ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1970)

Sur les comitantes algébriques des objets géométriques non transitifs

par E. Siwek (Katowice)

Introduction. Dans la théorie des objets géométriques on considère le problème de la classification des comitantes algébriques d'un objet géométrique donné Ω, consistant à trouver toutes les classes des comitantes équivalentes de l'objet géométrique Ω. Dans le cas où l'objet géométrique Ω est transitif par rapport à un groupe G, ce problème se réduit au problème algébrique de déterminer tous les sous-groupes du groupe G contenant le sous-groupe de stabilité d'un élément fixe de la fibre de l'objet Ω (voir [2]).

Dans le cas où l'objet géométrique donné Ω n'est pas transitif, on peut attendre que la connaissance des comitantes de ses parties transitives nous permette de faire la classification des comitantes de l'objet Ω. Pourtant ce problème peut être assez compliqué, surtout quand l'objet Ω se décompose en un grand nombre de parties transitives. Le but de la présente note est de donner une méthode générale de classification des comitantes algébriques des objets géométriques non transitifs en supposant la possibilité de faire cette classification pour leurs parties transitives.

1. Notions fondamentales et notations. Un objet géométrique abstrait purement différentiel en un point fixe d'une variété différentielle est déterminé (voir p. ex. [1] et [2]) par un sous-groupe G du groupe L_n^r, un ensemble X appelé *fibre* et une opération $(g, x) \to g \cdot x$ des éléments g du groupe G sur les éléments x de X, prenant ses valeurs dans X et satisfaisant pour $g_1, g_2 \in G$ et $x \in X$ aux conditions

$$g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x, \qquad e \cdot x = x, \tag{1}$$

où e dénote l'unité du groupe G. Comme nous ne considérons dans la suite que des objets géométriques abstraits purement différentiels, nous les appellerons brièvement *objets*. Puisque dans toutes nos considérations le groupe G sera fixé, nous désignerons un objet et sa fibre par la même lettre en utilisant un gros caractère pour l'objet, p. ex. X dénotera la fibre de l'objet $\boldsymbol{X}$. Pour opération intérieure dans le groupe G, ainsi que pour les opérations extérieures définissant des objets différents nous utiliserons des notations multiplicative (pour l'opération intérieure sans point) ne faisant aucune distinction typographique entre les opérations extérieures qui dépendent, en général, des objets correspondants.

Un objet $\boldsymbol{Y}$ est dit *comitante algébrique* (dans la suite nous dirons brièvement *comitante*) de l'objet $\boldsymbol{X}$ s'il existe une application φ de X sur Y satisfaisant à la condition

$$\varphi(g\cdot x) = g\cdot\varphi(x) \tag{2}$$

pour $x\in X$ et $g\in G$. Dans le cas où il existe une bijection φ de X sur Y satisfaisant à la condition (2), les objets $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont dites *équivalents*.

Un objet $\boldsymbol{X}$ est dit *transitif* s'il existe pour tout couple (x, x') d'éléments de sa fibre X un élément $g\in G$ tel que l'on ait

$$x' = g\cdot x.$$

Dans le cas contraire l'objet $\boldsymbol{X}$ est dit *non transitif*. La fibre X d'un objet non transitif se décompose en une famille $\{X_a\}_{a\in A}$ de parties disjointes dans lesquelles l'opération $(g, x)\to g\cdot x$ est déjà transitive. Elles sont appelées *fibres transitives* de l'objet $\boldsymbol{X}$. Tout objet ayant pour fibre une fibre transitive X_a de l'objet $\boldsymbol{X}$ et pour opération extérieure la restriction de l'opération $(g, x)\to g\cdot x$ à X_a sera appelé *partie transitive* de l'objet $\boldsymbol{X}$.

Nous admettons la définition suivante:

Définition. Un objet $\boldsymbol{W}$ sera dit *union* des objets $\boldsymbol{X}_a$ pour $a\in A$ si sa fibre W et l'opération des éléments g du groupe G sur les éléments de la fibre W sont définies de la manière suivante:

$$W \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(x_a, a)\colon\ x_a\in X_a,\ a\in A\}, \tag{3}$$

$$g\cdot(x_a, a) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (g\cdot x_a, a). \tag{4}$$

L'union de la famille $\{\boldsymbol{X}_a\}_{a\in A}$ des objets sera désignée par $\bigcup\limits_{a\in A}\boldsymbol{X}_a$ et nous appellerons tout objet $\boldsymbol{X}_a$, où $a\in A$, *objet partial* ou *partie* de l'objet $\bigcup\limits_{a\in A}\boldsymbol{X}_a$.

