ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LII (1990)

Sur la famille des fonctions univalentes, bornées et symétriques qui n'atteignent pas une valeur fixée

par J. ŚLADKOWSKA (Gliwice)

Résumé. Soit $S_{1R}(a)$, $|a| < 1$, la famille des fonctions holomorphes dans $U = \{z\colon\ |z| < 1\}$ de la forme

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

où

$$\operatorname{Im} b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$a \notin f(U), \quad f(U) \subset U.$$

On trouve quelques familles de variations pour la fonction $f \in S_{1R}(a)$ (voir les formules (1), (2), (5) et (6)) et les conditions nécessaires pour la fonction extrémale par rapport à une fonctionnelle différentiable (voir les formules (10), (10'), (11), (11'), les théorèmes 1 et 2). On trouve en particulier les bornes supérieures et inférieures pour les fonctionnelles b_1 et b_2 (les formules (15), (24), (25), (26) et (27)).

Soit donné a, $|a| < 1$, un nombre arbitraire, fixé. Désignons par $S_{1R}(a)$ la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans le disque unité U ayant le développement

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

où

$$\operatorname{Im} b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

telles que

$$a \notin f(U), \quad f(U) \subset U.$$

Il est évident que cette famille est normale et elle devient compacte après y ajouter la fonction constante égale à zéro.

Désignons par $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes dans U muni de la topologie de la convergence uniforme sur des compactes de U. Soit $f \in S_{1R}(a)$ et soit g une fonction holomorphe et univalente dans U, $g(0) = 0$, $g(U) \subset U$ et $\operatorname{Im} g^{(n)}(0) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$; on pose $f_1 = f \circ g \in S_{1R}(a)$.

Nous appelons *variation de la fonction* $f \in S_{1R}(a)$ *dans la famille* $S_{1R}(a)$ toute famille des fonctions $\mathscr{F}_j = \{f(z, \varepsilon)\colon \varepsilon \in \mathscr{E}_j\}$, $j = 1, 2, 3$, où $f(z, \varepsilon) \in S_{1R}(a)$,

$$\mathscr{E}_1 = \{\varepsilon\colon \varepsilon \in K(0, \eta)\}, \quad \mathscr{E}_2 = \{\varepsilon\colon -\eta < \varepsilon < \eta\},$$
$$\mathscr{E}_3 = \{\varepsilon\colon 0 \leqslant \varepsilon < \eta\}, \quad \eta > 0,$$

et les limites

$$\lim_{\mathscr{E}_j \ni \varepsilon \to 0} f(z, \varepsilon) = f(z, 0) = f(z), \qquad \lim_{\mathscr{E}_j \ni \varepsilon \to 0} \frac{f(z, \varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} = h_j(z) \in H(U)$$

existent au sens de la convergence presque uniforme dans U.

Nous obtenons la variation la plus simple dans notre famille en admettant

$$f(z, \varepsilon) = f\big((1-\varepsilon)z\big) = f(z) - \varepsilon z f'(z) + o(\varepsilon), \tag{1}$$

où $\varepsilon \in \mathscr{E}_3$. Dans ce cas $h_3(z) = -zf'(z)$.

A présent nous allons chercher l'équivalent de la variation de Löwner dans $S_{1R}(a)$. Dans ce but prenons l'équation différentielle

$$\partial w / \partial t = -wp(w),$$

où

$$p(w) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^{-i\theta}w}{1-e^{-i\theta}w} + \frac{1+e^{i\theta}w}{1-e^{i\theta}w}\right),$$

$\theta \in \langle 0, 2\pi)$. En vertu du théorème 6.3, [2], p. 160, pour tout $z \in U$, cette équation a une solution unique $w = w(z, t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, remplissant la condition initiale $w(z, 0) = z$, telle que $w(z, t)$ soit une fonction absolument continue par rapport à t, pour tout z fixé, et univalente par rapport à z, pour tout t fixé. En outre $w(0, t) = 0$, $|w(z, t)| < 1$. De plus, puisque $p(\bar{w}) = \overline{p(w)}$, on a aussi $w(\bar{z}, t) = \overline{w(z, t)}$. Par conséquent, $w(z, t)$ comme une fonction holomorphe par rapport à z, se développe en série à coefficients réels. Si $f \in S_{1R}(a)$, la fonction composée $f\big(w(z, \varepsilon)\big)$, où $\varepsilon \in \mathscr{E}_3$, avec $\eta > 0$ quelconque, appartient à $S_{1R}(a)$ aussi. Ainsi, on a fait une variation $f(z, \varepsilon) = f\big(w(z, \varepsilon)\big)$. En développant $f(z, \varepsilon)$ en série de Maclaurin suivant les puissances de ε nous obtenons

$$f(z, \varepsilon) = f(z) - \tfrac{1}{2}\varepsilon z f'(z)\left(\frac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z} + \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z}\right) + o(\varepsilon), \tag{2}$$

d'où

$$h_3(z) = -\tfrac{1}{2} z f'(z)\left(\frac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z} + \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z}\right).$$

Notre but maintenant est de trouver une variation du type Schiffer dans la classe $S_{1R}(a)$.

Soit $f \in S_{1R}(a)$. Nous allons effectuer un changement de la frontière $\partial f(U)$, afin d'obtenir la frontière d'un domaine situé dans le disque U, symétrique par rapport à l'axe réel et auquel le point a n'appartient pas.

