i(z) = a_i(tw, w)$.

Заметим, что при некоторых $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и R'_0 функция $\tilde{f}$ голоморфна в области $\{z\colon |t| < \varepsilon_1, |w| > R'_0\}$. Поэтому согласно п. (b) леммы 2 существует такая область $G_1 = \{z\colon |t| < \varepsilon''_0, |w| > R''_0\}$, $\varepsilon''_0 \in (0, \varepsilon_1/4)$, что функция $\tilde{f}$ допускает в ней представление

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\beta}_i \tilde{P}_i,$$

где $\tilde{\beta}_i \in A(G_1)$ и

$$\int_{G_1} |\tilde{\beta}_i(z)|^2 \exp\{-N\ln(1+|w|^2) - 2\ln \sup_{|t'|\leqslant\varepsilon''_0} |\tilde{f}(z')|\}\, dV_{(z)} \to \infty.$$

Положим $\beta_i(z) = \tilde{\beta}_i(t_1/w, \ldots, t_n/w, w)$. Очевидно, что функции $\beta_i(z)$ голоморфны в области $G_2 = \{z\colon |t| \leqslant \varepsilon''_0 |w|, |w| > R''_0\}$, и что в этой области имеет место равенство

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(z) P_i(z).$$

Выберем теперь $\tilde{R}$ и $\tilde{R}_0$ так, чтобы выполнялись включения

$$B(\varkappa_0, \tilde{R}) \subset \pi G_2$$

и

$$\tilde{G} \overset{\mathrm{def}}{=} G^*(\varkappa_0, \tilde{R}, \tilde{R}_0) \subset G_2.$$

Тогда

$$\int_{\tilde{G}} |\beta_i(z)|^2 \exp\{-N\ln(1+|z|^2) - 2u^{[2\varepsilon|z|]}(z)\}\, dV_{(z)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{G_1} |\tilde{\beta}_i(z)|^2 \exp\{-N\ln(1+|w|^2) - 2\ln \sup_{|t'|\leqslant 2\varepsilon''_0|w|} |f(z')|\}\, dV_{(z)} < \infty.$$

Отсюда стандартным образом получается оценка (18).

Лемма доказана.

§ 2. Леммы о когомологиях. Для „склейки" продолжений, построенных в предыдущем параграфе, необходимы некоторые утверждения, относящиеся к коцепям специального типа.

Вначале введем соответствующие покрытия и операции их измельчения.

Пусть $P(z) = P^{(0)}(z) = (P_1, \ldots, P_m)$ — полиномиальное отображение, удовлетворяющее условию (A). Обозначим $P^{(j)} = (P_1, \ldots, P_{m-j})$.

Очевидно, что каждое такое отображение $P^{(j)}$ также удовлетворяет условию (A) (с заменой m на $m-j$).

При фиксированном $\varepsilon>0$ сопоставим каждой точке $\varkappa\in CP^n$ числа $R^{(j)}(\varkappa)$ и $R_0^{(j)}(\varkappa)$ так, чтобы область (²) $G^*(\varkappa, R^{(j)}(\varkappa), R_0^{(j)}(\varkappa))$ обладала относительно отображения $P^{(j)}$ свойствами, указанными в лемме 3. Обозначим $R(\varkappa)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}R^{(j)}(\varkappa)$, $R_0(\varkappa)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}R_0^{(j)}(\varkappa)$. Далее для отображения $P^{(j)}$, точки $\varkappa$ и чисел $R>0$, $R_0>0$ определим согласно лемме 4 числа $\tilde R^{(j)}(\varkappa, R, R_0)$ и $\tilde R_0^{(j)}(\varkappa, R, R_0)$. Обозначим $\tilde R(\varkappa, R, R_0)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\tilde R^{(j)}(\varkappa, R, R_0)$, $\tilde R_0(\varkappa, R, R_0)=\max\limits_{j}\tilde R^{(j)}(\varkappa, R, R_0)$. Из покрытия пространства CP^n шарами $B(\varkappa, R(\varkappa))$ выберем конечное подпокрытие $\{B_k^{(0)}\}_{k=1}^{p_0}=\{B(\varkappa_k^{(0)}, R(\varkappa_k^{(0)}))\}_{k=1}^{p_0}$. Положим $r_{0,0}=\max\limits_{k}R_0(\varkappa_k^{(0)})$. Тогда семейство „конусов" $G_{k,0}\overset{\text{def}}{=}\{G^*(\varkappa_k^{(0)}, R(\varkappa_k^{(0)}), r_{0,0})\}$, $k=1,\ldots,p_0$ вместе с шаром $G_{0,0}=\{z\colon |z|<\sigma_0\}$, где $\sigma_0>r_{0,0}$ образует покрытие пространства C^{n+1}, которое мы обозначим через $U^{(0)}$. Далее выберем r_1 так, чтобы при любом $\varkappa$ шар $B(\varkappa, 3r_1)$ содержался в каком-нибудь из шаров $B_k^{(0)}$, и рассмотрим покрытие пространства CP^n шарами $B(\varkappa, \tilde R(\varkappa, r_1, r_{0,0}))$. Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие $\{B_k^{(1)}\}_{k=1}^{p_1}=\{B(\varkappa_k^{(1)}, \tilde R(\varkappa_k^{(1)}, r_1, r_{0,0}))\}$. Положим $r_{0,1}=\max\{r_{0,0}, \max\limits_{k}\tilde R_0(\varkappa_k^{(1)}, r_1, r_{0,0})\}$. „Конусы" $G_{k,1}\overset{\text{def}}{=}G^*(\varkappa_k^{(1)}, \tilde R(\varkappa_k^{(1)}, r_1, r_{0,0}), r_{0,1})$ вместе с шаром $G_{0,1}=\{z\colon |z|<\sigma_1\}$, $\sigma_1>r_{0,1}$ образуют покрытие пространства C^{n+1}, которое мы обозначим через $U^{(1)}$. Выбирая затем r_2 так, чтобы для любого $\varkappa$ существовало такое k, что $B(\varkappa, 3r_2)\subset B_k^{(1)}$, и рассуждая так же, как при построении покрытия $U^{(1)}$, получим покрытие $U^{(2)}$, образованное областями $G_{k,2}=G^*(\varkappa_k^{(2)}, \tilde R(\varkappa_k^{(2)}, r_2, r_{0,1}), r_{0,2})$, $k=1,\ldots,p_2$ (³). Аналогично строятся покрытия $U^{(3)}$, $U^{(4)}$ и т.д. До сих пор числа σ_i удовлетворяли условию $\sigma_i>r_{0,i}$, а в остальном были произвольны. Потребуем теперь, чтобы при заданном $\mathfrak{M}\in N$ выполнялись неравенства $\sigma_0>\sigma_1>\ldots>\sigma_{\mathfrak{M}}$, и рассмотрим соответствующий конечный набор покрытий $U^{(0)}, U^{(1)}, \ldots, U^{(\mathfrak{M})}$. Для этого набора покрытий опеределим отображения измельчения $\varrho_l\colon U^{(l)}\to U^{(l-1)}$, сопоставляя шару $G_{0,l}$ шар $G_{0,l-1}$, а „конусу" $G_{k,l}$ какой-нибудь из тех „конусов" $G_{k',l-1}$, для которых $B(\varkappa_k^{(l)}, 3r_l)\subset B_{k'}^{(l-1)}=B(\varkappa_{k'}^{(l-1)}, \tilde R(\varkappa_{k'}^{(l-1)}, r_{l-1}, r_{0,l-2}))$. Такой выбор конуса $G_{k',l-1}$, или, что то же самое, пары $(k', l-1)$ возможен, поскольку по построению r_l выбрано так, чтобы для любой точки $\varkappa\in CP^n$ существовало число k, при котором $B(\varkappa, 3r_l)\subset B_k^{(l-1)}$.