2. Objets et leurs parties transitives. La notion d'union des objets géométriques définie plus haut nous permettra de présenter tous les objets non transitifs d'une façon uniforme. Dans ce but nous démontrerons d'abord la proposition suivante:

Proposition. *Tout objet est équivalent à l'union de la famille de ses parties transitives.*

Démonstration. $\{\boldsymbol{X}_a\}_{a\in A}$ étant la famille des parties transitives d'un objet arbitraire $\boldsymbol{X}$ (dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est un objet transitif, la famille

$\{X_a\}_{a\in A}$ ne contient qu'un seul objet X) ses fibres transitives X_a sont disjointes et, par conséquent, l'application

$$\varphi\colon (x_a, a) \to x_a \tag{5}$$

est une bijection entre les fibres: W — de l'objet $\bigcup\limits_{a\in A} X_a$ et X — de l'objet X. De plus, comme cela suit immédiatement de (4) et (5), l'application φ satisfait à la condition (2), ce qui établit l'équivalence des objets $\bigcup\limits_{a\in A} X_a$ et X. Notre proposition se trouve ainsi démontrée.

Nous avons vu plus haut que tout objet transitif X peut être envisagé comme l'union d'une famille triviale, à savoir celle composée d'un seul objet X. Il est aussi facile de voir le contraire: l'objet $\bigcup\limits_{a\in A} X_a$ n'est transitif que dans le cas où $\{X_a\}_{a\in A}$ est une famille triviale composée d'un seul objet transitif. Cela suit immédiatement de la définition de l'union. En vertu de notre proposition il en résulte la conclusion suivante:

Conclusion. *Tout objet X peut être présenté sous la forme*

$$X = \bigcup_{a\in A} X_a, \tag{6}$$

où X_a pour $a\in A$ sont des objets transitifs (à savoir les parties transitives de l'objet X). L'objet X n'est transitif que dans le cas où A ne contient qu'un seul élément.

Dans la suite nous présenterons tous les objets considérés sous la forme (6).

Nous posons encore la question: quand deux objets de la forme (6) sont-ils équivalents? Le théorème suivant nous donne la réponse:

Théorème 1. *Pour que deux objets:*

$$W = \bigcup_{\varkappa\in K} W_\varkappa \quad et \quad Z = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda,$$

où $W_\varkappa$ (pour $\varkappa\in K$) et Z_λ (pour $\lambda\in\Lambda$) sont des objets transitifs, soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe une bijection h de K sur Λ telle que les objets $W_\varkappa$ et $Z_{h(\varkappa)}$ soient équivalents.

Démonstration. *Nécessité.* Comme les objets W et Z sont équivalents il existe (voir le section 1) une bijection ψ de

$$W = \{(w_\varkappa, \varkappa)\colon w_\varkappa\in W_\varkappa, \varkappa\in K\}$$

sur

$$Z = \{(z_\lambda, \lambda)\colon z_\lambda\in Z_\lambda, \lambda\in\Lambda\},$$

telles que l'on ait:

$$\psi(g\cdot w_\varkappa, \varkappa) = g\cdot\psi(w_\varkappa, \varkappa) \tag{7}$$

pour tout $g \in G$. Il en résulte, d'après la transitivité des objets $\boldsymbol{W}_\varkappa$ et $\boldsymbol{Z}_\lambda$ pour $\varkappa \in K$ et $\lambda \in \Lambda$, que la restriction $\psi_\varkappa$ de ψ à $W_\varkappa$ établit l'équivalence entre l'objet $\boldsymbol{W}_\varkappa$ et un objet $\boldsymbol{Z}_{h(\varkappa)}$, où $h(\varkappa) \in \Lambda$. D'après la bijectivité de ψ l'application h ainsi définie doit être une bijection entre K et Λ.