Soit $w_0 \notin \partial f(U)$, $w_0 \in U$. Posons

$$\Phi(w) = \frac{(w-a)(1-\bar{a}w)(w-\bar{a})(1-aw)}{w^2}$$
$$\times\left(e^{i\alpha}\frac{w+w_0}{w-w_0}+e^{-i\alpha}\frac{w+\bar{w}_0}{w-\bar{w}_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar{w}_0 w}{1-\bar{w}_0 w}-e^{i\alpha}\frac{1+w_0 w}{1-w_0 w}\right), \qquad \alpha \text{ réel.}$$

Il est immédiat de voir que

$$\overline{\Phi(\bar{w})} = \Phi(w), \quad \operatorname{Re}\Phi(w) = 0 \quad \text{pour } w \in \partial U \tag{3}$$

et $\Phi(w)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de la frontière $\partial f(U)$. Soit en plus

$$w^*(w) = w\exp\{\varepsilon\Phi(w)\} = w+\varepsilon w\Phi(w)+o(\varepsilon),$$

où $\varepsilon \in \mathscr{E}_2$. Cette fonction est aussi holomorphe dans un voisinage de $\partial f(U)$ et, vu (3), on a $\overline{w^*(\bar{w})} = w^*(w)$ et $|w^*(w)| = 1$ pour $w \in \partial U$. Elle est univalente dans un voisinage de $\partial f(U)$ et en outre $w^*(\partial f(U)) \subset \bar{U}$ pour ε suffisamment proche de zéro (alors pour η suffisamment petit). De plus, puisque $w^*(a) = a$, donc dans le cas où $a \in \partial f(U)$, $a \in w^*(\partial f(U))$, par contre dans le cas où $a \in \overline{f(U)}$, $a \notin w^*(\partial f(U))$ pour ε suffisamment proche de zéro. On peut donc prendre $w^*(\partial f(U))$ pour frontière d'un domaine simplement connexe $D^* \subset U$, $0 \in D^*$, $a \notin D^*$, symétrique par rapport à l'axe réel. Soit f^* une fonction transformant U d'une manière conforme sur D^*, ainsi que $f^*(0) = 0, f^{*\prime}(0) > 0$. Il est évident que c'est une fonction de la classe $S_{1R}(a)$. Recherchons sa forme. Nous allons utiliser ici le théorème de Golousin [1], p. 99. Conformément à ce théorème il faut trouver la partie principale $S(z)$ du développement en série de Laurent de la fonction

$$\frac{f(z)}{zf'(z)}\Phi(f(z)) = \frac{(f(z)-a)(1-\bar{a}f(z))(f(z)-\bar{a})(1-af(z))}{zf(z)f'(z)} \tag{4}$$
$$\times\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+w_0}{f(z)-w_0}+e^{-i\alpha}\frac{f(z)+\bar{w}_0}{f(z)-\bar{w}_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar{w}_0 f(z)}{1-\bar{w}_0 f(z)}-e^{i\alpha}\frac{1+w_0 f(z)}{1-w_0 f(z)}\right)$$

de centre au point 0 dans la couronne $\{z\colon r < |z| < 1\}$, $r > 0$, où le second membre de (4) est une fonction holomorphe. Si $w_0 \notin \overline{f(U)}$, il y a seulement un point singulier de cette fonction dans le disque U. C'est un pôle du second ordre en $z = 0$. En ce cas

$$S(z) = 2\Bigg(-\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{b_1^2}|a|^2\frac{1}{z^2}+\Bigg((e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\left(\frac{(1+|a|^2)(a+\bar{a})}{b_1}+\frac{3|a|^2 b_2}{b_1^3}\right)$$
$$-\frac{|a|^2}{b_1^2}\left(e^{i\alpha}\frac{b_1}{w_0}+e^{-i\alpha}\frac{b_1}{\bar{w}_0}+e^{-i\alpha}\bar{w}_0 b_1+e^{i\alpha}b_1 w_0\right)\Bigg)\frac{1}{z}\Bigg).$$

La fonction recherchée f^* est de la forme

$$(5)\quad f^*(z) = f(z)+\varepsilon\Bigg\{\frac{(f(z)-a)(1-\bar{a}f(z))(f(z)-\bar{a})(1-af(z))}{f(z)}$$

$$\times\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+w_0}{f(z)-w_0}+e^{-i\alpha}\frac{f(z)+\bar{w}_0}{f(z)-\bar{w}_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar{w}_0f(z)}{1-\bar{w}_0f(z)}-e^{i\alpha}\frac{1+w_0f(z)}{1-w_0f(z)}\right)$$

$$-2f'(z)\Bigg(-\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{b_1^2}|a|^2\frac{1}{z}+(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\left(\frac{(1+|a|^2)(a+\bar{a})}{b_1}+\frac{3|a|^2b_2}{b_1^3}\right)$$

$$-\frac{|a|^2}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{1}{w_0}+e^{-i\alpha}\frac{1}{\bar{w}_0}+e^{-i\alpha}\bar{w}_0+e^{i\alpha}w_0\right)\Bigg)$$

$$+2f'(z)\Bigg(-\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{b_1^2}|a|^2z^3+\Bigg((e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\left(\frac{(1+|a|^2)(a+\bar{a})}{b_1}+\frac{3|a|^2b_2}{b_1^3}\right)$$

$$-\frac{|a|^2}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{1}{w_0}+e^{-i\alpha}\frac{1}{\bar{w}_0}+e^{-i\alpha}\bar{w}_0+e^{i\alpha}w_0\right)\Bigg)z^2\Bigg)\Bigg\}+o(\varepsilon).$$

La fonction (5) est l'équivalent de la variation extérieure de Schiffer et nous allons l'appliquer pour constater des propriétés importantes des domaines extrémales.