Отметим, что $G_{k,l}\subset\varrho_lG_{k,l}=G_{k',l-1}$. Это следует из того, что $r_{0,l}>r_{0,l-1}$ и $B_k^{(l)}\subset B(\varkappa_k^{(l)}, r_l)\subset B_{k'}^{(l-1)}$.

(²) Обозначения те же, что и в § 1.

(³) Всюду далее мы предполагаем, что $p_0<p_1<\ldots$

Суперпозицию отображений $\varrho_{l+1}, \varrho_{l+2}, \ldots, \varrho_{\hat{l}}$, $\hat{l} > l$, обозначим через $\varrho_{l,\hat{l}}$. Таким образом, $\varrho_{l,\hat{l}}$ есть отображение из $U^{(\hat{l})}$ в $U^{(l)}$.

Рассмотрим теперь пересечения элементов рассматриваемых покрытий. Обозначим $J = (j_0, \ldots, j_\nu)$, $G_{J,l} = G_{j_0,l} \cap \ldots \cap G_{j_\nu,l}$, $\varrho_{l,\hat{l}} G_{J,\hat{l}} = \varrho_{l,\hat{l}} G_{j_0,\hat{l}} \cap \ldots \cap \varrho_{l,\hat{l}} G_{j_\nu,\hat{l}}$. Покажем, что если $G_{J,l} \neq \emptyset$ и $j_k \neq 0$, $k = 0, \ldots, \nu$, то

$$(19) \qquad G_{j_k,l} \subset \varrho_l G_{J,l}, \qquad \forall k = 0, \ldots, \nu,$$

и, более того, имеют место включения

$$(20) \qquad G(\varkappa^{(l)}_{(j_k)}, r_l, r_{0,l-1}) \subset \varrho_l G_{J,l}, \qquad k = 0, \ldots, \nu.$$

Действительно, пусть $G_{k,l} \cap G_{t,l} \neq \emptyset$. Тогда $B^{(l)}_k \cap B^{(l)}_t \neq \emptyset$, и так как $\tilde{R}(\varkappa, r, r_0) < r$, $\forall \varkappa, r, r_0$, то $B(\varkappa^{(l)}_k, r_l) \cap B(\varkappa^{(l)}_t, r_l) \neq \emptyset$, и, следовательно,

$$(21) \qquad \bar{B}(\varkappa^{(l)}_k, r_l) \cup \bar{B}(\varkappa^{(l)}_t, r_l) \subset B(\varkappa^{(l)}_k, 3r_l) \cap B(\varkappa^{(l)}_t, 3r_l).$$

По построению $\varrho_l G_{k,l} = G_{k',l-1}$, $\varrho_l G_{t,l} = G_{t',l-1}$, причем $B(\varkappa^{(l)}_k, 3r_l) \subset B^{(l-1)}_{k'}$ и $B(\varkappa^{(l)}_t, 3r_l) \subset B^{(l-1)}_{t'}$. Отсюда, из (21) и того, что $r_{0,l-1} < r_{0,l}$, заключаем, что

$$G(\varkappa^{(l)}_k, r_l, r_{0,l-1}) \cup G(\varkappa^{(l)}_t, r_l, r_{0,l-1}) \subset \varrho_l[G_{k,l}] \cap \varrho_l[G_{t,l}].$$

Переход к произвольному числу областей $G_{j_k,l}$ очевиден. Тем самым доказано включение (20) и, как следствие, включение (19).

Введем теперь необходимые для наших целей пространства коцепей. Зададимся какой-нибудь функцией $u(z) \in \mathrm{PSH}(C^{n+1})$ и назовем специальной коцепью ранга ν на покрытии $U^{(l)}$ конечную систему γ функций $\gamma^J \in A(G_{J,l})$, $0 \leqslant j_0, \ldots, j_\nu \leqslant p_l$, кососимметричную относительно индексов $j_0, \ldots, j_\nu$ и такую, что при $j_0 \geqslant 1, \ldots, j_\nu \geqslant 1$ на $G_{J,l} \neq \emptyset$ выполняется неравенство

$$\ln|\gamma^J(z)| \leqslant C + N\ln(1+|z|^2) + u^{[\varepsilon|z|]}(z).$$

Пространства всех таких коцепей обозначим через $C^\nu(U^{(l)})$. Через $C_{q,\mu}(G)$, где G — область в C^{n+1}, обозначим пространство „коцепей" h систем функций $h_I \in A(G)$, $I = (i_1, \ldots, i_q)$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_q \leqslant \mu$, кососимметричных относительно индексов $i_1, \ldots, i_q$. Для удобства записи примем $G_{0,\mu} = A(G)$.

Положим

$$C^\nu_{q,\mu} = C^\nu_{q,\mu}(U^{(l)}) = C^\nu(U^{(l)}) \otimes \Lambda^q C^\mu.$$

Иными словами, $C^{\nu}_{0,\mu}(U^{(l)}) = C^{\nu}(U^{(l)})$, а если $q \geqslant 1$, то

$$\gamma \in C^{\nu}_{q,\mu}(U^{(l)}) \Leftrightarrow \gamma = \{\gamma^J_I\},$$

где функция $\gamma^J_I \in A(G_{J,l})$, кососимметрична в отдельности по индексам $i_1, \ldots, i_q$ и $j_0, \ldots, j_\nu$ и

$$\ln|\gamma^J_I(z)| \leqslant C + N\ln(1+|z|^2) + u^{[e|z|]}(z), \qquad \forall z \in G_{J,l} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим теперь линейное отображение θ_μ: $C_{q+1,\mu}(G) \to C_{q,\mu}(G)$, $\mu \leqslant m$, определенное равенствами $(\theta_\mu \gamma)_I = \sum\limits_{i=1}^{\mu} \gamma_{I,i} P_i$, где P_i — полиномы, участвующие в образовании покрытий $U^{(l)}$.

