ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1965)

Zur Existenz von Stieltjes-Integralen im Komplexen und Reellen *

von P. SCHATTE (Halle a. d. Saale)

In der Funktionentheorie beschränkt man sich bei der Einführung des Kurvenintegrals gewöhnlich auf die Bogenlänge als Kurvenparameter und damit auf rektifizierbare Kurven. Integrale über nichtrektifizierbare Kurven untersuchte zuerst Herr L. Berg in seiner Arbeit [1] über komplexe Kurvenintegrale, wobei er als Ausgangspunkt die Fragestellung von Herrn K. Bögel wählte, ob es möglicherweise nichtkonstante Funktionen gibt, die über jede beliebige Kurve integrierbar sind. Herrn L. Berg verdanke ich auch die Anregung zu vorliegender Arbeit.

In [1] wird die Unabhängigkeit des Integrals von der Integrationskurve für den Fall bewiesen, daß diese einer Hölderbedingung

$$|z(t')-z(t)| < A|t'-t|^{\mu}$$

mit $\mu > \frac{1}{2}$ genügt. Die noch offen gebliebene Frage, ob für nichtrektifizierbare Kurven der Cauchysche Integralsatz auch unter allgemeineren Voraussetzungen gilt, soll im folgenden positiv beantwortet werden. Es wird gezeigt, daß das Integral (im Falle regulärer Integranden) über eine geschlossene stetige Kurve stets gleich Null ist, sofern es überhaupt existiert. Gleichzeitig wird dabei die in [1] angegebene und für die Existenz des Kurvenintegrals hinreichende Bedingung (30) hier zu der notwendigen und hinreichenden Bedingung (7) verschärft. Dabei stellt sich heraus, daß die Integrierbarkeit einer regulären Funktion $f(z)$ über eine stetige Kurve $\mathfrak{C}$ nur von der Gestalt der Kurve und von Lage und Ordnung der Nullstellen von $f'(z)$ auf $\mathfrak{C}$ abhängt.

Die verschärfte Bedingung (7) ist aber nicht nur bei regulärem Integranden, sondern für beliebige Kurvenintegrale notwendig. Unter Ausnutzung dieser Tatsache kann gezeigt werden, daß als einzige Funktionen nur die Konstanten über jede beliebige Kurve integrierbar sind. (Siehe auch Satz 2a.)

Weiterhin ist die Bedingung (7) in entsprechend modifizierter Form auch für die Existenz reeller Stieltjes-Integrale notwendig. Es werden

* Diplomarbeit 1963 an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (gekürzte Fassung). Referent: Prof. L. Berg.

zwei Klassen von Integralen angegeben, für deren Existenz die besagte Bedingung auch hinreichend ist. Im zweiten Fall ergibt sich dabei ein Satz, der als Spezialfall die Substitutionsregel für Riemann-Integrale enthält allerdings unter etwas eingeengten Voraussetzungen.

Das Stieltjes-Integral soll hier immer als gewöhnliches Stieltjes-Integral aufgefaßt werden, welches gelegentlich auch als Riemann-Stieltjes-Integral bezeichnet wird (siehe [2]).

§ 1. Komplexe Kurvenintegrale

1. Definition und Parameterinvarianz. Als Kurve $\mathfrak{C}$ wollen wir die geordnete Gesamtheit aller Punkte verstehen, die durch die Abbildung $z(t)$ eines reellen Parameterintervalls $a \leqslant t \leqslant b$ in die z-Ebene ensteht. Dabei braucht $\mathfrak{C}$ nicht rektifizierbar und $z(t)$ vorläufig nicht stetig zu sein. Auch die Funktion $f(z)$ wollen wir noch keinen Einschränkungen unterwerfen. Dann fassen wir im Anschluß an [1]

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,dz(t) \tag{1}$$

als komplexes Stieltjes-Integral auf, d. h. ist $z_\nu = z(t_\nu)$, $\zeta_\nu = z(\tau_\nu)$ mit $t_{\nu-1} \leqslant \tau_\nu \leqslant t_\nu$ und bedeutet $t_0 = a$, $t_n = b$ und $z_0 = A$, $z_n = B$, so wird (1) durch

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1}) \tag{2}$$

definiert, sofern jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge des Intervalls $\langle a, b\rangle$ unabhängig vom gewählten Zwischenwert denselben Grenzwert liefert. Eine Zerlegungsfolge soll wie üblich ausgezeichnet heißen, wenn $\max\limits_\nu (t_\nu - t_{\nu-1}) \to 0$ für $n \to \infty$.

Geht $z(t)$ aus $\hat{z}(\hat{t})$ durch eine im weiteren Sinne monoton wachsende und stetige Parametertransformation $t = \hat{t}(t)$ mit $a = t(\hat{a})$ und $b = t(\hat{b})$ hervor, so sagen wir, daß $\hat{z}(\hat{t})$ und $z(t)$ zwei Parameterdarstellungen derselben Kurve $\mathfrak{C}$ sind. Das Integral (1) ist dann *parameterinvariant*, d.h.

$$\int_a^b f(z(t))\,dz(t) = \int_{\hat{a}}^{b} f(\hat{z}(\hat{t}))\,d\hat{z}(\hat{t})\,, \tag{3}$$

und aus der Existenz des einen Integrals folgt die des anderen.

Man sieht leicht ein, daß man für diesen Satz die Stetigkeit der Parametertransformation wirklich benötigt. Sonst braucht nämlich $t = t(\hat{t})$ nicht jeden Zwischenwert anzunehmen, und die durch $\hat{z}(\hat{t})$ definierte Kurve enthält nicht alle Punkte der durch $z(t)$ definierten Kurve. Weiterhin ist die Monotonie unentbehrlich, da $\int_0^1 t\,dt$ existiert, $\int_0^1 \left(-\sqrt{t}\cos\frac{\pi}{t}\right) d\left(-\sqrt{t}\cos\frac{\pi}{t}\right)$ aber nicht, wie man erkennt, wenn man $t_\nu = 1/\nu$ und $\tau_\nu = t_\nu$ mit $\nu = 1, 2, \ldots, n$ als Teilpunkte einer Zerlegung wählt und $n \to \infty$ gehen läßt. Man kann dann auch eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge finden, die bestimmt divergiert. Man erkennt übrigens in der üblichen Weise, daß das Kurvenintegral (1) nur existiert, wenn $f(z)$ auf $\mathfrak{C}$ beschränkt ist.

2. Eine notwendige Bedingung. Für die Existenz von (1) soll nun eine notwendige Bedingung abgeleitet werden. Die Existenz von (2) wird vorausgesetzt, d.h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1}) \to I\,. \tag{4}$$

Weiter überlegt man sich wie im Reellen (siehe Smirnow [3], I 2), daß auch für komplexe Stieltjes-Integrale die Regel der partiellen Integration gilt, die besagt, daß aus der Existenz von (1) die Existenz von

$$\int_{\mathfrak{C}} z\,dt(z) = -I + Bf(B) - Af(A)$$

folgt, d.h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu [f(z_\nu) - f(z_{\nu-1})] \to -I + Bf(B) - Af(A)\,. \tag{5}$$

Addiert man zu (4) und (5) noch die triviale Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{n} [-z_\nu f(z_\nu) + z_{\nu-1} f(z_{\nu-1})] \to -Bf(B) + Af(A)\,,$$

so erhält man

$$\sum_{\nu=1}^{n} \{-[f(z_\nu) - f(\zeta_\nu)](z_\nu - \zeta_\nu) + [f(\zeta_\nu) - f(z_{\nu-1})](\zeta_\nu - z_{\nu-1})\} \to 0\,.$$

Faßt man die ζ_ν als neue Teilpunkte auf und setzt zur Abkürzung $\Delta z = z_\nu - z_{\nu-1}$ und $\Delta f(z_\nu) = f(z_\nu) - f(z_{\nu-1})$, so kann man die letzte Beziehung auch in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \Delta f(z_\nu)\,\Delta z_\nu \to 0 \tag{6}$$

schreiben. Die Bedingung (6) läßt sich noch etwas handlicher gestalten. Es ist nämlich zugelassen, daß $\tau_\nu = t_\nu$ oder $\tau_\nu = t_{\nu-1}$ wird. Dies bedeutet, daß zwei Teilpunkte zusammenfallen können und zwei aufeinanderfolgende, von Null verschiedene Summanden in (6) gleiches Vorzeichen haben. Allgemein kann also jedem Summanden in (6) ein beliebiges Vorzeichen zugeordnet werden. Nun müssen aber die Real- und Imaginärteile in (6) für sich konvergieren, und weil jedem Summanden ein beliebiges Vorzeichen zugeordnet werden kann, müssen diese sogar absolut konvergieren, und dies wiederum ist wegen $|w| \leqslant |\Re w| + |\Im w|$ gleichbedeutend damit, daß auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta f(z_\nu)\Delta z_\nu)| \to 0 \ . \tag{7}$$

Damit haben wir

SATZ 1. *Für die Existenz von* (1) *ist bei beliebigem Integranden und beliebiger Kurve notwendig, daß die Bedingung* (7) *für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt ist.*

Aus der notwendigen Bedingung (7) folgt übrigens noch einmal die Beschränktheit von $f(z)$ auf $\mathfrak{C}$, wie man sofort sieht.