Nous allons également trouver une variation intérieure de Schiffer.

Dans ce but admettons que $w_0\in f(U)$; il existe donc $z_0\in U$ tel que $w_0=f(z_0)$. Pour nous servir de nouveau du théorème de Golousin cité ci-dessus nous calculons $S(z)$. Nous obtenons

$$S(z) = \frac{2(f(z_0)-a)(1-\bar{a}f(z_0))(f(z_0)-\bar{a})(1-af(z_0))}{z_0f'^2(z_0)}\frac{e^{i\alpha}}{z-z_0}$$

$$+\frac{2(\overline{f(z_0)}-a)(1-\bar{a}\overline{f(z_0)})(\overline{f(z_0)}-\bar{a})(1-a\overline{f(z_0)})}{\bar{z}_0\overline{f'^2(z_0)}}\frac{e^{-i\alpha}}{z-\bar{z}_0}$$

$$+2\Bigg(-\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{b_1^2}|a|^2\frac{1}{z^2}+\Bigg((e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\left(\frac{3|a|^2b_2}{b_1^3}+\frac{(1+|a|^2)(a+\bar{a})}{b_1}\right)$$

$$-\frac{|a|^2}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{1}{f(z_0)}+e^{-i\alpha}\frac{1}{\overline{f(z_0)}}+e^{-i\alpha}\overline{f(z_0)}+e^{i\alpha}f(z_0)\right)\Bigg)\frac{1}{z}\Bigg),$$

et la fonction recherchée f^* est de la forme

$$(6)\quad f^*(z) = f(z)+\varepsilon\Bigg\{\frac{(f(z)-a)(1-\bar{a}f(z))(f(z)-\bar{a})(1-af(z))}{f(z)}$$

$$\times\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+f(z_0)}{f(z)-f(z_0)}+e^{-i\alpha}\frac{f(z)+\overline{f(z_0)}}{f(z)-\overline{f(z_0)}}\right.$$

$$-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}f(z)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}-e^{i\alpha}\frac{1+f(z_0)f(z)}{1-f(z_0)f(z)}\Big)$$

$$-2zf'(z)\Big(\Big(\frac{(f(z_0)-a)(1-\bar a f(z_0))(f(z_0)-\bar a)(1-af(z_0))}{z_0 f'^2(z_0)}$$

$$\times\Big(\frac{e^{i\alpha}}{z-z_0}-\frac{ze^{i\alpha}}{1-z_0 z}\Big)+\frac{(\overline{f(z_0)}-a)(1-a\overline{f(z_0)})(\overline{f(z_0)}-\bar a)(1-a\overline{f(z_0)})}{\bar z_0\overline{f'^2(z_0)}}$$

$$\times\Big(\frac{e^{-i\alpha}}{z-\bar z_0}-\frac{ze^{-i\alpha}}{1-\bar z_0 z}\Big)\Big)-2f'(z)\Big(-\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{b_1^2}|a|^2\frac{1}{z}$$

$$+\Big((e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\Big(\frac{3|a|^2b_2}{b_1^3}+\frac{(1+|a|^2)(a+\bar a)}{b_1}\Big)$$

$$-\frac{|a|^2}{b_1}\Big(e^{i\alpha}\frac{1}{f(z_0)}+e^{-i\alpha}\frac{1}{\overline{f(z_0)}}+e^{-i\alpha}\overline{f(z_0)}+e^{i\alpha}f(z_0)\Big)\Big)\Big)\Big)$$

$$+2f'(z)\Big(-\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{b_1^2}|a|^2z^3+\Big((e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\Big(\frac{3|a|^2b_2}{b_1^3}+\frac{(1+|a|^2)(a+\bar a)}{b_1}\Big)$$

$$-\frac{|a|^2}{b_1}\Big(e^{i\alpha}\frac{1}{f(z_0)}+e^{-i\alpha}\frac{1}{\overline{f(z_0)}}+e^{-i\alpha}\overline{f(z_0)}+e^{i\alpha}f(z_0)\Big)\Big)z^2\Big)\Big\}+o(\varepsilon).$$

Supposons maintenant que $\Phi(f)$ est une fonctionnelle complexe, continue, définie au moins dans la famille $S_{1R}(a)\cup\{f_0\}$, où $f_0=0$. Il résulte de la continuité de la fonctionnelle $\Phi(f)$ et de la compacité de l'ensemble $S_{1R}(a)\cup\{f_0\}$, qu'il existe une fonction définie dans cet ensemble, pour laquelle la fonctionnelle $\mathrm{Re}\,\Phi(f)$ atteint la valeur maximale ainsi que minimale. A présent nous nous occuperons d'examiner des propriétés des fonctions extrémales à l'aide des formules variationnelles (1), (2), (5), (6) obtenues plus haut.