Заметим далее, что множество $\tilde{C}_{q,\mu}(G_{J,l})$, образованное при заданном J системами γ^J функций $\{\gamma^J_I\}$, $\gamma \in C^{\nu}_{q,\mu}(U^{(l)})$, является подмножеством пространства $C_{q,\mu}(G_{J,l})$. Поэтому определение оператора θ_μ очевидным образом распространяется и на пространство $C^{\nu}_{q,\mu}(U^{(l)})$. Именно, если $\gamma \in C^{\nu}_{q+1,\mu}(U^{(l)})$, то

$$(\theta_\mu \gamma)^J_I = \sum_{i=0}^{\mu} \gamma_{J,i} P_i.$$

В дальнейшем будет необходим также оператор кограницы δ: $C^{\nu}_{q,\mu}(U^{(l)}) \to C^{\nu+1}_{q,\mu}(U^{(l)})$, который определяется обычным образом, то есть посредством равенств

$$(\delta\gamma)^J_I = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{k+1} \gamma^{J[k]}_I,$$

где $J_{[k]} = (j_0, \ldots, j_{k-1}, j_{k+1}, \ldots, j_\nu)$.

Очевидно, что $\theta^2_\mu = 0$, $\delta^2 = 0$ и $\theta_\mu \delta = \delta \theta_\mu$. Отметим также, что имеется естественное вложение $C_{q,\mu-1}(G) \subset C_{q,\mu}(G)$, и, следовательно, оператор θ_μ определен и на пространствах $C_{q,\mu-1}(G)$ и $C^{\nu}_{q,\mu-1}(U^{(l)})$. Именно, если $\eta \in C_{q,\mu-1}$ или $\eta \in C^{\nu}_{q,\mu-1}$, то $\theta_\mu \eta \overset{\mathrm{def}}{=} \theta_{\mu-1}\eta$.

Отображения измельчения ϱ_l стандартным образом ([4]) индуцируют отображения сужения ϱ^*_l: $C^{\nu}_{q,\mu}(U^{(l-1)}) \to C^{\nu}_{q,\mu}(U^{(l)})$, которые, очевидно, коммутируют с операторами θ_μ и δ. С этими же операторами, конечно, коммутируют и суперпозиции $\varrho^*_{l,\hat{l}} = \varrho^*_{\hat{l}} \circ \ldots \circ \varrho^*_{l+1}$, отвечающие суперпозициям $\varrho_{l,\hat{l}} = \varrho_{l+1} \circ \ldots \circ \varrho_{\hat{l}}$.

([4]) То есть $(\varrho^*_l \gamma)^J_I = \gamma^{J'}_I|_{G_{J,l}}$, где индексы j'_k определены условием $\varrho_l(G_{j_k,l}) = G_{j'_k,l-1}$.

Лемма 5. *Пусть* $\gamma \in C^{\nu+1}_{q,\mu}(U^{(l)})$, $l \leqslant \mathfrak{M}-\nu$ *и пусть* $\delta\gamma = 0$. *Тогда существует такая коцепь* $\eta \in C^{\nu}_{q,\mu}(U^{(l+\nu)})$, *что*

$$\delta\eta = \overset{*}{\varrho}_{l,l+\nu}\gamma.$$

Доказательство этой леммы мы опускаем, поскольку оно стандартно и в существенном повторяет доказательство предложения 7.6.1 из [15].

Следующие далее леммы 6–9 с точностью до выбора покрытий и коцепей носят достаточно стандартный характер и близки по своему содержанию соответствующим утверждениям из [3].

Лемма 6. *Пусть области* $G_{J^{(0)},l}, \ldots, G_{J^{(k)},l+k}, \ldots$; $j_i^{(0)} \geqslant 1$, *таковы, что* $\varrho_{l+k}G_{J^{(k)},l+k} = G_{J^{(k-1)},l+k-1}$. *Пусть, далее,* $\gamma \in C_{q,\mu}(G_{J^{(0)},l})$. *Тогда найдется такое число* $\hat{l} = \hat{l}(q, \mu)$, *что*

(a) *если* $q \geqslant 1$ *и* $\theta_\mu\gamma = 0$, *то существует такая коцепь* $\eta \in C_{q+1,\mu}(G_{J^{(\hat{l})},l+\hat{l}})$, *что* $\theta_\mu\eta = \overset{*}{\varrho}_{l,l+\hat{l}}\gamma$;

(b) *если* $q = 0$ *и функция* γ *принадлежит идеалу, порожденному в* $A(G_{J^{(0)},l})$ *полиномами* $P_1, \ldots, P_\mu$, *то существует такая коцепь* $\eta \in C_{1,\mu}(G_{J^{(\hat{l})},l+\hat{l}})$, *что* $\theta_\mu\eta = \overset{*}{\varrho}_{l,l+\hat{l}}\gamma$.

Доказательство. 1° Пусть $q = 0$. Справедливость утверждения (b) при $\hat{l} = 1$ следует непосредственно из леммы 4 с учетом свойств покрытий и их измельчений.

2° Пусть $q = 1$ и пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\mu}$ — базис в C^μ. Тогда „$\gamma \in C_{1,\mu}$, $\theta_\mu\gamma = 0$" означает: $\gamma = \sum_{i=1}^{\mu}\gamma_i e_i$ и $\sum_{i=1}^{\mu}\gamma_i P_i = 0$. Отсюда согласно лемме 2.1 из [2], заключаем, что γ_μ принадлежит идеалу, порожденному в $A(G_{J^{(0)},l})$ полиномами $P_1, \ldots, P_{\mu-1}$, т.е. мы находимся в условиях пункта 1°. Поэтому найдется коцепь $\tilde{\eta} \in C_{1,\mu-1}(G_{J^{(l_1)},l+l_1})$, где $l_1 = \hat{l}(0, \mu-1)$, такая, что $\overset{*}{\varrho}_{l,l+l_1}\gamma_\mu = \theta_{\mu-1}\tilde{\eta}$. Положим теперь $\tilde{\eta}\wedge e_\mu = \eta^{(1)} \in C_{2,\mu}(G_{J^{(l_1)},l+l_1})$;

$$\overset{*}{\varrho}_{l,l+l_1}\gamma - \theta_\mu\eta^{(1)} = \gamma^{(1)} \in C_{1,\mu}(G_{J^{(l_1)},l+l_1}).$$

Очевидно, $\theta_\mu\gamma^{(1)} = 0$. Кроме того, $(\theta_\mu\eta^{(1)})_\mu = \theta_{\mu-1}\tilde{\eta} = \overset{*}{\varrho}_{l,l+l_1}\gamma_\mu$, в силу чего $\gamma_\mu^{(1)} = 0$, т.е. $\gamma^{(1)} \in C_{1,\mu-1}(G_{J^{(l_1)},l+l_1})$ и, следовательно, $\theta_{\mu-1}\gamma^{(1)} = \theta_\mu\gamma^{(1)} = 0$.