Suffisance. Soit h une bijection de K sur Λ telle que les objets $\boldsymbol{W}_\varkappa$ et $\boldsymbol{Z}_{h(\varkappa)}$ soient équivalents pour $\varkappa \in K$. Pour tout $\varkappa \in K$ il existe alors une bijection $\psi_\varkappa$ de $W_\varkappa$ sur $Z_{h(\varkappa)}$ établissant l'équivalence entre $\boldsymbol{W}_\varkappa$ et $\boldsymbol{Z}_{h(\varkappa)}$, c'est-à-dire satisfaisant à la condition de la forme (7). Alors l'application ψ, définie par la formule:

$$\psi(w_\varkappa, \varkappa) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \big(\psi_\varkappa(w_\varkappa), h(\varkappa)\big),$$

est une bijection de W sur Z (d'après la bijectivité de h et $\psi_\varkappa$ pour tout $\varkappa \in K$) et elle satisfait à la condition (7) (parce que les applications $\psi_\varkappa$ satisfont pour tout $\varkappa \in K$ à cette condition). L'application ψ établit donc l'équivalence entre $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{Z}$ et notre théorème se trouve ainsi entièrement démontré.

3. Comitantes des objets non transitifs. Revenons sur le problème de trouver une forme générale des comitantes d'un objet donné $\boldsymbol{X}$. D'après notre conclusion du paragraphe précédent nous pouvons présenter l'objet donné $\boldsymbol{X}$ ainsi que toute comitante $\boldsymbol{Y}$ de celui-ci sous la forme (6). Cela nous permet d'établir le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Pour qu'un objet*

$$\boldsymbol{Y} = \bigcup_{\beta \in B} \boldsymbol{Y}_\beta,$$

où $\boldsymbol{Y}_\beta$ (pour $\beta \in B$) sont des objet transitifs, soit une comitante de l'objet

$$\boldsymbol{X} = \bigcup_{a \in A} \boldsymbol{X}_a,$$

où $\boldsymbol{X}_a$ (pour $a \in A$) sont des objets transitifs, il faut et il suffit qu'il existe une application f de A sur B telle que l'objet $\boldsymbol{Y}_{f(a)}$ soit une comitante de l'objet $\boldsymbol{X}_a$ pour tout $a \in A$.

Démonstration. *Nécessité.* Soit $\boldsymbol{Y}$ une comitante de $\boldsymbol{X}$. Alors il existe (voir section 1) une application φ de la fibre

$$X = \{(x_a, a) \colon x_a \in X_a, a \in A\}$$

de l'objet $\boldsymbol{X}$ sur la fibre

$$Y = \{(y_\beta, \beta) \colon y_\beta \in Y_\beta, \beta \in B\}$$

de l'objet $\boldsymbol{Y}$ et satisfaisant, en vertu de (2) et (4), à la condition suivante:

$$\varphi[(g \cdot x_a, a)] = g \cdot \varphi[(x_a, a)] \tag{8}$$

pour $g \in G$.

Fixons un $a \in A$ arbitraire. Comme les objets X_a et Y_β pour $\beta \in B$ sont transitifs, il résulte de la condition (8) qu'il existe un élément unique $f(a) \in B$ tel que l'on ait:

$$\varphi(X_a \times a) = Y_{f(a)} \times f(a).$$

L'objet $Y_{f(a)}$ est donc une comitante de l'objet X_a. Comme l'application φ prend ses valeurs dans Y tout entier on doit aussi avoir:

$$f(A) = B$$

et la nécessité se trouve démontrée.

Suffisance. Supposons qu'il existe une application f de A sur B et telle que l'objet $Y_{f(a)}$ soit une comitante de l'objet X_a pour $a \in A$. Il en résulte qu'il existe, pour tout $a \in A$, une application φ_a de X_a sur $Y_{f(a)}$ tout entier et satisfaisant à la condition de la forme (2). Alors l'application φ définie par la formule:

$$\varphi[(x_a, a)] \stackrel{\text{df}}{=} \big(\varphi_a(x_a), f(a)\big),$$

où $x_a \in X_a$ et $a \in A$, transforme X sur Y et satisfait, en vertu de (4), à la condition (8). L'objet Y est donc une comitante de l'objet X et notre théorème se trouve ainsi entièrement démontré.

Dans le cas où la décomposition d'un objet donné X en parties transitives ainsi que la classification de leurs comitantes sont possibles, le théorème 2 détermine la forme générale des comitantes de l'objet X, tandis que le théorème 1 nous donne un critère d'équivalence. Dans ce cas nous pouvons donc classifier les comitantes de l'objet X.