Soit

$$\mathrm{Re}\,\Phi(f)=\max_{f^*\in S_{1R}(a)\cup\{f_0\}}\mathrm{Re}\,\Phi(f^*)\qquad\Big(\mathrm{Re}\,\Phi(f)=\min_{f^*\in S_{1R}(a)\cup\{f_0\}}\mathrm{Re}\,\Phi(f^*)\Big)$$

et soit $f\neq f_0$. Supposons en plus que la fonctionnelle Φ possède une dérivée complexe au sens de Gateaux au point f, c'est-à-dire qu'il existe une fonctionnelle complexe L linéaire et continue dans l'espace $H(U)$, telle que pour toute fonction $f^*\in\mathscr{F}_j$, où $j=2$ ou $j=3$, on ait

(7) $$\mathrm{Re}\,\Phi(f^*)=\mathrm{Re}\,\Phi(f)+\varepsilon\,\mathrm{Re}\,L(h_j)+o(\varepsilon),\quad j=2 \text{ ou } j=3.$$

Si $j=2$, étant donné (7) et que $\mathrm{Re}\,\Phi$ atteint sa valeur maximale ou minimale en f, nous obtenons l'égalité

(8) $$\mathrm{Re}\,L(h_2)=0.$$

Si par contre $j = 3$, nous n'avons que les inégalitiés suivantes:

$$\operatorname{Re} L(h_3) \leqslant 0 \quad \text{pour maximum,} \tag{9}$$

$$\operatorname{Re} L(h_3) \geqslant 0 \quad \text{pour minimum.} \tag{9'}$$

Il est facile de voir que l'application de la variation (1) et des inégalités (9), (9') nous donne les relations

$$\operatorname{Re} L(zf'(z)) \geqslant 0 \quad \text{dans le cas de maximum,} \tag{10}$$

$$\operatorname{Re} L(zf'(z)) \leqslant 0 \quad \text{dans le cas de minimum,} \tag{10'}$$

comme des conditions nécessaires pour la fonction extrémale pour la fonctionnelle $\operatorname{Re}\Phi$.

L'application de la variation (2) et de mêmes inégalités (10), (10') donne

$$\operatorname{Re}\left\{L\left(zf'(z)\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}\right)\right)\right\} \geqslant 0, \quad \zeta \in \partial U, \tag{11}$$

dans le cas de maximum et

$$\operatorname{Re}\left\{L\left(zf'(z)\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}\right)\right)\right\} \leqslant 0, \quad \zeta \in \partial U, \tag{11'}$$

dans le cas de minimum.

THÉORÈME 1. *Si $f \in S_{1R}(a)$ est la fonction extrémale pour la fonctionnelle* $\operatorname{Re}\Phi$, *décrite plus haut, dans la famille $S_{1R}(a)$ et si la fonction*

$$\begin{aligned} F(w) = {} & L\Bigg(\frac{(f(z)-a)(1-\bar{a}f(z))(f(z)-\bar{a})(1-af(z))}{f(z)} \\ & \times\left(\frac{w+f(z)}{w-f(z)}+\frac{1+wf(z)}{1-wf(z)}\right)-2f'(z)\frac{|a|^2}{b_1}(1-z^2)\left(w+\frac{1}{w}\right)\Bigg) \\ & +L\Bigg(\frac{(f(z)-a)(1-\bar{a}f(z))(f(z)-\bar{a})(1-af(z))}{f(z)} \\ & \times\left(\frac{\bar{w}+f(z)}{\bar{w}-f(z)}+\frac{1+\bar{w}f(z)}{1-\bar{w}f(z)}\right)-2f'(z)\frac{|a|^2}{b_1}(1-z^2)\left(\bar{w}+\frac{1}{\bar{w}}\right)\Bigg) \; (^1). \end{aligned} \tag{12}$$

---

(1) Ici p.ex., la fonction

$$\frac{\mu(z)}{f(z)}\frac{w+f(z)}{w-f(z)}, \quad \text{où} \quad \mu(z) = (f(z)-a)(1-\bar{a}f(z))(f(z)-\bar{a})(1-af(z)),$$

pour $w = f(\zeta)$ a un pôle au point $z = \zeta$ et la fonctionnelle L peut être indéfinie pour cette fonction. Mais, on peut prolonger L de façon continue à toutes les fonctions meromorphes dans U qui ne possèdent pas de pôles sur une circonférence $\{z\colon |z| = r\}$, $0 < r < 1$. En effet, en vertu de la formule de Caccioppoli-Köthe ([3], p. 34) pour la représentation générale de la fonctionnelle de $H'(U)$, on peut exprimer la fonctionnelle L par la formule *est holomorphe dans $U\setminus f(U)$ excepté des points singuliers isolés et n'est égale identiquement à une constante dans aucune composante de cet ensemble, donc cet ensemble n'a pas de points intérieurs.*

Démonstration. Supposons que $U\setminus f(U)$ possède des points intérieurs. En ce cas il existe un disque $K\subset U\setminus f(U)$. En admettant $w_0\in K$ dans la formule variationnelle (5) et en tenant compte de (8) et du fait que α est un nombre arbitraire nous obtenons $F(w_0)=\text{const}$ pour tout $w_0\in K$. Vu que la fonction $F(w)$ est holomorphe dans chaque composante de $U\setminus f(U)$ — cela résulte de la représentation générale de la fonctionnelle linéaire et continue dans $H(U)$, ([3], p. 34) — nous avons la contradiction.

THÉORÈME 2. *Si f est une fonction qui réalise l'extrémum de la fonctionnelle* $\operatorname{Re}\Phi$ *mentionnée ci-dessus, alors*