Продолжая этот процесс $\mu-1$ раз, приходим к следующей ситуации: $\gamma^{(\mu-1)} \in C_{1,1}(G_{J^{(\hat{l}(1,\mu))},\hat{l}+l(1,\mu)})$ где $\hat{l}(1, \mu) = \hat{l}(0, \mu-1) + \ldots + \hat{l}(0, 2)$, $\theta_1\gamma^{(\mu-1)} = 0$. Отсюда $\gamma^{(\mu-1)} \equiv 0$, и искомой коцепью будет коцепь $\eta = \varrho_{l+l_1,l+\hat{l}(1,\mu)}\eta^{(1)} + \ldots + \eta^{(\mu-2)}$.

3° Пусть теперь $q \geqslant 2$ и для всех меньших q утверждение доказано. Представим γ в виде $\gamma = \omega^{(1)} \wedge e_\mu + \omega^{(2)}$, где $\omega^{(1)} \in C_{q-1,\mu-1}$, $\omega^{(2)} \in C_{q,\mu-1}$. Это, очевидно, возможно. Покажем, что если $\theta_\mu \gamma = 0$, то $\theta_{\mu-1}\omega^{(1)} = 0$. Действительно, для любого $I = (i_1, \ldots, i_{q-1})$ имеем:

$$\theta = (\theta_\mu \gamma)_{I_\mu} = \big(\theta_\mu(\omega^{(1)} \wedge l_\mu)\big)_{I_\mu} = \sum_{i=1}^{\mu} (\omega^{(1)} \wedge l_\mu)_{Ii} P_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu-1} \omega^{(1)}_{Ii} P_i) \wedge l_\mu = (\theta_{\mu-1}\omega^{(1)})_I \wedge l_\mu,$$

откуда $\theta_{\mu-1}\omega^{(1)} = 0$. Теперь в силу предположения индукции имеем: существует коцепь $\tilde{\eta} \in C_{q,\mu-1}(G_{J(l_1),l+l_1})$, где $l_1 = \hat{l}(q-1,\ \mu-1)$, такая, что $\theta_{\mu-1}\tilde{\eta} = \overset{*}{\varrho}_{l,l+l_1}\omega^{(1)}$.

Положим теперь $\tilde{\eta} \wedge e_\mu = \eta^{(1)} \in C_{q+1,\mu}(G_{J(l_1),l+l_1})$;

$$\overset{*}{\varrho}_{l,l+l_1}\gamma - \theta_\mu \eta^{(1)} = \gamma^{(1)} \in C_{q,\mu}(G_{J(l_1),l+l_1}).$$

Нетрудно видеть, что $\gamma^{(1)}$ не зависит от e_μ, и, стало быть,

$$\theta_{\mu-1}\gamma^{(1)} = \theta_\mu \gamma^{(1)} = \overset{*}{\varrho}_{l,l+l}\theta_\mu \gamma - \theta_\mu^2 \eta^{(1)} = 0.$$

Доказательство заканчивается так же, как в пункте 2°.

Лемма 7. *Пусть G — ограниченная псевдовыпуклая область в C^{n+1} и пусть $\gamma \in C_{q,\mu}(G)$. Тогда*

(a) *если $q \geqslant 1$ и $\theta_\mu \gamma = 0$, то существует такое $\eta \in C_{q+1,\mu}(G)$, что $\theta_\mu \eta = \gamma$;*

(b) *если $q = 0$ и функция γ принадлежит идеалу, порожденному в $A(G)$ полиномами $P_1, \ldots, P_\mu$, то существует такое $\eta \in C_{1,\mu}(G)$, что $\theta_\mu \eta = \gamma$.*

Доказательство этой леммы опускается, поскольку оно представляет собой упрощенный вариант доказательства леммы 6 (отсутствуют требования на рост функций).

Лемма 8. *Пусть $\gamma \in C^{\nu}_{q,\mu}(U^{(l)})$ и пусть $\hat{l}(q,\mu) + l < \mathfrak{W}$. Тогда*

(a) *если $q \geqslant 1$, $\theta_\mu \gamma = 0$, то существует такая коцепь $\eta \in C^{\nu}_{q+1,\mu}(U^{(l+\hat{l}(q,\mu))})$, что $\theta_\mu \eta = \overset{*}{\varrho}_{l,l+\hat{l}(q,\mu)}\gamma$;*

(b) *если $q = 0$ и каждая функция γ^J принадлежит идеалу, порожденному в $\hat{A}(G_{J,l})$ полиномами $P_1, \ldots, P_\mu$, то существует коцепь $\eta \in C^{\nu}_{1,\mu}(U^{(l+\hat{l}(0,\mu))})$ такая, что $\theta_\mu \eta = \overset{*}{\varrho}_{l,l+\hat{l}(0,\mu)}\gamma$.*

Эта лемма является простым следствием лемм 6 и 7, поскольку ввиду очевидного равенства $[\theta_\mu\gamma]^J = \theta_\mu[\gamma^J]$, $\forall\gamma \in C^\nu_{q,\mu}(U^{(l)})$, построение искомой коцепи сводится к построению соответствующих коцепей $\eta^J \in C_{q+1,\mu}(G_{J,l+\hat{l}(q,\mu)})$ для каждого $J = (j_0, \ldots, j_\nu)$, $j_0 \leqslant \ldots \leqslant j_\nu$, в отдельности.

