ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur l'objet géométrique représentant une direction munie d'un sens

par S. Gołąb (Kraków), A. Jakubowicz (Szczecin),
M. Kucharzewski (Katowice) et M. Kuczma (Katowice)

En 1946 J. E. Pencow a découvert dans les espaces X_2 des objets géométriques admettant une loi de transformation non linéaire [5]. Ces objets peuvent être généralisés aux espaces X_n à un nombre arbitraire de dimensions et ils peuvent être interprétés comme „directions sans sens" [2], [3].

Etant donné en un point fixé de l'espace X_n un vecteur contravariant v^k posons

$$\omega^\lambda = \frac{v^\lambda}{v^1} \quad (i, k = 1, \dots, n; \lambda, \mu = 2, \dots, n). \tag{1}$$

La suite des composantes

$$\omega = \{\omega^2, \dots, \omega^n\}$$

représente un objet géométrique spécial à $n-1$ composantes de première classe, donc du type $(n-1, n, 1)$ [1] admettant la règle de transformation suivante:

$$\omega^{\lambda'} = \frac{A_1^{\lambda'} + A_\mu^{\lambda'}\omega^\mu}{A_1^{1'} + A_\mu^{1'}\omega^\mu}. \tag{2}$$

En substituant au vecteur v le vecteur ϱv, où le coefficient scalaire ϱ est arbitraire, mais différent de zéro, nous ne changeons pas l'objet ω. C'est pourquoi on peut dire que l'objet ω représente la direction déterminée par tous les vecteurs non nuls linéairement dépendants du vecteur v. L'objet ω est, par conséquent, indépendant du sens de la direction (ϱ pouvant aussi être un nombre négatif).

L'intuition nous dit que la „direction munie d'un sens" est aussi un objet géométrique. La recherche d'un objet à $n-1$ composantes définissant une direction munie d'un sens n'a jusqu'ici pas donné de résultat. D'autre part tous les objets du type $(n-1, n, 1)$ n'ont pas encore été déterminés. Un ancien résultat du premier des auteurs [4], disant que pour $n = 2$ tout comitant algébrique du vecteur v ayant une composante et étant un objet spécial de première classe doit être une fonction homogène d'ordre zéro (et non une fonction positivement homogène) des composantes v^1, v^2, peut être généralisé à un nombre quelconque de dimensions, a guidé la recherche d'un objet définissant la „direction munie d'un sens" pour les objets à n composantes.

Le but de cette Note est précisément de trouver un tel objet géométrique. Cet objet appartient au type d'objets „demi-composés".

Un objet géométrique

$$\Omega_a, \qquad a = 1, \ldots, m,$$

est appelé objet *composé* si la suite d'indices $1, \ldots, m$ peut être décomposée en groupes disjoints tels que les composantes de chaque groupe représentent elles-mêmes un objet géométrique.

Si dans la suite $(1, \ldots, m)$ il existe un groupe d'indices tel que les composantes correspondantes forment elles-mêmes un objet géométrique (partiel), mais les composantes restantes ne possèdent pas cette propriété, alors cet objet est appelé *objet „demi-composé"*.

Soit donné en un point p de X_n un vecteur contravariant non nul v^k. Posons

$$\omega^1 = \operatorname{sgn} v^1, \qquad \omega^\lambda = \frac{v^\lambda}{v^1}. \tag{3}$$

On sait que ω^λ forment un objet du type $(n-1, n, 1)$ admettant la règle de transformation (2). Cherchons la règle de transformation pour ω^1. Nous avons

$$\begin{aligned}\omega^{1'} &= \operatorname{sgn} v^{1'} = \operatorname{sgn}(A_i^{1'} v^i) = \operatorname{sgn}(A_1^{1'} v^1 + A_\lambda^{1'} v^\lambda) = \operatorname{sgn}(A_1^{1'} v^1 + A_\lambda^{1'} \omega^\lambda v^1) \\ &= \operatorname{sgn}[v^1(A_1^{1'} + A_\lambda^{1'} \omega^\lambda)] = \operatorname{sgn} v^1 \cdot \operatorname{sgn}(A_1^{1'} + A_\lambda^{1'} \omega^\lambda) = \omega^1 \operatorname{sgn}(A_1^{1'} + A_\lambda^{1'} \omega^\lambda).\end{aligned}$$

Nous constatons que le second membre ne dépend que des ω^i et des $A_i^{1'}$. Il s'agit maintenant de prouver que la règle

$$\omega^{1'} = \omega^1 \operatorname{sgn}(A_1^{1'} + A_\lambda^{1'} \omega^\lambda) \tag{4}$$

possède la propriété de transitivité. Dans ce but nous prenons encore un troisième système de coordonnées $(\xi^{i''})$ et nous écrivons par analogie avec (4)

$$\omega^{1''} = \omega^{1'} \operatorname{sgn}(A_{1'}^{1''} + A_{\lambda'}^{1''} \omega^{\lambda'}). \tag{5}$$