1° *$w=f(\zeta)$ satisfait à l'équation*

$$\begin{aligned}(13)\quad &\frac{\zeta^2 w'^2}{(w-a)(1-\bar{a}w)(w-\bar{a})(1-aw)}\Bigg\{L\Bigg(\frac{\mu(z)}{f(z)}\bigg(\frac{w+f(z)}{w-f(z)}+\frac{1+wf(z)}{1-wf(z)}\bigg)\\ &+2zf'(z)\bigg(-\frac{|a|^2}{b_1}\Big(\frac{1}{z}-z\Big)\bigg)\Big(\frac{1}{w}+w\Big)-\frac{|a|^2}{b_1^2}\Big(\frac{1}{z^2}-z^2\Big)\bigg)\\ &+\bigg(\frac{3|a|^2b_2}{b_1^3}+\frac{(1+|a|^2)(a+\bar{a})}{b_1}\Big(\frac{1}{z}-z\Big)\bigg)\Bigg)\\ &+L\Bigg(\frac{\mu(z)}{f(z)}\bigg(\frac{\bar{w}+f(z)}{\bar{w}-f(z)}+\frac{1+\bar{w}f(z)}{1-\bar{w}f(z)}\bigg)\\ &+2zf'(z)\bigg(-\frac{|a|^2}{b_1}\Big(\frac{1}{z}-z\Big)\bigg)\Big(\frac{1}{\bar{w}}+\bar{w}\Big)-\frac{|a|^2}{b_1^2}\Big(\frac{1}{z^2}-z^2\Big)\bigg)\\ &+\bigg(\frac{3|a|^2b_2}{b_1^3}+\frac{(1+|a|^2)(a+\bar{a})}{b_1}\Big(\frac{1}{z}-z\Big)\bigg)\Bigg)^{-}\Bigg\}\\ &=L\bigg(zf'(z)\Big(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1+\zeta z}{1-\zeta z}\Big)\bigg)+L\bigg(zf'(z)\Big(\frac{\bar{\zeta}+z}{\bar{\zeta}-z}+\frac{1+\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z}\Big)\bigg)\ (^2).\end{aligned}$$

$$L(h)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}h(z)H(z)\,dz,$$

où $H(z)$ est une fonction holomorphe dans l'ensemble $\{z\colon |z|>r'\}$, $0<r'<1$, et r est un nombre arbitraire de l'intervalle $(r', 1)$. Cette formule nous donne la définition de la fonctionnelle L aussi pour les fonctions $h(z)$ possédant des pôles dans U à l'exception de l'ensemble $\{z\colon |z|=r\}$.

(2) Voir (1).

dans le disque U, où L dénote la dérivée complexe de la fonctionnelle Φ au sens de Gateaux et

$$\mu(z) = (f(z)-a)(1-\bar{a}f(z))(f(z)-\bar{a})(1-af(z));$$

2° *le second membre de* (13) *est une fonction holomorphe dans un voisinage de ∂U et elle est non négative pour $\zeta \in \partial U$ dans le cas de maximum, ou non positive — dans le cas de minimum;*

3° *la fonction f se prolonge d'une manière continue sur le disque fermé $\bar{U}$, et aussi d'une manière holomorphe excepté au plus un nombre fini des points situés sur ∂U, qui sont pour elle des points critiques algébriques;*

4° *si la fonction* (12) *est holomorphe dans $U\backslash f(U)$, excepté éventuellement des points singuliers isolés, n'est égale à une constante dans aucune composante de cet ensemble, alors cet ensemble n'a pas de points intérieurs, donc en vertu de* 3°, *il se compose d'un nombre fini des arcs analytiques dont au moins un sort de ∂U;*

5° *si dans le cas où* $\operatorname{Im} a \neq 0$, *a et $\bar{a}$ ne sont pas des zéros de l'expression entre crochets dans le premier membre de l'équation* (13), *et dans le cas où* $\operatorname{Im} a = 0$, *a n'est pas un zéro du second ordre de cet expression, alors a et $\bar{a}$ or a respectivement sont placés sur l'extrémité libre d'un arc analytique appartenant à $\partial f(U)$.*

Démonstration. Ad 1°. L'application de la formule variationnelle (6), où $z_0 = \zeta$, de l'égalité (8) et du fait que α est un nombre arbitraire nous donne tout de suite l'équation (13) pour la fonction extrémale $w = f(\zeta)$, quel que soit $\zeta \in U$.

Ad 2°. Nous déduisons, d'après la représentation générale de la fonctionnelle linéaire et continue dans l'espace $H(U)$, que le second membre de (13) est une fonction holomorphe dans un voisinage de ∂U et vu (11), (11'), elle est non négative dans le cas de maximum et non positive dans le cas de minimum.

Ad 3°. 3° résulte du fait que la fonction extrémale satisfait à l'équation (13) avec des propriétés décrites dans 2°.

Ad 4°. 4° est une conséquence du théorème 1 et de 3°.

Ad 5°. D'après les hypothèses que nous avons faites, il est évident que, si $a = f(\eta)$, $\eta \in \partial U$, on a $f'(\eta) = 0$, parce que le second membre de l'équation (13) est une fonction holomorphe, donc finie sur ∂U. De là, on obtient 5°.

Remarque. On note que la frontière $\partial f(U)$ est contenue dans l'ensemble de trajectoires de la différentielle carrée

$$\frac{P(w)}{(w-a)(w-\bar{a})(1-aw)(1-\bar{a}w)}dw^2,$$

où $P(w)$ désigne l'expression entre crochets dans le premier membre de (13). Pour examiner des propriétés de $\partial f(U)$ on peut donc appliquer des propriétés locales et globales des trajectoires.

EXEMPLE. *Les extréma de la fonctionnelle $\Phi(f) = b_1$, en supposant que* $\operatorname{Im} a = 0$. Il suffit d'admettre que $0 < a < 1$. En effet, si $f \in S_{1R}(-a)$, alors $-f(-z) \in S_{1R}(a)$ et les coefficients de z^{2n-1} des deux fonctions sont les mêmes. Il suffit également de trouver le maximum de b_1, car $\min_{f \in S_{1R}(a)} b_1 = -\max_{f \in S_{1R}(a)} b_1$ (si $f \in S_{1R}(a)$, alors $f(-z) \in S_{1R}(a)$ et inversement).