Лемма 9. (a) *Пусть* $\gamma \in C^\nu_{q,\mu}(U^{(l)})$, $\mathfrak{W} > (\mu-q-1)\nu+\hat{l}(\mu-1, \mu)+\hat{l}+\sum_{k=1}^{\mu-q-1}\left(\hat{l}(q+k-1, \mu)+k\right)$, *где* $\hat{l}(q, \mu)$ *определено в лемме* 6, $q \geqslant 1$, *и пусть* $\theta_\mu\gamma = \delta\gamma = 0$. *Тогда существует такая коцепь* $\eta \in C^\nu_{q+1,\mu}(U^{(l+L)})$, *где* $L = L(q, \mu, \nu) \leqslant (\mu-q-1)\nu+\hat{l}(\mu-1, \mu)+\sum_{k=1}^{\mu-q-1}\left(\hat{l}(q+k-1, \mu)+k\right)$, *что* $\theta_\mu\eta = \varrho^*_{l,l+L}\gamma$ *и* $\delta\eta = 0$.

(b) *Пусть* $\gamma \in C^\nu_{0,\mu}(U^{(l)})$, $\mathfrak{W} > (\mu-1)\nu+\hat{l}(\mu-1, \mu)+\sum_{k=1}^{\mu-1}\left(\hat{l}(k-1, \mu)+\hat{l}+k\right)$, *и пусть при каждом* J *функция* γ^J *принадлежит идеалу, порожденному в* $A(G_{J,l})$ *полиномами* $P_1, \ldots, P_\mu$ *и* $\delta\gamma = 0$. *Тогда существует коцепь* $\eta \in C^\nu_{1,\mu}(U^{(l+L)})$, *где* $L = L(0, \mu, \nu) \leqslant (\mu-1)\nu+\hat{l}(\mu-1, \mu)+\sum_{k=1}^{\mu-1}\left(\hat{l}(k-1, \mu)+k\right)$, *такая, что* $\delta\eta = 0$ *и*

$$\theta_\mu\eta = \varrho^*_{l,l+L}\,\gamma.$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай [5] $\gamma \in C^\nu_{\mu-1,\mu}(U^{(l)})$. Согласно условию доказываемой леммы, коцепь γ удовлетворяет, в том числе, и условию леммы 8, применяя которую, получаем, что $\varrho^*_{l,l+L}\gamma = \theta_\mu\eta$, где $L = \hat{l}(\mu-1, \mu)$, $\eta \in C^\nu_{\mu,\mu}(U^{(l+L)})$. Заметим, что для каждого $I_{[k]} = (1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, \mu)$, $k = 1, \ldots, \mu$, имеет место равенство

$$[\theta_\mu\eta]^J_{I_{[k]}} = (-1)^{\mu+k}P_k\eta^J_I.$$

Следовательно,

$$[\varrho^*_{l,l+L}\,\gamma]^J_{I_{[k]}} = (-1)^{\mu+k}P_k\eta^J_I.$$

Отсюда, учитывая, что $\delta\gamma = 0$, заключаем, что $\delta\eta = 0$. Тем самым показано, что коцепь η — искомая и $L(\mu-1, \mu, \nu) = \hat{l}(\mu-1, \mu)$.

Предполагая теперь, что для всех $q > q_0$ и всех ν утверждение доказано, докажем его при $q = q_0$. Итак, пусть $\gamma \in C^\nu_{q_0,\mu}(U^{(l)})$ и $\theta_\mu\gamma = \delta\gamma = 0$. Применяя вновь лемму 8, заключаем, что существует та-

---

([5]) Случай $q > \mu$ бессодержателен, поскольку тогда $\gamma \equiv 0$.

кая коцепь $\eta^{(1)} \in C^{\nu}_{q_0+1,\mu}(U^{(l+l_1)})$, где $l_1 = \hat{l}(q_0, \mu)$, что $\theta_\mu \eta^{(1)} = \varrho^*_{l,l+l_1}\gamma$. Далее положим $\eta^{(2)} = \delta\eta^{(1)}$. Очевидно,

$$\eta^{(2)} \in C^{\nu+1}_{q_0+1,\mu}(U^{(l+l_1)}), \qquad \delta\eta^{(2)} = 0,$$
$$\theta_\mu \eta^{(2)} = \theta_\mu \delta\eta^{(1)} = \delta\theta_\mu \eta^{(1)} = \delta\varrho^*_{l,l+l_1}\gamma = 0.$$

Согласно предположению индукции найдется такая коцепь $\eta^{(3)} \in C^{\nu+1}_{q_0+2,\mu}(U^{(l+l_2)})$, где $l_2 = L(1+q_0, \mu, \nu+1)$, что $\theta_\mu \eta^{(3)} = \varrho^*_{l+l_1,l+l_2}\eta^{(2)}$ и $\delta\eta^{(3)} = 0$. Применяя затем лемму 5, получим коцепь $\eta^{(4)} \in C^{\nu}_{q_0+2,\mu}(U^{(l+l_3)})$, где $l_3 = l_2+\nu+1$, такую, что $\delta\eta^{(4)} = \varrho^*_{l+l_2,l+l_3}\eta^{(3)}$.

Положим теперь $\varrho^*_{l+l_1,l+l_3}\eta^{(1)} - \theta_\mu\eta^{(4)} = \eta \in C^{\nu}_{q_0+1,\mu}(U^{(l+l_3)})$.

Имеем:

$$\theta_\mu \eta = \varrho^*_{l+l_1,l+l_3}\theta_\mu \eta^{(1)} = \varrho^*_{l,l+l_3}\gamma;$$

$$\delta\eta = \varrho^*_{l+l_1,l+l_3}\eta^{(2)} - \varrho^*_{l+l_2,l+l_3}\theta_\mu\eta^{(3)} = \varrho^*_{l+l_2,l+l_3}(\varrho^*_{l+l_1,l+l_2}\eta^{(2)} - \theta_\mu\eta^{(3)}) = 0$$

что и требовалось. При этом $L(q_0, \mu, \nu) = l_3 = \hat{l}(q_0, \mu)+\nu+1+L(q_0+ +1, \mu, \nu+1)$. Нетрудно подсчитать, что

$$L(q_0, \mu, \nu) \leqslant (\mu-q_0+1)\nu + \sum_{k=1}^{\mu-q_0+1}\left(\hat{l}(q_0+k-1, \mu)+k\right)+\hat{l}(\mu-1, \mu).$$

Лемма доказана.

Для склейки локальных продолжений, полученных в предыдущем параграфе, мы будем использовать лемму 9 при $\nu = 1$, $q = 0$, $\mu = m$. Кроме того, мы будем пользоваться также следующей ниже леммой 10, непосредственно вытекающей из леммы 9.