En substituant (2) et (4) dans le second membre de (5) nous obtenons

$$\begin{aligned}\omega^{1''} &= \omega^1 \operatorname{sgn}(A_1^{1'} + A_\lambda^{1'} \omega^\lambda) \operatorname{sgn}\left(A_{1'}^{1''} + A_{\lambda'}^{1''} \frac{A_1^{\lambda'} + A_\mu^{\lambda'} \omega^\mu}{A_1^{1'} + A_\mu^{1'} \omega^\mu}\right) \\ &= \omega^1 \operatorname{sgn}(A_1^{1'} + A_\lambda^{1'} \omega^\lambda) \operatorname{sgn} \frac{A_{1'}^{1''} A_1^{1'} + A_{\lambda'}^{1''} A_1^{\lambda'} + \omega^\mu [A_{1'}^{1''} A_\mu^{1'} + A_{\lambda'}^{1''} A_\mu^{\lambda'}]}{A_1^{1'} + A_\mu^{1'} \omega^\mu}.\end{aligned}$$

Mais on a

$$A^{1''}_{1'}A^{1'}_{1}+A^{1''}_{\lambda'}A^{\lambda'}_{1} = A^{1''}_{i'}A^{i'}_{1} = A^{1''}_{1}$$

et

$$A^{1''}_{1'}A^{1'}_{\mu}+A^{1''}_{\lambda'}A^{\lambda'}_{\mu} = A^{1''}_{i'}A^{i'}_{\mu} = A^{1''}_{\mu}$$

donc

$$\begin{aligned}\omega^{1''} &= \omega^{1}\operatorname{sgn}(A^{1'}_{1}+A^{1'}_{\lambda}\omega^{\lambda})\operatorname{sgn}\frac{A^{1''}_{1}+A^{1''}_{\mu}\omega^{\mu}}{A^{1'}_{1}+A^{1'}_{\mu}\omega^{\mu}} \\ &= \omega'\operatorname{sgn}\frac{(A^{1'}_{1}+A^{1'}_{\lambda}\omega^{\lambda})(A^{1''}_{1}+A^{1''}_{\mu}\omega^{\mu})}{A^{1'}_{1}+A^{1'}_{\mu}\omega^{\mu}} = \omega'\operatorname{sgn}(A^{1''}_{1}+A^{1''}_{\mu}\omega^{\mu})\end{aligned}$$

et cela montre précisément la transitivité de la formule (4). Nous avons donc établi que l'objet (3) est un objet géométrique spécial de première classe à n composantes. Il est un objet demi-composé. Cet objet, étant un comitant algébrique du vecteur v, possède en outre la propriété que si nous remplaçons le vecteur v par le vecteur ϱv, où ϱ est un scalaire quelconque positif, l'objet ω reste invariant, alors que dans le passage $v \to \varrho v$ avec $\varrho < 0$ la première composante ω^1 change de signe. Ce fait nous permet de traiter l'objet ω comme un objet définissant une „direction munie d'un sens".

Dans l'objet (3) on a $\omega^1 = \operatorname{sgn} v^1$, c'est-à-dire ω^1 est une fonction spéciale de la variable v^1. Cette fonction n'est évidemment pas réversib le

On peut se poser la question si l'objet

$$\omega^1 = \varphi(v^1), \qquad \omega^\lambda = \frac{v^\lambda}{v^1}, \tag{6}$$

où φ dénote une fonction réversible quelconque, est un objet géométrique. La réponse à cette question est positive. Nous avons notamment la proposition suivante:

Si la fonction $\varphi(u)$ est une fonction réversible, alors l'objet ω défini au moyen des formules (6) *représente un objet géométrique* (*spécial de première classe, demi-composé*).

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\omega^{1'} &= \varphi(v^{1'}) = \varphi(A^{1'}_{k}v^{k}) = \varphi[A^{1'}_{1}v' + A^{1'}_{\lambda}v^{\lambda}] = \varphi[A^{1'}_{1}v^{1}+A^{1'}_{\lambda}v^{1}\omega^{\lambda}] \\ &= \varphi[v^{1}(A^{1'}_{1}+A^{1'}_{\lambda}\omega^{\lambda})] = \varphi[(A^{1'}_{1}+A^{1'}_{\lambda}\omega^{\lambda})\varphi^{-1}(\omega^{1})],\end{aligned} \tag{7}$$

où φ^{-1} désigne la fonction inverse de la fonction φ. Pour vérifier la loi de transitivité de la formule (7) (le second membre ne dépend que des ω^k et des $A^{1'}_{k}$) nous prenons, comme auparavant, un troisième système quelconque $(\xi^{i''})$ et nous écrivons

$$\omega^{1''} = \varphi[(A^{1''}_{1'}+A^{1''}_{\lambda'}\omega^{\lambda'})\varphi^{-1}(\omega^{1'})]. \tag{8}$$

Après des calculs simples on constate aisément, en profitant de la formule (8) et des relations (7), (2), que l'on obtient

$$\omega^{1''} = \varphi[(A^{1''}_{1'} + A^{1''}_{\lambda'}\omega^{\lambda})\varphi^{-1}(\omega^{1})]$$

ce qui prouve notre assertion.

Le problème plus général, consistant à poser $\omega^1 = \varphi(v^1, \ldots, v^n)$ au lieu de $\omega^1 = \varphi(v^1)$, semble plus difficile.

Travaux cités

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1956, pp. 144-145.

[3] — *Les derniers résultats dans la théorie des objets géométriques*, Zeszyty Naukowe AGH, Kraków, Rozprawy 6 (1961), pp. 5-21.

[4] — *Sur les objets géométriques à une composante*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), pp. 79-89.

[5] J. E. Pencow, *Classification des objets géométriques différentiels à une composante de classe v* (en russe), Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. 54 (1946), pp. 567-570.

Reçu par la Rédaction le 16. 10. 1962