Supposons donc que f réalise le maximum de notre fonctionnelle. On a évidemment $L(h) = h_1$, où $h \in H(U)$ et $h(z) = h_1 z + \ldots$ Etant donné que (9), $b_1 \geqslant 0$, et en plus $f \neq 0$, donc $b_1 > 0$. Il est immédiat de voir que l'hypothèse du théorème 1 est remplie. En effet,

$$F(w) = b_1 a^2\left(\frac{1}{w^2} + w^2\right) - \left(\frac{2b_2 a^2}{b_1} + 2a(1+a^2)b_1\right)\left(\frac{1}{w} + w\right)$$

est une fonction meromorphe qui n'est pas égale à zéro identiquement. Dans ce cas, l'équation (13) prendra la forme

$$\frac{\zeta^2 w'^2}{(w-a)^2(1-aw)^2}\left\{b_1 a^2\left(\frac{1}{w^2} + w^2\right) - \left(\frac{2b_2 a^2}{b_1} + 2a(1+a^2)b_1\right)\left(\frac{1}{w} + w\right)\right.$$
$$\left. + \frac{7b_2 a^2}{b_1^3} - \frac{4b_3 a^2}{b_1^2} + \frac{4b_2 a(1+a^2)}{b_1} + (2a^2 + (1+a^2)^2 b_1)\right\} = b_1,$$

où autrement

$$\frac{w'^2}{w^2(w-a)^2(1-aw)^2} P(w) = \frac{b_1}{\zeta^2}, \tag{14}$$

où $P(w)$ est un polynôme d'ordre 4 à coefficients réels et de plus $P(w) = w^4 P(1/w)$. A part cela, il doit avoir une racine d'ordre paire sur ∂U. Donc

$$P(w) = b_1 a^2 (w - e^{i\theta})^2 (w - e^{-i\theta})^2,$$

ou

$$P(w) = b_1 a^2 (w-a)(w-1/a)(w \pm 1)^2$$

Le premier cas est impossible: a doit être une racine de $P(w)$, car sinon le premier membre de l'équation (14) devient infini au point de ∂U dans lequel f prend la valeur a, pendant que le second membre est borné sur ∂U. Dans le second cas a doit être posé sur l'extrémité de la coupure, qui doit sortir du point 1, donc c'est la fonction de Pick que nous recherchons comme la fonction maximale. Elle transforme le disque U sur $U \backslash \langle a, 1 \rangle$, alors elle satisfait à la relation

$$\frac{w}{(1+w)^2} = \frac{4a}{(1+a)^2} \frac{z}{(1+z)^2}.$$

La fonction minimale est

$$\frac{w}{(1+w)^2} = -\frac{4a}{(1+a)^2}\frac{z}{(1-z)^2}.$$

Dans le cas où $-1 < a < 0$, la fonction maximale est

$$\frac{w}{(1-w)^2} = -\frac{4a}{(1-a)^2}\frac{z}{(1-z)^2},$$

et la fonction minimale

$$\frac{w}{(1-w)^2} = \frac{4a}{(1-a)^2}\frac{z}{(1-z)^2}.$$

Finalement, nous obtenons des estimations exactes

$$\text{(15)} \qquad \frac{-4|a|}{(1+|a|)^2} \leqslant b_1 \leqslant \frac{4a}{(1+|a|)^2}.$$

EXEMPLE. *Les extréma de la fonctionnelle $\Phi(f) = b_2$, en supposant que* $\operatorname{Im} a = 0$. Il est facile de voir que

$$\sup_{f\in S_{1\mathbf{R}}(a)} b_2 = -\inf_{f\in S_{1\mathbf{R}}(-a)} b_2 \quad \text{et} \quad \inf_{f\in S_{1\mathbf{R}}(a)} b_2 = -\sup_{f\in S_{1\mathbf{R}}(-a)} b_2,$$

on peut donc admettre que $0 < a < 1$. En écrivant l'équation (13) pour la fonction $w = f(\zeta)$ qui est extrémale pour la fonctionnelle $\operatorname{Re}\Phi(f) = \Phi(f) = b_2$, nous trouvons

$$\text{(16)} \quad \frac{\zeta^2 w'^2}{(w-a)^2(1-aw)^2}\Big\{a^2 b_1^2\Big(\frac{1}{w^3}+w^3\Big)+(a^2 b_2-2a(1+a^2)b_1^2)\Big(\frac{1}{w^2}+w^2\Big)$$
$$+\Big((1+4a^2+a^4)b_1^2-2a(1+a^2)b_2+a^2-\frac{3a^2 b_3}{b_1}\Big)\Big(\frac{1}{w}+w\Big)$$
$$+\Big(\frac{11a^2 b_2 b_3}{b_1^3}-\frac{5a^2 b_4}{b_1^2}-\frac{3a^2 b_2}{b_1^2}-2a(1+a^2)b_1^2-2a(1+a^2)$$
$$+(1+4a^2+a^4)b_2+\frac{6a(1+a^2)b_3}{b_1}\Big)\Big\} = 2b_2+b_1\Big(\frac{1}{\zeta}+\zeta\Big).$$