Лемма 10. *Для данного полиномиального отображения P: $C^{n+1}\to C^m$, удовлетворяющего условию* (A), *и числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\hat{C}$ и $\hat{N}$, что для каждого $u = \{u_i\} \in A^m(C^{n+1})$ найдется $V \in A^m(C^{n+1})$, такое, что*

1° $\sum P_i V_i = \sum P_i u_i$;

2° $\ln|V(z)| \leqslant \hat{C}+\hat{N}\ln(1+|z|^2)+\ln|\sum P_i u_i|^{[\varepsilon|z|]}(z)$.

§3. Основные результаты. Вначале рассмотрим случай продолжения в классе функций с заданной мажорантой общего вида.

Теорема 1. *Пусть $P(z)$ — полиномиальное отображение C^{n+1} b C^m, удовлетворяющее условию* (A), *и пусть $u(z) = \mathrm{PSH}(C^{n+1})$, а $\varphi(z) \in A(\Lambda_P)$, причем*

$$\ln|\varphi(z)| \leqslant u(z), \qquad \forall z \in \Lambda_P.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *и любой целой функции* $\varphi_0(z)$, *совпадающей на* Λ_P *с функцей* $\varphi(z)$, *найдется такая целая функция* $\Phi(z) - \Phi_{\varepsilon,\varphi_0}(z)$, *что* $\Phi(z) - \varphi_0(z) = \sum_{i=1}^{m} a_i(z)P_i(z)$, *где* $a_i \in A(C^{n+1})$ *и при некоторых постоянных* C_ε *и* N_ε *имеет место оценка*

$$\ln|\Phi(z)| \leqslant C_\varepsilon + N_\varepsilon \ln(1+|z|^2) + u^{[\varepsilon|z|]}(z), \quad \forall z \in C^{n+1}. \tag{22}$$

Доказательство. Возьмем число $\mathfrak{M}$, удовлетворяющее неравенству $\mathfrak{M} > m-1+\hat{l}(m-1, m)+\sum_{k=1}^{m-1}(\hat{l}(k-1, m)+k)$, и построим соответствующую цепочку покрытий $U^{(0)}, \ldots, U^{(\mathfrak{M})}$. Согласно лемме 3 существует такая коцепь $\gamma \in C^0(U^{(0)})$, что при любом $j_0 = 0, \ldots, p_0$ разность $\gamma^{j_0} - \varphi_0$ принадлежит идеалу, порожденному в $A(G_{j_0,0})$ полиномами $P_1, \ldots, P_m$. Рассмотрим теперь коцепь $\eta = \delta\gamma$. Эта коцепь принадлежит пространству $C^1(U^{(0)})$, а ее элементы η^{j_0,j_1} принадележат, соответственно, идеалам, порожденным в $A(G_{(j_0,j_1),0})$ полиномами $P_1, \ldots, P_m$. Кроме того, $\delta\eta = 0$, и, используя лемму 9, можно заключить, что при некотором $\hat{l} < \mathfrak{M}$ существует такая коцепь $\tilde{\eta} \in C^1_{1,m}(U^{(l)})$, что $\theta_m\tilde{\eta} = \varrho^*_{0,l}\eta$ и $\delta\tilde{\eta} = 0$. Пусть $\eta^{(1)} \in C^0_{1,m}(U^{(l)})$ такова, что $\delta\eta^{(1)} = \eta$. Положим $\tilde{\gamma} = \varrho^*_{0,l}\gamma - \theta_m\tilde{\eta}^{(1)}$. Тогда $\tilde{\gamma} \in C^0(U^{(l)})$ и $\delta\tilde{\gamma} = 0$. Следовательно, коцепь $\tilde{\gamma}$ порождена некоторой функцией $\Phi \in A(C^{n+1})$, то есть $(\tilde{\gamma})^{j_0} = \Phi|_{G_{j_0,l}}$, $\forall j_0$. Из определения коцепей γ, $\tilde{\gamma}$ и оператора θ_m следует, что в каждой области $G_{j_0,l}$ сужение функции $\Phi - \varphi_0$ принадлежит идеалу, порожденному в $A(G_{j_0,l})$ полиномами $P_1, \ldots, P_m$. Согласно известным свойствам когерентных пучков, отсюд авытекает, что функция $\Phi - \varphi_0$ принадлежит идеалу, порождаемому этими полиномами и в пространстве $A(C^{n+1})$.

Оценка (22) вытекает из оценок, фигурирующих в определении пространства $C_0(U^{(l)})$, и того, что $\tilde{\gamma} \in C^0(U^{(l)})$, а $\Phi|_{G_{j_0,l}} = (\tilde{\gamma})^{j_0}$.

Теорема доказана.

При сужении класса мажорант $u(z)$ теорема 1 допускает усиление.

Теорема 2. *Пусть* P, u *и* φ *те же, что и в теореме* 1, *и пусть дополнительно, при некотором* $\varrho > 0$, $u(z) = \psi(z) + o(|z|^\varrho)$, *где* $\psi(z)$ — *непрерывная позитивно однородная порядка* $\varrho > 0$ *плюрисубгармоническая функция. Тогда для любой целой функции* $\varphi_0(z)$, *совпадающей на* Λ_p *с функцией* $\varphi(z)$, *найдется такая целая функция* $\Phi(z)$, *что* $\Phi(z) - \varphi_0(z) = \sum a_i(z)P_i(z)$, *где* $a_i \in A(C^{n+1})$ *и в* C^{n+1} *выполняется неравенство*

$$\ln|\Phi(z)| \leqslant \psi(z) + o(|z|^\varrho).$$

Доказательство. Возьмем какую-либо монотонно стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел ε_j. Сопоставим числу ε_j

и фигурирующей в условии теоремы функции φ_0 функцию $\Phi_j(z) = \Phi_{\varepsilon_j}, \varphi_0(z)$, где $\Phi_{\varepsilon,\varphi_0}(z)$ — функция из утверждения теоремы **1.** Соответствующие числа C_{ε_j} и N_{ε_j} (см. неравенство (22)) обозначим через C_j и N_j. Из обусловленных теоремой 1 свойств функций $\Phi_j(z)$ следует, что функции $F_j = \Phi_{j+1} - \Phi_j$ удовлетворяют условиям $F_j = \sum_{i=1}^{m} a_{j,i}P_i$, где $a_{j,i} \in A(C^{n+1})$ и

$$\ln|F_j| \leqslant \max\{C_j, C_{j+1}\} + \max\{N_j, N_{j+1}\}\ln(1+|z|^2) + \psi^{[\varepsilon_j|z|]}(z) + o(|z|^\varrho). \tag{23}$$

Заметим, что, поскольку функция $\psi(z)$ позитивно однородна и непрерывна, то

$$\sup_{z\in C^{n+1}} |z|^{-\varrho}|\psi^{[\varepsilon|z|]}(z) - \psi(z)| \underset{\varepsilon\to 0}{=} o(1).$$

Поэтому из (23) следует, что

$$\ln|F_j(z)| \leqslant C_j' + N_j'\ln(1+|z|^2) + \psi(z) + \tilde{\varepsilon}_j|z|^\varrho,$$

где $\tilde{\varepsilon}_j \to 0$ при $j\to\infty$.