Herr L. Berg ging in seiner Arbeit von der Fragestellung aus, ob es von den Konstanten verschiedene Funktionen gibt, die über jede Kurve integrierbar sind. Schränkt man die Auswahl der Kurven nicht ein, so folgt aus Satz 1 in recht einfacher Weise, daß es keine derartige Funktion gibt. Es gilt aber sogar

SATZ 2. *Die Konstanten sind die einzigen Funktionen, die über jede stetige Kurve integrierbar sind, wobei wir nur solche Funktionen in Betracht ziehen, die in einem Gebiet* (*offene und zusammenhängende Punktmenge*) *erklärt sind.*

Ist nämlich $f(z) \not\equiv \text{const}$, so gibt es nach dem Satz von Heine-Borel einen Punkt z_0, für den in jeder Umgebung von z_0 ein Punkt z' mit $f(z_0) - f(z') \not\equiv 0$ existiert, wenn man berücksichtigt, daß es wegen $f(z) \not\equiv \text{const}$ zwei Punkte A und B des Definitionsbereiches $\mathfrak{L}$ von $f(z)$ mit $f(A) \neq f(B)$ gibt und daß sich diese Punkte innerhalb von $\mathfrak{L}$ voraussetzungsgemäß durch einen Polygonzug verbinden lassen. Nun sei z_1 ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{L}$ mit $|z_0 - z_1| = \delta$, $|f(z_0) - f(z_1)|\,|z_0 - z_1| = c_1 \neq 0$ und $n_1 = \left[\frac{1}{c_1} + 1\right]$. Als ersten Teil der Kurve $\mathfrak{C}_1$ nehme man n_1-mal einen Polygonzug, der die Punkte z_0, z_1, z_0 innerhalb $\mathfrak{L}$ verbindet. Anschließend wähle man einen Punkt z_2 mit

$$|z_2 - z_0| < \frac{\delta}{2}\,, \qquad |f(z_0) - f(z_2)|\,|z_0 - z_2| = c_2 \neq 0$$

und setze $n_2 = \left[\frac{1}{c_2} + 1\right]$.

Als zweiten Teil der Kurve betrachte man einen n_2-mal durchlaufenen Polygonzug, der innerhalb $\mathfrak{L}$ von z_0 nach z_2 und von da nach z_0 zurück verläuft, usf. Die auf diese Weise erhaltene Kurve $\mathfrak{C}_1$ ist stetig, und die Bedingung (7) ist verletzt, wenn man als Teilpunkte $z_0, z_1, z_0, \ldots, z_0, z_1, z_0, z_2, z_0, \ldots, z_0, z_n, z_0$ einführt und $n \to \infty$ streben läßt. Man kann dann auch eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge finden, für die (7) bestimmt divergiert, d.h. $f(z)$ ist über $\mathfrak{C}_1$ nicht integrierbar.

Sind $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ zwei nicht zusammenhängende Gebiete, ist $f(z) = 0$ für $z \in \mathfrak{L}_1$ und $f(z) = 1$ für $z \in \mathfrak{L}_2$ und ist $f(z)$ sonst nirgends erklärt, so ist $f(z)$ über jede stetige Kurve des Definitionsbereiches trivialerweis integrierbar, aber $f(z)$ ist nicht konstant.

Neben den Konstanten ist jede Funktion $f(z)$ über eine beliebige Jordankurve integrierbar, wenn $f(z)$ aus $f(z) \equiv \text{const}$ durch Abänderung der Funktionswerte in endlich vielen Punkten hervorgeht. Die beim Beweis zu Satz 2 konstruierte Kurve $\mathfrak{C}_1$ ist i.a. keine Jordankurve. Die fraglichen Funktionen sind übrigens nicht nur über Jordankurven, sondern auch über solche Kurven integrierbar, deren Bildpunkte jeweils endlich viele Urbilder haben. Dagegen ist es nicht zulässig, die Funktion $f(z) \equiv \text{const}$ auf einer allgemeineren Menge vom Maße Null, z.B. einer konvergenten Punktfolge, abzuändern. Man braucht nur

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z \neq \dfrac{1}{n}, \\ 1 & \text{für} \quad z = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

zu setzen, wo n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, und als Integrationskurve $\mathfrak{C}_2$ eine Spirale durch $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ zu verwenden, um die Bedingung (7) zu verletzen. Die Kurve $\mathfrak{C}_2$ ist allerdings nicht rektifizierbar. Wird die Funktion in endlich vielen Punkten abgeändert, so ist sie nicht mehr stetig, und es gilt der mit Satz 2 verwandte

SATZ 2a. *Die Konstanten sind die einzigen in einem Gebiet erklärten und stetigen Funktionen, die über jede Jordankurve integrierbar sind.*

Den Beweis führe man ähnlich wie bei Satz 2, indem man als Integrationskurve eine Spirale verwendet, die sich in bestimmter Weise unendlich oft um den Punkt z_0 windet.

3. Zwei Hilfssätze. Für die weiteren Untersuchungen wollen wir jetzt stets voraussetzen, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ eine stetige Parameterdarstellung besitzt und ganz im Innern eines einfach zusammenhängenden und beschränkten Gebietes $\mathfrak{G}$ liegt, in dem der Integrand regulär ist und in dem

$$|f''(z)| \leqq L \tag{8}$$

ist.

Dann kann man zeigen, daß die Bedingung (7) für die Existenz von (1) auch hinreichend ist. Zur besseren Übersicht beweisen wir zunächst zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Ist die Bedingung* (7) *für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt und ist* $f'(s) = 0$, *so lassen sich zu jedem* $\varepsilon^* > 0$ *Zahlen* ϱ *und* δ *so angeben, daß für jede Zerlegung des Intervalls* $\langle a, b\rangle$ *mit* $|t_\nu - t_{\nu-1}| < \delta$

$$\sum_\nu{}' \left| \int_{\zeta_\nu}^{z_\nu} [f(w) - f(\zeta_\nu)]\, dw \right| < \varepsilon^* \tag{9}$$

ausfällt, sofern über alle die Indizes summiert wird, für die $|s - z_\nu|, |s - \zeta_\nu| \leqslant \varrho$. *Als Integrationsweg diene jeweils die Strecke* g_ν, *die* z_ν *mit* ζ_ν *verbindet.*

Beweis. Sei s eine $(k-1)$-fache Nullstelle $(k \geqslant 2)$ von $f'(z)$. Dann läßt sich $f(z)$ im Punkte s in eine Potenzreihe entwickeln, und es gilt für $|z - s| < \varrho_1$:

$$f(z) = f(s) + (z - s)^k g(z)\,.$$

Nun werde eine Zahl $\varrho_2 < \varrho_1$ gewählt. Dann folgt

$$|f''(z)| \leqslant M\,|z - s|^{k-2} \tag{10a}$$

und

$$|g'(z)| \leqslant N \tag{10b}$$

für $|z - s| \leqslant \varrho_2$. Da $g(z)$ regulär und damit stetig ist, läßt sich weiterhin eine Zahl $\varrho_3 \leqslant \varrho_2$ so angeben, daß

$$|g(z) - g(s)| \leqslant \tfrac{1}{8} S k^2 \delta^2 \tag{11}$$

für $|z - s| \leqslant \varrho_3$, wo $S = |g(s)| \neq 0$ und

$$\delta = \min\left\{\frac{\pi}{4k}, \frac{Sk}{12\cdot 2^{k-2} M}\right\}. \tag{12}$$