Désignons l'expression entre accolages par $M(w)$. Evidemment $M(1/w) = M(w)$ et $M(\bar{w}) = \overline{M(w)}$. D'abord nous allons démontrer que a doit être une racine de $M(w)$. Puisque la condition dans 4° est bien sûr remplie, l'ensemble $U\setminus f(U)$ n'a pas de points intérieurs, donc $a\in\partial f(U)$. Soit $f(\zeta_0) = a$, $\zeta_0\in\partial U$. Dans un voisinage de ζ_0, on a

$$f(\zeta) = a+c_l(\zeta-\zeta_0)^{l/k}+ \qquad k, l \geqslant 1, \ c_l \neq 0,$$

et le premier membre de (16) est de la forme

$$(\zeta-\zeta_0)^{-2}A(\zeta), \qquad A(\zeta_0)\neq 0,$$

ce qui est impossible, car le second membre de cette équation est borné sur ∂U. On a alors $M(a)=0$. Si a était une racine du troisième ordre de $M(w)$, alors il n'y aurait pas de racine située sur ∂U, ce qui est impossible, parce qu'un point de la circonférence duquel la coupure sort doit être une telle racine (du second ordre). Supposons maintenant que a est une racine du second ordre de la fonction $M(w)$. En ce cas $1/a$ est aussi une racine du second ordre, et il ne reste qu'une racine du second ordre en 1. L'équation (16) admet alors la forme

$$\frac{\zeta^2 w'^2}{w^3} b_1^2(w-1)^2 = 2b_2+b_1\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right). \tag{17}$$

D'autre part le second membre de (17) doit avoir une racine sur ∂U, parce que son premier membre s'annule au point dont l'image est l'extrémité de la coupure. Cette racine doit être d'ordre pair, car le second membre possède un signe constant sur ∂U et, en vertu de la symétrie par rapport à l'axe réel, elle doit être $+1$ ou -1. C'est pourquoi (17) prend la forme

$$\frac{\zeta^2 w'^2}{w^3} b_1^2(w-1)^2 = b_1\frac{(\zeta\pm 1)^2}{\zeta}. \tag{18}$$

En comparant les second membres de (17) et (18), nous obtenons $b_2=\pm b_1$. Remarquons en plus que si $f(\zeta)$ est la fonction extrémale pour la fonctionnelle b_2, alors il en est de même de la fonction $f(-\zeta)$. Si donc la fonction extrémale $f(\zeta)$ satisfait à l'équation (18) avec le signe $+$ dans le second membre, alors la fonction extrémale $f(-\zeta)$ satisfait à (18) avec le signe $-$ dans le second membre. Nous pouvons donc admettre que la fonction extrémale remplit l'équation

$$\frac{\zeta^2 w'^2}{w^3} b_1^2(w-1)^2 = b_1\frac{(\zeta-1)^2}{\zeta}. \tag{19}$$

Puisque dans ce cas $b_2=-b_1$, en posant dans (19) $w=b_1\zeta+b_2\zeta^2+\ldots$ et en comparant des coefficients de ζ dans les deux membres, nous trouvons $b_1=\frac{1}{2}$, $b_2=-\frac{1}{2}$. Si alors la fonction extrémale satisfait à l'équation (19), elle est la fonction minimale pour la fonctionnelle b_2. Examinons maintenant s'il existe une fonction vérifiant l'équation (19) avec $b_1=\frac{1}{2}$ et à la fois appartenant à la famille $S_{1R}(a)$, $0<a<1$. En intégrant cette équation nous obtenons la fonction de Pick

$$\frac{w}{(1+w)^2}=\frac{1}{2}\frac{\zeta}{(1+\zeta)^2}. \tag{20}$$

(En intégrant nous admettons la constante égale à zéro, car sinon nous obtiendrions une fonction possédant un point de ramification en 0). La fonction

(20) est extrémale dans la classe $S_{1R}(a)$ seulement pour $3-2\sqrt{2} \leqslant a < 1$. Pour $0 < a < 3-2\sqrt{2}$ le point a n'est pas situé sur la frontière du domaine sur lequel la fonction (20) transforme le disque U. De là nous déduisons que (20) est une fonction réalisant le minimum seulement pour $3-2\sqrt{2} \leqslant a < 1$.

Supposons enfin que a est une racine du premier ordre de $M(w)$. En ce cas

$$M(w) = \frac{a^2 b_1^2 (w-a)(w-1/a) Q_j(w)}{w^3},$$

où $Q_j(w), j = 1, 2$, est un polynôme du quatrième ordre, et la frontière $\partial f(U)$ est située sur les trajectoires de la différentielle carrée

$$-\frac{Q_1(w) dw^2}{w^3 (w-a)(w-1/a)} \tag{21}$$

dans le cas de maximum, ou sur les trajectoires de la différentielle carrée

$$\frac{Q_2(w) dw^2}{w^3 (w-a)(w-1/a)} \tag{21'}$$

dans le cas de minimum. Puisque la circonférence ∂U est contenue dans $\partial f(U)$, elle doit appartenir à l'ensemble de trajectoires de toutes les deux différentielles carrées. En outre, puisque dans ce cas a doit être l'extrémité de la coupure, les points 1 et a doivent appartenir à $\partial f(U)$. D'où, en vertu de la symétrie de $f(U)$, l'intervalle $\langle a, 1\rangle$ appartient à $\partial f(U)$, donc $\langle a, 1\rangle$ doit faire partie de l'ensemble de trajectoires. Le point 1, comme un point d'intersection de deux trajectoires, doit être un zéro des deux différentielles carrées. Il est un zéro du second ordre au moins, car au moins 4 trajectoires en sortent. D'autre part il ne peut être le zéro ni du troisième, ni du quatrième ordre, ce qui résulte de la symétrie de l'ensemble des trajectoires. Nous pouvons donc écrire

$$Q_j(w) = (w-1)^2 q_j(w),$$

où $q_j(w)$ est un polynôme du second ordre avec des racines symétriques par rapport à ∂U et par rapport à l'axe réel. A priori trois cas sont possibles:

$$q_j(w) = (w+1)^2, \quad q_j(w) = (w-e^{i\theta})(w-e^{-i\theta}), \quad 0 < \theta < \pi,$$
$$q_j(w) = (w-c)(w-1/c), \quad \mathrm{Re}\, c = c, \quad 0 < |c| < 1.$$

