ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur la condition de Weierstrass pour le minimum d'une intégrale à plusieurs dimensions*

par M. Picone (Roma)

J'emploierai les notations suivantes. Je désignerai:

par D un domaine régulier de l'espace réel à r dimensions, dont le point sera indiqué par x, les coordonnées de celui-ci étant indiquées par $x_1, x_2, \ldots, x_r$;

par ∂D la frontière de D;

par ${}^\circ y(x)$ un vecteur à n coordonnées réelles

$$ {}^\circ y_1(x)\,,\ {}^\circ y_2(x)\,,\ \ldots,\ {}^\circ y_n(x)\,, $$

fonctions du point x de classe C^1 dans le domaine D;

par $\varrho'(x), \varrho''(x)$ deux vecteurs, eux aussi à n coordonnées réelles

$$ \varrho_i'(x)\,, \quad \varrho_i''(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) $$

fonctions du point x, définies dans le domaine D, pouvant, celles-ci, devenir ou être toujours infinies et vérifiant les conditions:

$$ \varrho_i'(x) \geqslant 0\,, \quad \varrho_i''(x) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad x \in D\,, $$
$$ \varrho_i'(x) + \varrho_i''(x) > 0 \quad \text{pour } x \text{ dans l'intérieur de } D \ (i = 1, 2, \ldots, n); $$

par $T({}^\circ y, \varrho', \varrho'')$ l'ensemble, supposé un domaine, de l'espace à $r+n$ dimensions des points

$$ (x, y) \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_n) $$

défini par les conditions

$$ x \in D\,, \quad {}^\circ y_i(x) - \varrho_i'(x) \leqslant y_i \leqslant {}^\circ y_i(x) + \varrho_i''(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n); $$

* Conférence donnée le 17 mai 1962 à la séance de la Section de Cracovie de la Société Polonaise de Mathématiques.

par p la matrice à n lignes et r colonnes

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nr} \end{bmatrix};$$

par

$$f(x, y, p) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_r, \; y_1, y_2, \dots, y_n, \; p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nr})$$

une fonction réelle du point $(x, y, p) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_n, p_{11}, \dots, p_{nr})$ continue dans l'ensemble des points (x, y, p) pour lesquels le point (x, y) est dans T et le point p est arbitraire;

par E l'ensemble, auquel appartient le vecteur ${}^\circ y(x)$, des vecteurs $y(x)$ à n coordonnées réelles

$$y_1(x) \; , \; y_2(x) \; , \; \dots \; , \; y_n(x) \; ,$$

fonctions du point x, de classe C^1 dans D, pour lesquelles, x étant dans D, le point $[x, y(x)] = [x_1, x_2, \dots, x_r, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$ est dans T, vérifiant la condition

$$y(x) = {}^\circ y(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in \partial D \, .$$

En désignant, pour chaque vecteur $y(x)$ de l'ensemble E, par $y'(x)$ la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_r)} \, ,$$

l'identité

$$\begin{aligned} I(y) &\equiv \int_D f[x, \, y(x), y'(x)] dx \\ &\equiv \int_D f\Big[x_1, x_2, \dots, x_r, y_1(x_1, x_2, \dots, x_r) \, , \; y_2(x_1, x_2, \dots, x_r) \, , \; \dots \, , \\ &\qquad y_n(x_1, x_2, \dots, x_r) \, , \frac{\partial}{\partial x_1} y_1(x_1, x_2, \dots, x_r) \, , \frac{\partial}{\partial x_2} y_1(x_1, x_2, \dots, x_r) \, , \; \dots \, , \\ &\qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x_r} y_n(x_1, x_2, \dots, x_r)\Big] dx_1 dx_2 \dots dx_r \end{aligned}$$

définit dans l'ensemble E une fonction réelle $I(y)$ du vecteur $y(x)$.