Außerdem soll ϱ_3 noch der Ungleichung

$$\varrho_3 \leqslant \frac{Sk}{7N} \tag{13}$$

genügen. Die Zahl ϱ_3 wählen wir zunächst als ϱ unseres Hilfssatzes. Zu seinem Beweis zeigen wir die für $|s - z_\nu|, |s - \zeta_\nu| \leqslant \varrho$ und $|t_\nu - t_{\nu-1}| < \varrho^*$ gültige Ungleichung

$$\left| \int_{\zeta_\nu}^{z_\nu} [f(w) - f(\zeta_\nu)]\, dw \right| < A\,\{|z_\nu - z_\nu^*|\,|f(z_\nu) - f(z_\nu^*)| + |z_\nu^* - \zeta_\nu|\,|f(z_\nu^*) - f(\zeta_\nu)|\}\,, \tag{14}$$

wo A eine Konstante und z_ν^* ein noch zu wählender Zwischenpunkt ist. Nach Voraussetzung läßt sich dann eine Zahl δ' so angeben, daß $\sum_\nu' |\Delta f(z_\nu) \Delta z_\nu| < \varepsilon^*/A$, sobald $|t_\nu - t_{\nu-1}| < \delta'$. Bei der Bildung der Δz_ν und $\Delta f(z_\nu)$ sind die Zwischenpunkte z_ν^* und ζ_ν mit berücksichtigt. Das δ unseres Hilfssatzes wählen wir nun so, daß $\delta \leqslant \delta', \delta^*$ und Hilfssatz 1 folgt unmittelbar aus der Abschätzung (14). Es kommt jetzt darauf an, die Abschätzung (14) zu beweisen.

Im weiteren Beweisverlauf können wir o. E. d. A. $s = 0$ annehmen und zur Abkürzung alle Indizes weglassen sowie $k\delta = \eta$ setzen. Zum Beweis von (14) müssen wir mehrere Fälle unterscheiden:

1) Zunächst sei $(1+\delta)|\zeta| \leqq |z|$.

Es folgt:

$$(1+\eta)|\zeta^k| < |z^k|\,.$$

Aus der für $0 < \eta < 1$ gültigen elementaren Ungleichung

$$\left(1+\frac{10}{\eta}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{8}\right) < (\eta+1)\left[\frac{10}{\eta}\left(1-\frac{\eta^2}{8}\right)-\left(1+\frac{\eta^2}{8}\right)\right]$$

erhält man:

$$\left(1+\frac{10}{\eta}\right)\left(1+\frac{\eta^2}{8}\right)|\zeta^k| < \left[\frac{10}{\eta}\left(1-\frac{\eta^2}{8}\right)-\left(1+\frac{\eta^2}{8}\right)\right]|z^k|$$

$$\left(1+\frac{\eta^2}{8}\right)|\zeta^k|+\left(1+\frac{\eta^2}{8}\right)|z^k| < \frac{10}{\eta}\left\{\left(1-\frac{\eta^2}{8}\right)|z^k|-\left(1+\frac{\eta^2}{8}\right)|\zeta^k|\right\}.$$

Jetzt wird (11) angewendet:

$$|g(\zeta)\zeta^k|+\max_{w\in g}|g(w)z^k| < \frac{10}{\eta}\{|g(z)z^k|-|g(\zeta)\zeta^k|\},$$

$$\left|\int_\zeta^z g(\zeta)\zeta^k dw\right|+\left|\int_\zeta^z g(w)w^k dw\right| < \frac{10}{\eta}|z-\zeta|\,|g(z)z^k-g(\zeta)\zeta^k|,$$

$$\left|\int_\zeta^z [f(w)-f(\zeta)]dw\right| < \frac{10}{\eta}|z-\zeta|\,|f(z)-f(\zeta)|\,. \tag{15}$$

Wir setzen noch $z^* = z$.

2) $(1+\delta)|z| \leqq |\zeta|$. Vertauscht man bei 1) z und ζ, so erhält man

$$\left|\int_z^\zeta [f(w)-f(z)]dw\right| < \frac{10}{\eta}|z-\zeta|\,|f(z)-f(\zeta)|\,.$$

Damit haben wir

$$\left|\int_\zeta^z [f(w)-f(\zeta)]dw\right| < \left(\frac{10}{\eta}+1\right)|z-\zeta|\,|f(z)-f(\zeta)|\,. \tag{16}$$

Wir setzen wieder $z^* = z$.

3) $(1+\delta)|\zeta| > |z|$ und $(1+\delta)|z| > |\zeta|$. Aus der zweiten Bedingung folgt $|z| > |\zeta|(1-\delta)$. Wir haben somit als Voraussetzung

$$(1+\delta)|\zeta| > |z| > (1-\delta)|\zeta|\,, \tag{17}$$

und da der Fall $\zeta = 0$ oder $z = 0$ nach (17) nicht möglich ist, können wir $z/\zeta = re^{i\varphi}$ setzen mit

$$1+\delta > r > 1-\delta\,. \tag{17a}$$

3a) φ liegt in einem der Intervalle $\left\langle \frac{2\nu\pi}{k}+\delta, \frac{2\pi(\nu+1)}{k}-\delta\right\rangle$ mit $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$, d. h. $\eta \leqslant k\varphi \leqslant 2\pi - \eta$. Dann erhält man durch Anwendung der Taylorschen Formel wegen $\eta < 1$

$$\cos k\varphi \leqslant \cos\eta \leqslant 1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{4!} < 1 - \frac{5\eta^2}{16}\,.$$

Nun sei $\varepsilon(w) = \arg\frac{g(w)}{g(0)}$. Nach (11) ist $|\sin\varepsilon(w)| \leqslant \frac{\eta^2}{8}$; es ist also

$$\begin{aligned}\cos\bigl(k\varphi \pm 2\varepsilon(w)\bigr) &= \cos k\varphi \cos 2\varepsilon(w) \mp \sin k\varphi \sin 2\varepsilon(w)\\ &\leqslant \cos\eta + 2|\sin\varepsilon(w)| < 1 - \frac{\eta^2}{16}\,,\end{aligned}$$

$$-\left(1-\frac{\eta^2}{16}\right) < -\cos\bigl(k\varphi \pm 2\varepsilon(w)\bigr)\,.$$

Mit $d = \left|\frac{z}{\zeta}\right|^k \left|\frac{g(z)}{g(\zeta)}\right|$ erhält man wegen (11), (12), (17a)

$$\begin{aligned}\max_{w\in G}\left|\frac{w^k}{\zeta^k}\cdot\frac{g(w)}{g(\zeta)}\right| + 1 &\leqslant \frac{9}{7}\cdot 2^k + 1\\ &< \frac{1}{\eta}(6\cdot 2^k+4)\sqrt{\frac{\eta^2}{16}(d^2+1)}\\ &\leqslant \frac{1}{\eta}(6\cdot 2^k+4)\sqrt{(d^2+1) - 2d\cos\bigl(k\varphi \pm 2\varepsilon(w)\bigr)}\,,\end{aligned}$$

$$\max_{w\in G}\left|\frac{w^k}{\zeta^k}\cdot\frac{g(w)}{g(\zeta)}\right| + 1 < \frac{1}{\eta}(6\cdot 2^k+4)\left|\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\frac{g(z)}{g(\zeta)} - 1\right|\,,$$

$$\max_{w\in G}|w^k g(w)| + |\zeta^k g(\zeta)| < \frac{1}{\eta}(6\cdot 2^k+4)\,|z^k g(z) - \zeta^k g(\zeta)|\,.$$

Hieraus folgt wie unter 1):

$$\left|\int_{\zeta}^{z}[f(w)-f(\zeta)]dw\right|<\frac{1}{\eta}(6\cdot 2^{k}+4)|z-\zeta|\,|f(z)-f(\zeta)|\,. \tag{18}$$

Wir setzen $z^* = z$.