4. Exemple d'application. Pour donner une explication de la méthode générale exposée dans le paragraphe précédent nous considérons un exemple très simple. Nous prenons comme objet donné X la densité directe(¹) de Weyl, c'est-à-dire l'objet déterminé par le groupe $G = GL(n)$, la fibre:

$$X \stackrel{\text{df}}{=} (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \tag{9}$$

et la loi de transformation:

$$(g, x) \to |J|x, \tag{10}$$

où $J \stackrel{\text{df}}{=} \operatorname{Det} g$. L'objet X admet, en vertu de (9) et (10), deux parties transitives X_1 et X_2 à savoir celles qui correspondent aux fibres resp. $X_1 = (-\infty, 0)$ et $X_2 = (0, \infty)$. Donc nous pouvons écrire:

$$X = \bigcup_{i=1}^{2} X_i.$$

(¹) Pour la terminologie concernant les densités et la classification de leurs comitantes voir [3].

Les objets X_1 et X_2, étant équivalents, n'admettent que des comitantes communes. Comme on le sait [3] toute telle comitante est équivalente à l'un des objets suivants:

1° le scalaire trivial (noté dans la suite Y_1) c'est-à-dire l'objet déterminé sur une fibre ne contenant qu'un seul élément y par la loi de transformation de la forme:

$$g\cdot y = y \quad \text{pour tout } g \in G;$$

2° une c-densité circulaire (notée Y_c), c'est-à-dire l'objet déterminé sur la fibre $Y_c = [1, c)$ par la loi de transformation de la forme:

$$g\cdot x = |J| x c^k,$$

où l'entier k est choisi de telle manière que $|J|xc^k$ appartienne à l'intervalle $[1, c)$;

3° la densité directe de Weyl transitive (notée Y_∞), c'est-à-dire p.ex. l'objet X_2 lui-même.

En applicant notre théorème 2 nous obtenons la conclusion suivante: *Toute comitante de la densité directe de Weyl X doit être équivalente soit à l'un des objets Y_c, où $1 \leqslant c \leqslant \infty$, soit à celui de la forme $\bigcup_{i=1}^{2} Y_{c_i}$, où $1 \leqslant c_i \leqslant \infty$ pour $i = 1, 2$.* Comme les objets Y_{c_1} et Y_{c_2} pour $c_1 \neq c_2$ ne sont pas équivalents, deux objets de la forme $\bigcup_{i=1}^{2} Y_{c_i}$ ne sont équivalents que dans le cas où ils coïncident (voir le théorème 1).

L'exemple présenté ici n'a qu'un sens illustratif. Pourtant nous pouvons appliquer les théorèmes 1 et 2 à d'autres objets non transitifs, p.ex. aux objets composés d'un certain nombre d'objets transitifs $X_1, \ldots, X_q$. La fibre et la loi de transformation d'un tel objet X sont définies par les formules:

$$X \stackrel{\text{df}}{=} X_1 \times \ldots \times X_q,$$

$$g\cdot(x_1, \ldots, x_q) \stackrel{\text{df}}{=} (g\cdot x_1, \ldots, g\cdot x_q),$$

où X_i (pour $i = 1, \ldots, q$) dénote la fibre de l'objet X_i, $x_i \in X_i$ et les points figurant dans la dernière formule dénotent resp. les lois de transformation des objets X et $X_1, \ldots, X_q$ (2).

Nous obtenons ainsi des applications plus essentielles de la méthode de classification des comitantes des objets non transitifs présentée dans la note.

---

(2) Comme l'a montré A. Zajtz, tout objet du type J, c'est-à-dire un objet dont la loi de transformation ne dépend que du déterminant J de la matrice $g \in GL(n)$, doit être équivalent à un objet composé de densités et de scalaires (voir [4]).

Travaux cités

[1] M. Kucharzewski et M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Mat. 43, Warszawa 1964.

[2] E. Siwek et A. Zajtz, *Contribution à la théorie des pseudo-objets géométriques*, Ann. Polon. Math. 19 (1967), p. 185-192.

[3] — *Sur les comitantes algébriques des densités*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr 2, Prace Matematyczne I (1969), p. 91-98.

[4] A. Zajtz, *Über die Äquivalenz der geometrischen Objekte*, Ann. Polon. Math. 20 (1968), p. 41-50.

Reçu par la Rédaction le 23. 5. 1969