En supposant la fonction f continue dans T, avec ses dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables p_{ik}, que je désignerai par la notation

$$f_{p_{ik}}(x, y, p) \qquad (i = 1, 2, \dots, n; \; k = 1, 2, \dots, r) \, ,$$

on peut introduire la fonction de Weierstrass, relative à la fonction f, définie par l'identité

$$E_f(x, y, p, p') \equiv f(x, y, p') - f(x, y, p) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} f_{p_{ik}}(x, y, p)(p'_{ik} - p_{ik}),$$

ayant désigné par p' la matrice d'éléments arbitraires p'_{ik}.

Je dirai que la variété $y = {}^\circ y(x)$, où la fonction ${}^\circ y(x)$, vérifie, par rapport à la fonction f, la *condition de Weierstrass*, *positivement*, si l'on a toujours, dans D, la matrice p étant arbitraire,

(1) $$E_f[x, {}^\circ y(x), {}^\circ y'(x), p] \geqslant 0,$$

négativement, si l'on a toujours

(2) $$E_f[x, {}^\circ y(x), {}^\circ y'(x), p] \leqslant 0.$$

Or, comme il est bien connu, si

$$(n-1)(r-1) = 0,$$

la condition (1) est nécessaire pour que la fonction ${}^\circ y(x)$ donne à $I(y)$ le minimum dans l'ensemble E et, par conséquent, la condition (2) est nécessaire pour que la même fonction donne à $I(y)$ le maximum.

Or, on démontre immédiatement que:

I. *La condition de Weierstrass n'est pas nécessaire si*

(3) $$(n-1)(r-1) > 0.$$

Soit, en effet, $I(y)$ constante dans E, alors chaque fonction $y(x)$ de E donne simultanément le minimum et le maximum de $I(y)$ dans E, et pourtant, si la condition de Weierstrass était nécessaire, chaque fonction $y(x)$ de E devrait satisfaire, par rapport à la fonction f, à cette condition, à la fois positivement et négativement. On devrait donc avoir dans D

$$E_f[x, y(x), y'(x), p] \equiv f\big(x, y(x), p\big) - f\big(x, y(x), y'(x)\big) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} f_{p_{ik}}[x, y(x), y'(x)]\left(p_{ik} - \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right) \equiv 0$$

pour n'importe quelle fonction $y(x)$ de E et toute matrice p. Il en suivrait que $f(x, y, p)$ doit être une fonction linéaire des variables p_{ik}. Si donc, la condition (3) étant vérifiée, nous donnons un exemple d'une fonction f non linéaire par rapport à ses variables p_{ik}, pour laquelle $I(y)$

est constante dans E, nous aurons démontré que la condition de Weierstrass n'est pas nécessaire dans ce cas. Voici l'exemple.

Soit $n = r \geqslant 2$, D un domaine rectangulaire de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$,

$$\varrho_i'(x) = \varrho_i''(x) \equiv +\infty \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad {}^\circ y(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D,$$

$$I(y) = \int_D \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n .$$

On a, dans E,

$$I(y) \equiv 0 , \tag{4}$$

et f n'est pas une fonction linéaire des variables p_{ik}. L'identité (4) suit du théorème

II. *Si les fonctions $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont de classe C^1 dans le domaine rectangulaire D, et l'une d'elles est identiquement nulle sur ∂D, on a*

$$\int_D \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 0 .$$

Soit, en effet, par exemple, $y_1(x) \equiv 0$ sur ∂D et les fonctions $y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$ soient de classe C^2 dans D. Désignant par Y_k le complèment algébrique de l'élément $\partial y_1/\partial x_k$ dans le déterminant jacobien considéré, on a

$$I(y) = \int_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} Y_k dx = -\int_D y_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Y_k}{\partial x_k} dx$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Y_k}{\partial x_k} \equiv 0 \qquad \text{dans} \qquad D .$$

Si les fonctions $y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$ ne sont pas de classe deux, mais seulement de classe C^1, elles et leurs dérivées partielles du premier ordre peuvent, respectivement, être approchés uniformément dans D, par des polynomes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et des dérivées partielles homonymes de ceux-ci.