3b) $-\delta \leqslant \varphi \leqslant \delta$. Dann folgt:

$$1-\cos\varphi \leqslant 1-\cos\delta \leqslant \frac{\delta^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} 2r(1-\cos\varphi) &< 2\delta^2 \\ (r-1)^2 &< \delta^2 \end{aligned}\right\}\quad \text{aus (17a)}\,.$$

Die beiden letzten Ungleichungen addiere man:

$$r^2+1-2r\cos\varphi < 3\delta^2$$

$$\left|\frac{z}{\zeta}-1\right|^2 < 3\delta^2 < \frac{3k^2S^2}{144\cdot 2^{2k-4}M^2} \qquad \text{aus (12)}$$

$$\left|\frac{z}{\zeta}-1\right| < \frac{7kS}{48\cdot 2^{k-2}M}\,,$$

$$|z-\zeta|^3\cdot M\cdot 2^{k-2}|\zeta^{k-2}| < \frac{7k}{48}S|\zeta^{k-1}|\,|z-\zeta|^2\,.$$

Hieraus bekommen wir unter Benutzung von (10a) und (11)

$$|z-\zeta|^3\max_{w\in g}|f''(w)| < \frac{k}{6}|\zeta^{k-1}g(\zeta)|\,|z-\zeta|^2\,,$$

$$\frac{1}{2}\left|\int_{\zeta}^{z}f''(w)(z-w)^2dw\right| < \frac{1}{12}|k\zeta^{k-1}g(\zeta)|\,|z-\zeta|^2\,, \tag{19}$$

$$\left|(z-\zeta)\int_{\zeta}^{z}f''(w)(z-w)\,dw\right| < \frac{1}{6}|k\zeta^{k-1}g(\zeta)|\,|z-\zeta|^2\,. \tag{20}$$

Weiterhin folgt aus (13): $|\zeta|\cdot \mathrm{N} < \frac{7k}{6\cdot 8}S$ und hieraus unter Anwendung von (10b) und (11)

$$\frac{3}{2}|\zeta^k g'(\zeta)|\,|z-\zeta|^2 < \frac{1}{4}|k\zeta^{k-1}g(\zeta)|\,|z-\zeta|^2\,. \tag{21}$$

Die Addition von (19), (20), (21) ergibt nach elementaren Umformungen:

$$\frac{1}{2}\left|\int_\zeta^z f''(w)(z-w)^2 dw + f'(\zeta)(z-\zeta)^2\right| < |z-\zeta|\left|\int_\zeta^z f''(w)(z-w)\,dw + f'(\zeta)(z-\zeta)\right|$$

und aus dieser Ungleichung folgt durch partielle Integrationen:

$$\left|\int_\zeta^z [f(w)-f(\zeta)]\,dw\right| < |z-\zeta|\,|f(z)-f(\zeta)|\,. \tag{22}$$

Wir setzen $z^* = z$.

3c) Sei $\varphi \in \left\langle\frac{2\pi\nu}{k}-\delta, \frac{2\pi\nu}{k}+\delta\right\rangle$; $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$. Jetzt betrachte man die Strahlen $\varphi_1 = \varphi+\pi/k$ und $\varphi_2 = \varphi-\pi/k$. Diese teilen die Ebene in zwei getrennte Gebiete. Da in dem einen Gebiet der Punkt z und in dem anderen der Punkt ζ der stetigen Kurve $z(t)$ liegt, muß sie die Begrenzungslinie, d. h. einen der Strahlen wenigstens einmal schneiden. Der Schnittpunkt sei z^*. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left|\int_\zeta^z [f(w)-f(\zeta)]\,dw\right| &\leqslant \left|\int_\zeta^{z^*} [f(w)-f(\zeta)]\,dw\right| + \\ &+ \left|\int_{z^*}^{z} [f(w)-f(z^*)]\,dw\right| + |z-z^*|\,|f(z^*)-f(\zeta)|\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Unter Verwendung von 1), 2) oder 3a) bekommen wir

$$\left|\int_\zeta^{z^*} [f(w)-f(\zeta)]\,dw\right| < A_1|z^*-\zeta|\,|f(z^*)-f(\zeta)|\,, \tag{24}$$

$$\left|\int_{z^*}^{z} [f(w)-f(z^*)]\,dw\right| < A_1|z-z^*|\,|f(z)-f(z^*)| \tag{25}$$

mit $A_1 = \frac{1}{\eta}(6\cdot 2^k+4)$. Diese Verwendung ist erlaubt, weil $|z^*| \leqslant |z^*-z|+|z| < 2\varrho$ für genügend kleines δ^* und weil die Beweise in 1), 2) und 3a) richtig bleiben, wenn man ϱ von vornherein durch $\varrho/2$ ersetzt. Außerdem ist im Falle $z^* \neq 0$ $\arg\frac{z}{z^*} = \pm\frac{\pi}{k}$ und $\arg\frac{z^*}{\zeta} = \varphi\pm\frac{\pi}{k}$.

Es muß nun noch der letzte Summand in (23) abgeschätzt werden. Im Falle $z^* = 0$ sieht man die Ungleichung

$$|z-z^*| \leqslant 2k\,|z^*-\zeta| \tag{26}$$

wegen (17) und $\delta < 1$ leicht ein. Im Falle $z^* \neq 0$ erhält man sie folgendermaßen:

Sei $\arg\zeta - \arg z^* = \alpha$, $\arg z - \arg z^* = \beta = \pm\pi/k$. Dann hat man

$$\cos\alpha \leqslant \cos\frac{\pi}{2k} \leqslant 1 - \frac{1}{k^2},$$

$$2\cdot 4k^2|\zeta|\,|z^*|\cos\alpha \leqslant (4k^2-4)(|\zeta|^2+|z^*|^2)+2|z|\,|z^*|\cos\beta,$$

$$|z|^2+|z^*|^2-2|z|\,|z^*|\cos\beta \leqslant 4k^2(|\zeta|^2+|z^*|^2-2|\zeta|\,|z^*|\cos\alpha),$$

$$|z-z^*| \leqslant 2k|z^*-\zeta|.$$

Das ist wieder die Ungleichung (26). Aus (23) bis (26) folgt:

$$(27)\qquad \Big|\int\limits_{\zeta}^{z}[f(w)-f(\zeta)]\,dw\Big| < (A_1+2k)\big(|z-z^*|\,|f(z)f-(z^*)|+|z^*-\zeta|\,|f(z^*)-f(\zeta)|\big).$$

Damit sind alle Fälle erschöpft. Aus den Ungleichungen (15), (16), (18), (22) und (27) folgt die Ungleichung (14) mit $A = A_1+2k$ und damit der Hilfssatz 1.

Man könnte vielleicht vermuten, daß der Hilfssatz 1 gilt, ohne daß man die Bedingung (7) vorauszusetzen braucht. Doch läßt sich hierzu leicht ein Gegenbeispiel angeben. Man betrachte irgendeine stetige Kurve durch die Punkte $z_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt[4]{\nu}}$ und $\zeta_\nu = \big(1+(-1)^\nu\big)\frac{i}{\sqrt[4]{\nu}}$ mit $\nu = n, n+1, \ldots$ $\ldots, n+l$. Die Zerlegungssumme (9) über diese Punkte, gebildet mit dem Integranden $f(z) = z^2$, divergiert für $l\to\infty$. Über dieselben Punkte gebildet, divergiert dann aber auch die Zerlegungssumme (7).

HILFSSATZ 2. *Ist die Bedingung* (7) *für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt, so gibt es ein* δ^*, *so daß*

$$(9a)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\Big|\int\limits_{\zeta_\nu}^{z_\nu}[f(w)-f(\zeta_\nu)]\,dw\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sobald $|t_\nu - t_{\nu-1}| \leqslant \delta^*$ *ist. Summiert wird über alle Glieder der Zerlegung.*

Beweis. Seien $s_1, s_2, \ldots, s_m$ die Nullstellen von $f(z)$ in $\mathfrak{G}$. Dann läßt sich nach Hilfssatz 1 für $\varepsilon^* = \varepsilon/4m$ jedem s_i eine Umgebung $|z-s_i| < \varrho_i$; und eine Zahl δ_i zuordnen. Wir setzen $\varrho = \min\varrho_i$ und wählen $\delta^{(0)}$ so, daß $|z_\nu-\zeta_\nu| < \varrho/2$ für $|t_\nu-\tau_\nu| < \delta^{(0)}$. Dann gilt für jedes Zerlegungsintervall entweder $|s_i-z_\nu|$, $|s_i-\zeta_\nu| < \varrho$ für ein gewisses i oder $|s_i-z_\nu|$, $|s_i-\zeta_\nu| > \varrho/2$ für alle i.

1) $|s_i-z_\nu|$, $|s_i-\zeta_\nu| < \varrho$ für ein gewisses i. Diese Intervalle liegen in den Umgebungen der s_i und nach Hilfssatz 1ist die Summe (9a), wenn nur über diese Intervalle summiert wird, kleiner als $\varepsilon/4$, wenn $|t_\nu-\tau_\nu| < \delta^{(1)} = \min\limits_i\{\bar{\delta}_i\}$.