Применяя теперь лемму 10, заключаем, что функция $F_j(z)$ представима в виде $F_j(z) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^j P_i$, где $\beta_i^j \in A(C^{n+1})$ и

$$\ln|\beta_i^j(z)| \leqslant C_j'' + N_j''\ln(1+|z|^2) + \varphi(z) + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_j|z|^\varrho,$$

где $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_j \to 0$ при $j\to\infty$.

Выберем последовательность чисел $R_j \nearrow \infty$ так, чтобы $R_{j+1} > R_j + 4$, $R_0 > 4$, и чтобы при $R_{j-2} < |z| < R_{j+2}$ выполнялись неравенства

$$\ln|\Phi_j| \leqslant \psi(z) + \varepsilon_j'|z|^\varrho, \qquad \varepsilon_j' = 2\max\{\varepsilon_j, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_j\}, \tag{24}$$

$$\ln|\beta_i^j| \leqslant \psi(z) + \varepsilon_j'|z|^\varrho, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{25}$$

Далее устроим разбиение единицы $\{a_j\}$, подчиненное покрытию C^{n+1} областями $Q_j = \{R_{j-1} - 2 < |z| < R_j + 2\}$. Очевидно, что функции $a_j(z)$ можно выбрать так, чтобы $a_j(z) = 1$ при $R_{j-1} + 1 < |z| < R_j - 1$, $\operatorname{supp} a_j \subset Q_j$ и чтобы

$$\sup_{z,j} |\bar{\partial} a_j| < \infty.$$

Определим на Q_j функции b_i^j, полагая

$$b_i^j = \beta_i^{j-1}a_{j-1} - \beta_i^j a_{j+1}.$$

Поскольку $Q_j \cap Q_{j-2} = \emptyset$, а на $Q_j \cap Q_{j+1}$, $b_i^{j+1} - b_i^j = \beta_i^j \in A(C^{n+1})$, то равенствами $V_i = \bar\partial b_i^j$ на Q_j в C^{n+1} формы V_i корректно определены как элементы пространства $C^\infty_{(0,1)}(C^{n+1})$, т.е. как внешение формы типа $(0, 1)$ во всем пространстве C^{n+1} с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

Далее будем использовано решение $\bar\partial$-проблемы в весовых пространствах. При этом необходима специальная весовая функция. Именно, построим по числам R_j и ε_j' функцию $\gamma(t)$ такую, что

1° $\gamma(t) \searrow 0$ при $t \to +\infty$;

2° $\gamma(t) > 2\varepsilon_j'$ при $t \in (R_{j-2}, R_{j+1})$;

3° $\gamma(|z|)|z|^\rho \in \mathrm{PSH}(C^{n+1})$

(по поводу существования такой функции см. [7], [13]).

Положим

$$\chi(z) = 2\psi(z) + 2\gamma(z)|z|^\rho.$$

Из оценок (23)–(26) следует, что

$$\int_{C^{n+1}} |V_i|^2 e^{-\chi} dV_z < \infty, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, по упоминавшейся уже теореме Хермандера [15], существуют такие функции $U_i \in C^\infty(C^{n+1})$, что $\bar\partial U_i = V_i$ и

$$\int_{C^{n+1}} |U_i|^2 e^{-\chi - 2\ln(1+|z|^2)} dV_z < \infty. \tag{27}$$

Положим теперь $g_i^j = U_i - b_i^j$, $\Phi = \Phi_j - \sum g_i^j P_i$ на Q_j. Заметим, что определение функции Φ корректно, поскольку

$$\Big(\Phi_j(z) - \sum g_i^j(z) P_i(z)\Big) - \Big(\Phi_{j+1}(z) - \sum g_i^{j+1}(z) P_i(z)\Big) = \sum \beta_i^j P_i - \sum \beta_i^j P_i = 0,$$
$$\forall z \in Q_j \cap Q_{j+1}.$$

Далее, при $z \in Q_j$ имеем $\bar\partial\Phi = [\bar\partial(U_i - b_i^j)]P_i = 0$.

Следовательно, $\Phi \in A(C^{n+1})$. Наконец, используя оценки (25), (24) и (27) заключаем, что

$$\int_{C^{n+1}} |\Phi|^2 \exp\{-\chi(z) - (2 + 2\max_i \deg P_i)\ln(1+|z|^2)\} dV_z < \infty,$$

откуда стандартным образом получаем, что

$$\ln|\Phi(z)| \leqslant C + \tfrac{1}{2}\chi(z) + N\ln(1+|z|^2) = \psi(z) + o(|z|^\rho).$$

Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно заметить, что на Q_j

$$\Phi-\varphi_0 = \Phi_j-\varphi_0-\sum g_i^j P_i,$$

и, значит, локально функция $\Phi-\varphi_0$ принадлежит идеалам, порождаемым полиномами $P_1, \ldots, P_m$, откуда следует, что $\Phi-\varphi_0$ принадлежит и идеалу, порождаемому теми же полиномами в пространстве $A(C^{n+1})$.

Теорема доказана.

Непосредственными следствиями теоремы 2 являются следующие далее теоремы о продолжении в классах функций с индикатором, не превосходящим данной функции и с заданным типом. Прежде, чем привести соответствующие формулировки, введем понятия типа и радиального индикатора для функций, аналитических на алгебраическом множестве.

Напомним, что тип $\sigma(F)$ целой функции $F(z)$ порядка ϱ определяется равенством

$$\sigma(F) = \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\varrho}\ln\max\{|F(z)|:\ |z|\leqslant r\}.$$

Тип $\sigma(f, \Lambda_P)$ функции $f(z)$, голоморфной на Λ_P, определим (см. [9]) по аналогии равенством

$$\sigma(f;\Lambda_P) = \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\varrho}\ln\max\{|f(z)|:\ z\in\Lambda_P,\ |z|\leqslant r\}.$$

Регуляризованным радиальным индикатором целой функции называют функцию

$$L_r^*(z;F) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{|z'-z|<\varepsilon}\ \overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-\varrho}\ln|F(tz')|.$$

Функция $L_r^*(z;F)$ — плюрисубгармоническая и позитивно однородная порядка ϱ.