Vu le théorème I, on doit se proposer la question suivante:

Quelle condition nécessaire doit-on substituer à celle de Weierstrass, dans le cas $(n-1)(r-1) > 0$?

A cet égard on possède un théorème dû à M. Mc Shane, dont voici l'énoncé:

III. *En posant:*

$$°y'(x) \equiv °p(x)\,, \qquad \frac{\partial °y_i}{\partial x_k} \equiv °p_{ik}(x)\,,$$

une condition nécessaire pour que la fonction $°y(x)$ *donne à l'intégrale* $I(y)$ *le minimum dans* E, *est que l'on ait, dans* D,

$$E_f[x, °y(x), °p(x), p] \geqslant 0$$

pour toutes les matrices p *pour lesquelles le rang de la matrice*

$$p - °p(x) \equiv \left(p_{ik} - °p_{ik}(x)\right) \tag{5}$$

est non supérieur à 1.

Comme l'a remarqué Bliss, cette condition est simplement une extension de celle qui subsiste dans le cas $(n-1)(r-1) = 0$, dans lequel le rang de la matrice (5), qui se réduit à une ligne si $n = 1$ ou à une colonne si $r = 1$ est toujours non supérieur à 1. Mais j'ai bien des motifs — qui trouvent un bon fondement dans des résultats de certains de mes travaux récents — pour croire qu'il existe une condition nécessaire bien plus forte que celle de M. Mc Shane, selon le théorème suivant:

IV. *Si* $(n-1)(r-1) > 0$, *à chaque fonction* $f(x, y, p)$ *correspondent des fonctions*

$$C_f^{ihjk}(x, y, p, q) \qquad (i < j\,,\ h < k;\ i, j = 1, 2, \dots, n;\ h, k = 1, 2, \dots, r)\,,$$

dont le nombre est $n(n-1)r(r-1)/4$, *pour lesquelles la condition nécessaire pour que la fonction* $°y(x)$ *donne le minimum à* $I(y)$ *dans* E, *est qu'on ait dans le domaine* D, *pour n'importe quelle matrice* p,

$$E_f[x, °y(x), °p(x), p] -$$
$$- \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \sum_{\substack{h,k=1\\ h<k}}^{n} C_f^{ihjk}\left(x, °y(x), °p(x), p - °p(x)\right) \begin{vmatrix} p_{ih} - °p_{ih} & p_{ik} - °p_{ik} \\ p_{jh} - °p_{jh} & p_{jk} - °p_{jk} \end{vmatrix} \geqslant 0\,.$$

Evidemment, si, en particulier, le rang de la matrice $p - °p$ est égal à 1, on retrouve la condition de M. Mc Shane.

Je n'ai pas encore démontré ce théorème. Mais on peut le vérifier dans des cas particuliers.

Par exemple, si la fonction $f(x, y, p)$ est telle que $I(y)$ soit constante dans E, chaque fonction $\bar{y}(x)$ de E donne à la fois le minimum et le maximum à $I(y)$ dans E, et par conséquent, selon le théorème de M. Mc Shane, on doit avoir

$$E_f[x, \bar{y}, \bar{p}, p] = 0 \tag{6}$$

pour toutes les matrices p pour lesquelles la matrice $p-\bar{p}$ a un rang non supérieur à 1. On trouve la dite constante, comme on a vu tout à l'heure, par exemple, pour $r=n=2$, D étant un domaine rectangulaire et ${}^{\circ}y(x)\equiv 0$ sur ∂D, si

$$f\equiv p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21},$$

et l'on trouve, conformément au théorème II,

$$E_f(x,\bar{y},\bar{p},p)-\begin{vmatrix} p_{11}-\bar{p}_{11} & p_{12}-\bar{p}_{12} \\ p_{21}-\bar{p}_{21} & p_{22}-\bar{p}_{22} \end{vmatrix}\equiv 0$$

et non pas seulement (6), pour toutes les matrices p, pour lesquelles le rang de la matrice $p-\bar{p}$ est non supérieur à 1.

Reçu par la Rédaction le 16. 7. 1962