2) $|s_i - z_\nu|$, $|s_i - \zeta_\nu| > \varrho/2$ für alle i. Dann gilt (8) in $\mathfrak{G}$ und $|f'(z)| \geqq d$, wenn z beliebig auf $\mathfrak{C}$, jedoch $|z - s_i| > \varrho/2$ ist. Nun gibt es ein $\delta^{(2)}$, so daß $|z_\nu - \zeta_\nu| < d/3L$ und die Integrationsstrecke $g_\nu \in \mathfrak{G}$ ist für $|t_\nu - \tau_\nu| < \delta^{(2)}$. Dann verifiziert man leicht folgende zwei Ungleichungen:

$$\frac{1}{2}\left|\int\limits_{\zeta_\nu}^{z_\nu} f''(w)(z_\nu - w)^2 dw\right| < \frac{1}{6}|f'(\zeta_\nu)(z_\nu - \zeta_\nu)^2|,$$

$$\left|(z_\nu - \zeta_\nu)\int\limits_{\zeta_\nu}^{z_\nu} f''(w)(z_\nu - w)\,dw\right| < \frac{1}{3}|f'(\zeta_\nu)(z_\nu - \zeta_\nu)^2|,$$

und diese ergeben nach Addition und Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\frac{1}{2}\left|f'(\xi_\nu)(z_\nu - \zeta_\nu) + \int\limits_{\zeta_\nu}^{z_\nu} f''(w)(z_\nu - w)^2 dw\right|$$

$$< |z_\nu - \zeta_\nu|\left|f'(\zeta_\nu)(z_\nu - \zeta_\nu) + \int\limits_{\zeta_\nu}^{z_\nu} f''(w)(z_\nu - w)\,dw\right|,$$

woraus durch partielle Integrationen

$$\left|\int\limits_{\zeta_\nu}^{z_\nu} [f(w) - f(\zeta_\nu)]dw\right| < |\zeta_\nu - z_\nu|\,|f(z_\nu) - f(\zeta_\nu)| \tag{28}$$

folgt. Wegen (7) läßt sich nun auch für diese Intervalle die Summe (9a) kleiner als $\varepsilon/4$ machen, sobald $|t_\nu - \tau_\nu| < \delta^{(3)}$ ist. Setzen wir noch $\delta^* = \min\{\delta^{(i)}\}$ für $i = 0, 1, 2, 3$, so ist Hilfssatz 2 bewiesen.

4. Der Cauchysche Integralsatz.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu

Satz 3 (Cauchyscher Integralsatz). *Ist $\mathfrak{C}$ eine stetige, nicht notwendig rektifizierbare Kurve, die ganz im Innern eines einfach zusammenhängenden und beschränkten Regularitätsbereiches $\mathfrak{G}$ der Funktion $f(z)$ verläuft, so ist für die Existenz von $\int\limits_{\mathfrak{C}} f(z)dz$ notwendig und hinreichend, daß die Bedingung (7) für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt ist. Im Falle der Existenz hängt der Wert des Integrals nur von den Endpunkten der Kurve ab.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung (7) ist eine Folge von Satz 1. Für den hinreichenden Teil des Beweises stützen wir uns auf Hilfssatz 2. Durchläuft man die Kurve in umgekehrter Richtung, d. h.

ersetzt man in (9a) z_ν durch $z_{\nu-1}$, so erhält man

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{\zeta_\nu}^{z_{\nu-1}} [f(w)-f(\zeta_\nu)]\,dw \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9b}$$

für $|\tau_\nu - t_{\nu-1}| < \delta^{**}$. Es gilt nun

$$\left| -\sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1}) + \int_{\mathfrak{C}'} f(w)\,dw \right|$$
$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \left| \int_{z_{\nu-1}}^{\zeta_\nu} [f(w)-f(\zeta_\nu)]\,dw \right| + \left| \int_{\zeta_\nu}^{z_\nu} [f(w)-f(\zeta_\nu)]\,dw \right| \right\} < \varepsilon\,.$$

Dabei sei $\mathfrak{C}'$ irgendein Polygonzug, der $z(a)$ und $z(b)$ innerhalb $\mathfrak{G}$ verbindet. Die Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes für Polygone wurde benutzt. Es folgt, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1}) \to \int_{\mathfrak{C}'} f(w)\,dw \tag{29}$$

für $\delta^*, \delta^{**} \to 0$, und Satz 3 ist bewiesen.

Rechnet man die Hilfssätze mit, so ist der Beweis des hinreichenden Teils recht mühselig. Er kann wesentlich abgekürzt werden, wenn man nur die Unabhängigkeit des Integrals von der Integrationskurve beweisen will, die Existenz von $\int f(z)\,dz$ also voraussetzt. Es braucht dann die Gültigkeit von (29) nur für eine spezielle Zerlegungsfolge gezeigt werden; doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

Aus der Art der Beweisführung zu Satz 3 hat sich übrigens ergeben, daß die Summen (9a) und (9b) und damit die Summe (3) in [1], wenn sie überhaupt konvergieren, notwendig absolut konvergieren. Damit ist eine in [1] aufgeworfene Frage beantwortet worden.

Für Funktionentheoretiker sei erwähnt, daß man die im Hilfssatz 1, Fall 3b) und im Hilfssatz 2, Fall 2) erhaltenen Abschätzungen durch Entwicklung in eine Taylorreihe noch etwas umformen kann:

$$f(z)-f(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!}(z-\zeta)^\nu\,,$$

$$\int_{\zeta}^{z} [f(w)-f(\zeta)]\,dw = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\zeta)}{(\nu+1)!}(z-\zeta)^{\nu+1}\,.$$

Aus (22) bzw. (28) folgt dann

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\zeta)}{(\nu+1)!}(z-\zeta)^\nu \right| < \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!}(z-\zeta)^\nu \right|.$$

Diese Abschätzung gilt gleichmäßig in bezug auf z und ζ in dem Bereich, der durch die Voraussetzungen für die Herleitung der Ungleichungen (22) und (28) definiert wird.

Durch Satz 3 wird auch noch einmal die Parameterinvarianz von $\int\limits_{\mathfrak{C}} f(z)dz$ für reguläre Integranden bewiesen.

5. Das Integrationsverhalten der stetigen Kurven. Wir wollen nun untersuchen, wovon die Integrierbarkeit einer regulären Funktion über eine stetige Kurve abhängt, und die stetigen Kurven bezüglich ihres Integrationsverhaltens klassifizieren.

SATZ 4. *Die Integrierbarkeit einer regulären Funktion $f(z)$ über eine stetige Kurve $\mathfrak{C}$ hängt nur von der Gestalt der Kurve und von Lage und Ordnung der Nullstellen von $f'(z)$ auf $\mathfrak{C}$ ab.*

Um Satz 4 zu beweisen, zeigen wir zunächst einen Hilfssatz.

HILFSSATZ 3. *Sind $f(z)$ und $h(z)$ in einem die Kurve $\mathfrak{C}$ enthaltenden Gebiet regulär und ist $f(z)$ über $\mathfrak{C}$ integrierbar, so auch $h(z)$, wenn aus $f'(s) = \dots = f^{(k)}(s) = 0$, $f^{(k+1)}(s) \neq 0$ folgt $h'(s) = \dots = h^{(l)}(s) = 0$, $h^{(l+1)}(s) \neq 0$ mit $l \geqslant k$ für $s \in \mathfrak{C}$, wenn also die Nullstellen von $f'(z)$ auf $\mathfrak{C}$ auch solche von $h'(z)$ und zwar von gleicher oder höherer Ordnung sind.*

Zum Beweis von Hilfssatz 3 gehe man ähnlich wie beim Beweis des hinreichenden Teils von Satz 3 vor, ersetze aber die zentrale Ungleichung (14) durch die Ungleichung

$$\left|\int\limits_{\zeta_\nu}^{z_\nu} [h(w)-h(\zeta_\nu)]\,dw\right| \leqslant A\,\{|z_\nu - z_\nu^*|\,|f(z_\nu)-f(z_\nu^*)| + |z_\nu^* - \zeta_\nu|\,|f(z_\nu^*)-f(\zeta_\nu)|\}\,.$$

Um diese zu beweisen, wähle man in Hilfssatz 1 $\varrho < 1$ und multipliziere die linken Seiten bestimmter, zum Beweis von (14) führender Ungleichungen mit $|\zeta_\nu - s|^{l-k}$ bzw. $|z_\nu - s|^{l-k}$. Genauso zeigt man anstelle von (28) die Ungleichung

$$\left|\int\limits_{\zeta_\nu}^{z_\nu} [h(w)-h(\zeta_\nu)]\,dw\right| \leqslant |z_\nu - \zeta_\nu|\,|f(z_\nu)-f(\zeta_\nu)|\,,$$

wenn $|f'(z)| \geqslant d$ in ζ_ν.