Для функции $f\in A(\Lambda_P)$ соответствующее понятие введем [9] следующим образом:

$$L_{r,P}(z;f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-\varrho}\sup\{\ln|f(tz')|:\ |z'-z|<\varepsilon,\ z't\in\Lambda_P\}.$$

Заметим, что для любого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство

$$\ln|f(z)|\leqslant C_\varepsilon+\bigl(\sigma(f,\Lambda_P)+\varepsilon\bigr)|z|^\varrho,\qquad \forall z\in\Lambda_P.$$

С индикатором $L_{r,P}(z,f)$ подобное неравенство несправедливо, однако, если $U(z)$ — какая-нибудь непрерывная позитивно однородная порядка ϱ плюрисубгармоническая функция, мажорирующая индикатор $L_{r,P}(z,f)$, то

$$\ln|f(z)| \leqslant C_\varepsilon + U(z) + \varepsilon|z|^\varrho, \qquad \forall z \in \Lambda_P.$$

Эти оценки показывают возможность применения в рассматриваемых ситуациях теоремы 2. При этом получаются следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть $f(z) \in A(\Lambda_P)$, а полиномиальное отображение P: $C^{n+1} \to C^m$ удовлетворяет условию* (А). *Пусть, далее, функция $f(z)$ имеет конечный тип $\sigma(f; \Lambda_P)$ при порядке ϱ. Тогда существует такая целая функция $F(z)$, что*

1° $F(z) = f(z)$, $\forall z \in \Lambda_P$;

2° $\sigma(F) = \sigma(f; \Lambda_P)$.

Теорема 4. *Пусть $f(z) \in A(\Lambda_P)$, а полиномиальное отображение P: $C^{n+1} \to C^m$ удовлетворяет условию* (А). *Пусть, далее, $L_{r,P}(z; f) \leqslant U(z)$, $z \in C^{n+1}$, где $U(z)$ — непрерывная позитивно однородная порядка ϱ плюрисубгармоническая функция. Тогда существует такая целая функция $F(z)$ конечного порядка $\leqslant \varrho$, что*

1° $F(z) = f(z)$, $\quad \forall z \in \Lambda_P$;

2° $L_r(z; F) \leqslant U(z)$, $z \in C^{n+1}$.

§ 4. Дополнения и замечания. Отметим, что теорема 2 на самом деле дает нам решение более общей задачи, чем та, которую мы решали в теоремах 3–4. Задача, о которой идет речь, состоит в том, чтобы, имея оценки типа и индикатора функции $f \in A(\Lambda_P)$, рассматриваемой как сужение на Λ_P некоторой целой функции $\tilde{f}$, найти функцию F из класса эквивалентности $[\tilde{f}]$ фактора $A(C^{n+1})/I_P$ (пространства всех целых функций по идеалу, порожденному P_i, $i = 1, \ldots, m$), тип и индикатор которой удовлетворяют тем же оценкам. Приведем соответствующие результаты.

Теорема 5. *Пусть полиномиальное отображение P: $C^{n+1} \to C^m$ удовлетворяет условию* (А). *Пусть, далее, $\tilde{f}(z)$ — целая функция, а функция $f(z) \overset{\text{def}}{=} \tilde{f}|_{\Lambda_P}$ имеет конечный тип $\sigma(f; \Lambda_P)$ при порядке ϱ. Тогда в классе $[\tilde{f}] \in A(C^{n+1})I_P$ найдется целая функция $F(z)$, такая, что $\sigma(F) = \sigma(f; \Lambda_P)$.*

Теорема 6. *Пусть полиномиальное отображение P: $C^{n+1} \to C^m$ удовлетворяет условию* (А). *Пусть, далее, $\tilde{f}(z)$ — целая функция, а индикатор $L_{r,P}(z; f)$ функции $f \overset{\text{def}}{=} \tilde{f}|_{\Lambda_P}$ удовлетворяет неравенству $L_{r,P}(z; f) \leqslant$*

$U(z)$, $z \in C^{n+1}$, где $U(z)$ — непрерывная позитивно однородная порядка ϱ плюрисубгармоническая функция. Тогда в классе $[\tilde{f}] \in A(C^{n+1})/I_P$ найдется целая функция $F(z)$ такая, что $L_r(z; F) \leqslant U(z)$, $z \in C^{n+1}$.

Заметим, что приведенные результаты можно распространить на случай типа и индикатора при уточненном порядке так, как указано в [9].

Литература

[1] Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Новосибирск, Наука, 1979.

[2] E. Bedford, T. Kawai, *Local extension of solutions of systems of linear differential equations with constant coefficients*, Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977), 235–254.

[3] C. A. Bernstein, B. A. Taylor, *Interpolation problems in C^n with applications to harmonic analysis*, J. Analyse Math. 38 (1980), 188–254.

[4] I.-E. Björk, *On extensions of holomorphic functions satisfying a polynomial growth condition on algebraic varieties in C^n*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 1974, 24.4, 157–165.

[5] L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables*, Harper and Row., New York 1968.

[6] М. Эрве, *Функции многих комплексных переменных*, М.: Мир, 1965.

[7] A. Martineau, *Indicatrices de croissance des fonctions entieres de N variables*, Invent. Math. 3, Berlin 1967, 16–19.

[8] В. П. Паламодов, *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, М.: Наука, 1967.

[9] Л. И. Ронкин, *О продолжении с оценками функций, голоморфных на нулевом множестве псевдополинома*, Сиб. мат. журн. 24 (1983), 150–163.

[10] Л. И. Ронкин, *О теоремах Лиувилля для функций, голоморфных на нулевом множестве полинома*, Укр. мат. журн. 31 (1979), 582–586.

[11] —, *О продолжении функции конечного порядка, голоморфной на нулевом множестве полинома от двух переменных*; В сб. *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, вып. 32, Харьков: Вища школа (1979), 70–77.

[12] —, *О продолжении с оценками функций, голоморфных на нулевом множестве полинома*; В сб. *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, вып. 36, Харьков: Вища школа (1981), 89–103.

[13] —, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, М.: Наука, 1971.

[14] H. Skoda, *Système fini on infini de générateurs dans un espace de fonctions holomorphes avec poids*, C.R. Acad. Sci. Paris 273, 389–392.

[15] Л. Хермандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, М.: Мир, 1967.

[16] —, *Оценки в L^2 и теоремы существования для оператора $\bar{\partial}$*, Сб. Мат. 10 (1966), 59–116.

INSTITUTE FOR LOW TEMPERATURE PHYSICS AND ENGINEERING
UKR. SSR ACADEMY OF SCIENCES
KHARKOV, USSR

Reçu par la Rédaction le 5.02.1984