Il est facile de voir que l'intervalle $\langle -1, 0)$ fait partie de l'ensemble de trajectoires de la différentielle (21), mais pas de la différentielle (21'). Si donc la frontière $\partial f(U)$ privée de ∂U et de $\langle a, 1\rangle$ contient $\langle -1, -r\rangle$, $0 < r < 1$, cela ne peut être vrai que dans le cas de la fonction maximale. Dans chacun des deux cas le second membre de (17) doit avoir une racine sur ∂U, et en vertu de la symétrie de ce second membre et car son signe est constant, cela peut être ± 1 uniquement. Ceci entraîne que $b_2 = \pm b_1$. Dans ce cas l'équation admet la forme

$$\frac{b_1^2 (w^2-1)^2 w'^2}{w^3 (w-a)(w-1/a)} = b_1 \frac{(\zeta \pm 1)^2}{\zeta^3}. \tag{22}$$

En mettant $w = b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots$ dans (22) et en comparant les coefficients de ζ dans les deux membres nous obtenons

$$b_2 = \pm b_1 = \frac{a}{1+a^2}.$$

Si une fonction vérifiant l'équation (22) était la fonction minimale, alors elle devrait être la fonction de Pick transformant le disque unité sur le disque unité sans la coupure $\langle a,\ 1\rangle$, c'est-à-dire la fonction

$$\frac{w}{(1+w)^2} = \frac{4a}{(1+a)^2}\frac{\zeta}{(1+\zeta)^2}. \tag{23}$$

Mais pour cette fonction on a

$$b_2 = \frac{-8a}{(1+a)^4}(1-a)^2,$$

et la condition $b_2 = -b_1$ n'est remplie que pour $a = 3-2\sqrt{2}$. En résumant, l'équation (22) n'est remplie que pour $a \neq 3-2\sqrt{2}$ par la fonction maximale et en ce cas $b_2 = a/(1+a^2)$. Si $a = 3-2\sqrt{2}$, alors la fonction minimale peut être une solution de (22) et en plus $b_2 = -\frac{1}{2}$.

Maintenant nous allons passer au second cas. Il est facile de voir qu'il est impossible. Les différentielles carrées (21) et (21') ne peuvent pas avoir des zéros du premier ordre sur ∂U, en vertu de la symétrie des trajectoires par rapport à ∂U.

Il nous reste à considérer le troisième cas. Dans le cas où $0 < c < 1$, la circonférence ∂U fait partie de l'ensemble de trajectoires de la différentielle (21'), mais n'appartient pas à l'ensemble de trajectoires de la différentielle (21), donc ce cas correspond uniquement à la fonction minimale, qui n'est autre que la fonction de Pick (23). Pour cette fonction, on a $b_2 = -8a(1-a)^2/(1+a)^4$. Dans le cas où $-1 < c < 0$ la circonférence ∂U fait partie de l'ensemble de trajectoires de la différentielle (21) et n'appartient pas à l'ensemble correspondant à la différentielle (21'), donc ce cas ne peut correspondre qu'à la fonction maximale qui ne peut être que la fonction (23). Mais, pour cette fonction $b_2 < 0$ et il existe une fonction de la classe $S_{1R}(a)$ pour laquelle $b_2 > 0$ (p.ex. $f(z) = \frac{1}{2}az + \varepsilon z^2$, où $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}a$).

Il résulte finalement des considérations précédentes que la fonction maximale doit vérifier l'équation (22) et de là,

$$b_2 \leqslant \frac{a}{1+a^2} \quad \text{pour } 0 < a < 1. \tag{24}$$

La fonction minimale n'est autre que la fonction de Pick (23) pour $0 < a < 3-2\sqrt{2}$ et la fonction de Pick (20) pour $3-2\sqrt{2} \leqslant a < 1$. Ceci découle du fait que $-\frac{1}{2} \leqslant -8a(1-a)^2/(1+a)^4$, quand $3-2\sqrt{2} \leqslant a < 1$ et pour ces a la fonction (20) appartient à $S_{1R}(a)$. Donc finalement

$$\begin{aligned} b_2 &\geqslant -\frac{8a(1-a)^2}{(1+a)^4} && \text{pour } 0 < a < 3-2\sqrt{2}, \\ b_2 &\geqslant -\tfrac{1}{2} && \text{pour } 3-2\sqrt{2} \leqslant a < 1. \end{aligned} \tag{25}$$

On a de même

$$(26)\qquad b_2 \leqslant \frac{8a(1-a)^2}{(1+a)^4} \quad \text{pour } -3+2\sqrt{2} < a < 0,$$
$$b_2 \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{pour } -1 < a \leqslant -3+2\sqrt{2},$$

$$(27)\qquad b_2 \geqslant -\frac{a}{1+a^2} \quad \text{pour } -1 < a < 0.$$

Bibliographie

[1] G. M. Goluzin, *Théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe* (en russe), Moscou 1966.

[2] Ch. Pommerencke, *Univalent Functions*, Göttingen 1975.

[3] G. Schober, *Univalent Functions, Selected Topics*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1975.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, SILESIAN TECHNICAL UNIVERSITY
GLIWICE, POLAND

Reçu par la Rédaction le 20.10.1987