Aus Hilfssatz 3 folgt sofort Satz 4.

Hat die Ableitung von $f(z)$ keine Nullstellen auf $\mathfrak{C}$, so folgt aus Satz 4, daß die Bedingung (7) mit der Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta z|^2 \to 0 \tag{30}$$

äquivalent ist, weil dann $f(z)$ zugleich mit $f_1(z) = z$ über $\mathfrak{C}$ integrierbar ist. Fragt man insbesondere nach einer Klasse K von Kurven, über die beliebige reguläre Funktionen integrierbar sind, so sind die Elemente von K dadurch charakterisiert, daß die Bedingung (30) für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt ist. Alle Elemente von K sind stetige Kurven. Es sei erwähnt, daß z.B. auch die bekannte v. Kochsche Kurve ein Element von K ist, obwohl sie nicht rektifizierbar ist. Zur weiteren Diskussion von (30) vergleiche man [1], 3.

Es sind noch Kurven denkbar, über die gewisse reguläre Funktionen integrierbar sind, andere dagegen nicht. Als Beispiel nehmen wir die durch

$$z(t) = \begin{cases} t \exp\left(\frac{i}{t^2}\right) & \text{für} \quad 0 < t \leqslant 1, \\ 0 \quad \text{für} \quad t = 0 \end{cases}$$

definierte stetige Kurve $\mathfrak{C}_3$. Wählt man $t_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, so wird $|\Delta z_\nu| > \frac{2}{\sqrt{\pi\nu}}$ und die Summe (30) divergiert, $\int\limits_{\mathfrak{C}_3} z\,dz$ existiert also nicht. Es existiert aber $\int\limits_{\mathfrak{C}_3} z^2 dz$.

Zum Beweis betrachten wir eine Zerlegung des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$ mit $t_{\nu+1} \leqslant t_\nu$ und $t_\nu - t_{\nu+1} \leqslant \delta$. Wir teilen die Indizes $\nu = 1, \dots, n$ in drei Klassen auf. In der ersten Klasse K_1 liegen alle Indizes ν_l, für die $0 < t_{\nu_l+1} < \varrho$ und

$$\frac{1}{t_{\nu_l+1}} - \frac{1}{t_{\nu_l}} \geqslant 1$$

gilt. Die ν_l seien so numeriert, daß $\nu_{l+1} \geqslant \nu_l + 1$ ist. Dann folgt

$$t_{\nu_l} \leqslant t_{\nu_l+1} + \delta \leqslant 2\sqrt{\delta}$$

für $\delta < 1$ und außerdem

$$t_{\nu_l+1} \leqslant \frac{t_{\nu_l}}{t_{\nu_l} + 1},$$

woraus wir durch vollständige Induktion

$$t_{\nu_l} \leqslant \frac{1}{l}$$

entnehmen. Nun ist

$$(31) \qquad \sum_{\nu\in K_1} |\Delta z_\nu^2|\,|\Delta z_\nu| \leqslant \sum_l 4 t_{\nu_l}^3 \leqslant \sum_l \frac{8\sqrt{\delta}}{l^2} \leqslant 8\sqrt{\delta} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \leqslant \frac{4}{3}\pi^2\sqrt{\delta} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

In der zweiten Indexklasse K_2 liegen alle Indizes, die

$$\frac{1}{t_{\nu+1}} - \frac{1}{t_\nu} < 1 \tag{32}$$

und $t_{\nu+1} < \varrho$ erfüllen. Außerdem sei $t_{\nu+1} \neq 0$. Für diese schätzen wir folgendermaßen ab:

$$|\Delta z_\nu^2| \leqslant 2 \int\limits_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \left| z \frac{dz}{dt} \right| dt \leqslant 6 \int\limits_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dt}{t} \leqslant 6 \frac{t_\nu - t_{\nu+1}}{t_{\nu+1}}$$

und wegen (32)

$$|\Delta z_\nu| \leqslant \frac{2t_\nu}{t_{\nu+1}} t_{\nu+1} \leqslant 4t_{\nu+1}\,,$$

wir erhalten

$$\sum_{\nu \in K_2} |\Delta z_\nu^2|\,|\Delta z_\nu| \leqslant 24 \sum_{\nu \in K_2} (t_\nu - t_{\nu+1}) \leqslant 24(\varrho + \delta) < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{33}$$

In die dritte Indexklasse K_3 nehmen wir alle ν mit $t_{\nu+1} > \varrho$ und das ν mit $t_{\nu+1} = 0$ auf. Dann gilt für hinreichend kleines δ

$$\sum_{\nu \in K_3} |\Delta z_\nu^2|\,|\Delta z_\nu| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{34}$$

Aus (31), (33) und (34) folgt, daß (7) für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt ist. Nach Satz 4 sind nun alle Funktionen mit $f'(0) = 0$ über $\mathfrak{C}_3$ integrierbar, alle anderen Funktionen mit $f'(0) \neq 0$ sind dagegen über $\mathfrak{C}_3$ nicht intergrierbar. Die Integrierbarkeit von $f(z) = z^n$ über $\mathfrak{C}_3$ ergibt sich übrigens für $n > 2$ in sehr viel einfacherer Weise als die von $f(z) = z^2$ aus der Abschätzung

$$|\Delta z_\nu^n| \leqslant n \int\limits_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \left| z^{n-1} \frac{dz}{dt} \right| dt \leqslant M(t_\nu - t_{\nu+1})$$

wegen $\left| z^{n-1} \cdot \frac{dz}{dt} \right| \leqslant \frac{M}{n}$.

Schließlich soll noch eine Kurve angegeben werden, über die keine einzige reguläre Funktion $f(z) \neq \text{const}$ integrierbar ist. Eine solche Kurve $\mathfrak{C}_4$ wollen wir durch

$$z(t) = \begin{cases} it + t\left(\sin\frac{\pi}{t}\right)\sin\left(\sin\frac{\pi}{t}\right)^{-2} & \text{für} \quad 0 < t \leqslant 1,\ t \neq \frac{1}{k}, \\ 0 \quad \text{für} \quad t = 0\,, \frac{1}{k}, \end{cases}$$

wo k eine natürliche Zahl bedeutet, definieren.

$\mathfrak{C}_4$ ist sogar eine Jordankurve. Wählt man als Teilpunkte einer Zerlegung

$$t_\nu = \left(\frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{2}{(2\nu+1)\pi}} + 2l\right)^{-1},$$

so wird

$$|z_{\nu+1} - z_\nu|^2 \geqq [\Re(z_{\nu+1} - z_\nu)]^2 \geqq \frac{4}{(2l+1)^2(2\nu+3)\pi},$$

und man erkennt wie bei der Kurve $\mathfrak{C}_3$ an der Stelle $t = 0$, daß $f'(z)$ an den Stellen $1/2l$, $l = 1, 2, \ldots$ verschwinden muß, damit die Bedingung (7) erfüllbar, $f(z)$ also über $\mathfrak{C}_4$ integrierbar ist. Daraus folgt, daß $f(z)$ notwendig eine Konstante ist.

§ 2. Reelle Stieltjes-Integrale

1. Notwendige Bedingungen für die Existenz und ihre Äquivalenz. Wir wollen uns jetzt reellen Stieltjes-Integralen der Form

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) \tag{35}$$

zuwenden. Man prüft leicht nach, daß alle Schlüsse, die zur Ableitung der notwendigen Bedingung (7) geführt haben, sich auch auf Integrale der Form (35) anwenden lassen.

Satz 5. *Für die Existenz von* (35) *ist notwendig, daß für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta f(t_\nu) \Delta g(t_\nu)| \to 0 \tag{36}$$

erfüllt ist.

Es soll nun untersucht werden, ob die Bedingung (36) unter gewissen Voraussetzungen auch hinreichend für die Existenz von (35) ist. Vorher wollen wir aber noch drei mit (36) äquivalente Bedingungen herleiten. Dazu beweisen wir zunächst eine Ungleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |\Delta g(t_\nu)| \leqq 3 \sum_{\nu} |\Delta f(t_\nu) \Delta g(t_\nu)| + \frac{1}{n} \tag{37}$$

wobei $m_\nu = m(t_\nu, t_{\nu-1}) = \sup\limits_{t_{\nu-1} < t', t'' < t_\nu} |f(t') - f(t'')|$ die Schwankung von $f(t)$ in $\langle t_{\nu-1}, t_\nu\rangle$ bedeutet und wobei die linke Summe über eine beliebige Zerlegung von $\langle a, b\rangle$ in n Teilintervalle und die rechte Summe über eine Verfeinerung dieser Zerlegung zu erstrecken ist. Dabei wollen wir in dieser und in der folgenden Nummer stets voraussetzen, daß die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ beschränkt sind.

Beweis. Sei eine Zerlegung des Intervalls $\langle a, b\rangle$ in n Teilintervalle vorgelegt. Sollten etwa alle $|\Delta g(t_\nu)| = 0$ sein, so wird (37) trivial. Wir können also $\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta g(t_\nu)| \neq 0$ annehmen und in jedem Teilintervall Punkte t'_ν, t''_ν so finden, daß $t'_\nu \leqslant t''_\nu$ und

$$m_\nu - |f(t''_\nu) - f(t'_\nu)| \leqslant \frac{1}{n \sum_{\nu=1}^{n} |\Delta g(t_\nu)|},$$

woraus folgt, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |\Delta g(t_\nu)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |f(t''_\nu) - f(t'_\nu)| \, |\Delta g(t_\nu)| + \frac{1}{n}. \tag{38}$$

Um (37) zu erhalten, brauchen wir nur noch einen beliebigen Summanden $|f(t''_\nu) - f(t'_\nu)| \, |\Delta g(t_\nu)|$ abzuschätzen. Zu diesem Zweck werden wieder vier Fälle unterschieden:

1. Fall:

$$3|f(t_\nu) - f(t''_\nu)| \leqslant |f(t''_\nu) - f(t'_\nu)|,$$
$$3|f(t_{\nu-1}) - f(t'_\nu)| \leqslant |f(t''_\nu) - f(t'_\nu)|.$$

Dann folgt unter Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|f(t''_\nu) - f(t'_\nu)| \, |\Delta g(t_\nu)| \leqslant 3|\Delta f(t_\nu)| \, |\Delta g(t_\nu)|. \tag{39}$$

2. Fall:

$$3|f(t_\nu) - f(t''_\nu)| \geqslant |f(t''_\nu) - f(t'_\nu)|,$$
$$3|f(t_{\nu-1}) - f(t'_\nu)| \leqslant |f(t''_\nu) - f(t'_\nu)|.$$

Jetzt hat man

$$|f(t''_\nu) - f(t'_\nu)| \leqslant 3|f(t_{\nu-1}) - f(t''_\nu)|$$

und somit

$$\begin{aligned} &|f(t''_\nu) - f(t'_\nu)| \, |\Delta g(t_\nu)| \\ &\quad \leqslant 3|f(t_\nu) - f(t''_\nu)| \, |g(t_\nu) - g(t''_\nu)| + 3|f(t''_\nu) - f(t_{\nu-1})| \, |g(t''_\nu) - g(t_{\nu-1})|. \end{aligned} \tag{40}$$

3. Fall:

$$3|f(t_\nu) - f(t''_\nu)| \leqslant |f(t''_\nu) - f(t'_\nu)|,$$
$$3|f(t_{\nu-1}) - f(t'_\nu)| \geqslant |f(t''_\nu) - f(t'_\nu)|.$$

Man erhält analog zum 2. Fall ($t_\nu \leftrightarrow t_{\nu-1}$, $t'_\nu \leftrightarrow t''_\nu$)

$$\begin{aligned} &|f(t''_\nu) - f(t'_\nu)| \, |\Delta g(t_\nu)| \\ &\quad \leqslant 3|f(t_\nu) - f(t'_\nu)| \, |g(t_\nu) - g(t'_\nu)| + 3|f(t'_\nu) - f(t_{\nu-1})| \, |g(t'_\nu) - g(t_{\nu-1})|. \end{aligned} \tag{41}$$

4. Fall:

$$3|f(t_\nu)-f(t_\nu'')| \geqslant |f(t_\nu'')-f(t_\nu')|,$$
$$3|f(t_{\nu-1})-f(t_\nu')| \geqslant |f(t_\nu'')-f(t_\nu')|.$$

Diesmal ergibt sich

$$(42) \qquad |f(t_\nu'')-f(t_\nu')|\,|\Delta g(t_\nu)| \leqslant 3|f(t_\nu)-f(t_\nu'')|\,|g(t_\nu)-g(t_\nu'')| + \\ + 3|f(t_\nu'')-f(t_\nu')|\,|g(t_\nu'')-g(t_\nu')| + 3|f(t_\nu')-f(t_{\nu-1})|\,|g(t_\nu')-g(t_{\nu-1})|.$$

Aus (38)-(42) folgt die Ungleichung (37) und damit

SATZ 6. *Ist die Bedingung* (36) *für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt, so gilt auch*

$$(43) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |\Delta g(t_\nu)| \to 0$$

für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge und umgekehrt.

In Satz 6 kann man natürlich (43) durch

$$(43\text{a}) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} n_\nu |\Delta f(t_\nu)| \to 0$$

ersetzen, wobei $n_\nu = n(t_\nu, t_{\nu-1}) = \sup\limits_{t_{\nu-1}<t',t''<t_\nu} |g(t')-g(t'')|$ wieder die Schwankung von $g(t)$ in $\langle t_{\nu-1}, t_\nu\rangle$ ist.

Im Unterschied zur Bedingung (36) sind (43) bzw. (43a) nicht symmetrisch in bezug auf g und f. Wir wollen deshalb noch eine symmetrische und mit (36) äquivalente Bedingung angeben.

SATZ 6a. *Ist die Bedingung* (36) *für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt, so gilt auch*

$$(44) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu n_\nu \to 0 .$$

für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge und umgekehrt.

Der Beweis von (44) stützt sich wieder auf eine mit (37) sehr verwandte Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu n_\nu \leqslant 3 \sum_{\nu} m_\nu |\Delta g(t_\nu)| + \frac{1}{n},$$

die sich ihrerseits ganz analog wie (37) beweisen läßt; man muß nur die dort in den Fällen 2-4 verwandte Dreiecksungleichung bezüglich $g(t)$ durch eine ähnlich einfache Ungleichung

$$m(A, C) \leqslant m(A, B) + m(B, C)$$

ersetzen.

Man könnte vielleicht annehmen, daß im Falle differenzierbarer Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ die Bedingung (36) mit der Bedingung $\sum_{\nu=1}^{n}|f'(\tau_\nu)g'(\tau_\nu)|\Delta t_\nu^2\to 0$ bei beliebiger Zwischenstelle τ_ν äquivalent ist. Das Beispiel $f(t)=\sqrt{t}$ und $g(t)=t$; $a=0$, $b=1$ überzeugt uns aber davon, daß dies nicht der Fall ist.

Eine einfache Anwendung von Satz 6 ist

Satz 7. *Existieren* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ *und* $\int_b^c f(t)\,dg(t)$, *so existiert auch* $\int_a^c f(t)\,dg(t)$, *wenn gleichzeitig* (43) *für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge des Intervalls* $\langle a, c\rangle$ *gilt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{z}$ eine Zerlegung von $\langle a, c\rangle$ mit δ als Maximum der Teilintervallänge. Der Teilungspunkt b falle in das i-te Intervall $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$. Dann gilt

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu)[g(t_\nu)-g(t_{\nu-1})]-\int_a^b f(t)\,dg(t)-\int_b^c f(t)\,dg(t)\Big|$$
$$\leqslant\Big|\sum_{\nu=1}^{i-1} f(\tau_\nu)[g(t_\nu)-g(t_{\nu-1})]+f(b)[g(b)-g(t_{i-1})]-\int_a^b f(t)\,dg(t)\Big|+$$
$$+\Big|\sum_{\nu=i+1}^{n} f(\tau_\nu)[g(t_\nu)-g(t_{\nu-1})]+f(b)[g(t_i)-g(b)]-\int_b^c f(t)\,dg(t)\Big|+$$
$$+|f(\tau_i)-f(b)|\,|g(t_i)-g(t_{i-1})|$$

und hieraus folgt die Behauptung

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu)[g(t_\nu)-g(t_{\nu-1})]\to\int_a^b f(t)\,dg(t)+\int_b^c f(t)\,dg(t)\,.$$

Die Sätze 6 und 7 lassen sich übrigens wortwörtlich auf komplexe Kurvenintegrale übertragen.

2. Der Fall monotoner Belegungsfunktionen. Smirnow kommt in [3], I 3 Satz 4 zu dem Resultat, daß die Bedingung (44) für im weiteren Sinne monotone Funktionen $g(t)$ notwendig und hinreichend für die Existenz von (35) ist. Zusammen mit Satz 6a und Satz 7 folgt hieraus

Satz 8. *Zerfällt das Intervall* $\langle a, b\rangle$ *in endlich viele Intervalle, in denen* $f(t)$ *oder* $g(t)$ *monoton ist, und sind* $f(t)$ *und* $g(t)$ *in* $\langle a, b\rangle$ *beschränkt, so ist für die Existenz von* (35) *notwendig und hinreichend, daß* (36) (*oder* (44)) *für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt ist.*

Interessant ist der Fall $g(t) = t$. Wir erhalten dann aus Satz 8

SATZ 9 (Integrabilitätskriterium). *Die beschränkte Funktion $f(t)$ ist über $\langle a, b\rangle$ genau dann im Riemannschen Sinne integrierbar, wenn*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta f(t_\nu)\,\Delta t_\nu| \to 0$$

für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge von $\langle a, b\rangle$.

Für eine monotone und stetige Belegungsfunktion wollen wir noch eine mit (44) äquivalente Bedingung angeben.

SATZ 10. *Ist die Bedingung* (44) *für irgendeine Zerlegungsfolge $\{\mathfrak{z}_n\}$ erfüllt, so auch für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{\bar{\mathfrak{z}}_n\}$, sofern $g(t)$ monoton und stetig ist.* (Es muß natürlich $|f(t)| \leq M$ sein, wie wir vorausgesetzt haben.)

Beweis. Nach Voraussetzung läßt sich ein $\mathfrak{z}_k$ so finden, daß die Zerlegungssumme (44) über $\mathfrak{z}_k$ kleiner als $\varepsilon/2$ wird. Fügen wir zu $\mathfrak{z}_k$ die Teilpunkte von $\bar{\mathfrak{z}}_n$ hinzu, so möge $\mathfrak{z}_n^*$ entstehen. Bei der Weiterteilung von $\mathfrak{z}_k$ zu $\mathfrak{z}_n^*$ verkleinert sich (44). Lassen wir in $\mathfrak{z}_n^*$ alle k Teilpunkte von $\mathfrak{z}_k$ weg, so entsteht $\bar{\mathfrak{z}}_n$ und (44) vergrößert sich höchstens um $2kM\delta < \varepsilon/2$, wenn $\delta = \max|g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})|$ hinreichend klein ist. Die Summe (44) konvergiert also auch für $\{\bar{\mathfrak{z}}_n\}$.

Wir wollen durch zwei Beispiele zeigen, daß man die Monotonie und Stetigkeit von $g(t)$ in Satz 10 nicht entbehren kann. Seien zunächst

$$f(t) = \begin{cases} t\left\{\left|\sin\dfrac{\pi}{t}\right| + \sin\dfrac{\pi}{t}\right\} & \text{für} \quad 0 < t \leq 1\,, \\ 0 \quad \text{für} \quad t = 0\,, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} t\left\{\left|\sin\dfrac{\pi}{t}\right| - \sin\dfrac{\pi}{t}\right\} & \text{für} \quad 0 < t \leq 1\,, \\ 0 \quad \text{für} \quad t = 0\,. \end{cases}$$

$f(t)$ und $g(t)$ sind stetig in $\langle 0, 1\rangle$, aber nicht monoton. Führt man durch $t_n = 1$, $t_{n-1} = \frac{1}{2}, \ldots,$ $t_1 = 1/n$, $t_0 = 0$ eine Zerlegungsfolge ein, so strebt (44) gegen Null für n gegen Unendlich. Betrachtet man dagegen $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \ldots,$ $2/2n+1$ als Teilpunkte, so divergiert (44).

Im zweiten Beispiel setzen wir

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t < 1\,, \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leq t \leq 2\,, \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1\,, \\ 1 & \text{für} \quad 1 < t \leq 2\,. \end{cases}$$

Die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ sind beide monoton, haben aber in $t = 1$ eine gemeinsame Unstetigkeitsstelle. Daher ist (44) nur für solche Zerlegungsfolgen erfüllt, deren Elemente 1 als Teilpunkt enthalten. Das letzte Beispiel zeigt zugleich, daß bei unstetiger Belegungsfunktion $g(t)$

die obere Grenze der Untersummen und die untere Grenze der Obersummen übereinstimmen können, ohne daß (35) existiert, während dies nach Satz 10 und [3], I3, Satz 3 bei stetiger und monotoner Belegungsfunktion unmöglich ist.

3. Eine Substitutionsregel für Stieltjes-Integrale. Wir wollen nun für eine zweite Klasse von Stieltjes-Integralen zeigen, daß die Bedingung (36) für die Existenz von (35) hinreichend ist. Wir setzen voraus, daß f eine Funktion von g ist. Dann gilt ein mit Satz 3 verwandter

Satz 11 (Substitutionsregel). *Ist $g(t)$ stetig (oder $f(g)$ monoton), so ist für die Existenz von $\int_a^b f(g(t))\,dg(t)$ notwendig und hinreichend, daß* (36) *für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge erfüllt ist. Im Falle der Existenz ist*

$$\int_a^b f(g(t))\,dg(t) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g)\,dg\,, \tag{45}$$

wobei das rechte Integral als gewöhnliches Riemannsches Integral aufzufassen ist. Die Existenz des rechten Integrals folgt aus der des linken.

Wegen Satz 7 braucht wieder nur der hinreichende Teil gezeigt werden. Sei zunächst $g(t)$ stetig. Aus (36) folgt, daß $|f(t)| \leqslant M$ ist. Weiterhin garantiert uns (36) die Existenz des in (45) rechts stehenden Riemannschen Integrals. Zum Nachweis der Existenz genügt es nach Satz 8, für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge die Konvergenz von

$$\sum_{\nu=1}^{n} |[f(g_\nu) - f(g_{\nu-1})](g_\nu - g_{\nu-1})| \tag{46}$$

gegen Null zu zeigen. Nach Voraussetzung läßt sich eine Zahl δ so angeben, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n'} \left|f(g(t_\nu)) - f(g(t_{\nu-1}))\right| |g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})| < \varepsilon/2 \tag{47}$$

ausfällt für $|t_\nu - t_{\nu-1}| < \delta$. Dann werde die Zerlegung des Intervalls $\langle g(a), g(b)\rangle$ so fein gewählt, daß

$$|g_\nu - g_{\nu-1}| < \frac{\varepsilon\delta}{4M(b-a)}\,. \tag{48}$$

Wegen der Stetigkeit von $g(t)$ lassen sich Punkte t_ν so finden, daß $g_\nu = g(t_\nu)$ und für höchstens $\left[\frac{1}{\delta}(b-a)\right]$ Intervalle $|t_\nu - t_{\nu-1}| > \delta$ ist. Für diese Intervalle ist die Summe (46) wegen (48) kleiner als $\varepsilon/2$. Für die restlichen Intervalle mit $|t_\nu - t_{\nu-1}| < \delta$ ist wegen (47) die Summe (46) kleiner als $\varepsilon/2$. Das rechte Integral in (45) existiert also. Wir zeigen jetzt die Existenz des linken Integrals und die Gültigkeit von Gleichung (45):

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{n}\Big\{f\big(g(\tau_\nu)\big)[g(t_\nu)-g(t_{\nu-1})]-\int_{g(t_{\nu-1})}^{g(t_\nu)} f(g)\,dg\Big\}\Big|$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\Big\{\Big|\int_{g(\tau_\nu)}^{g(t_\nu)}\big[f\big(g(\tau_\nu)\big)-f(g)\big]\,dg\Big|+\Big|\int_{g(t_{\nu-1})}^{g(t_\nu)}\big[f\big(g(\tau_\nu)\big)-f(g)\big]\,dg\Big|\Big\}$$

$$\leqslant \{m(t_\nu,\tau_\nu)\,|g(t_\nu)-g(\tau_\nu)|+m(\tau_\nu,t_{\nu-1})\,|g(\tau_\nu)-g(t_{\nu-1})|\}\,.$$

Die letzte Abschätzung folgt wieder aus der Gültigkeit des Zwischenwertsatzes für die stetige Funktion $g(t)$. Durch Anwendung von Satz 6 erhalten wir dann Satz 11.

Ist $f(g)$ monoton, so ist die Existenz des rechten Integrals klar, die Existenz des linken Integrals folgt wie oben aus der Existenz des rechten, wenn wir $m(t_\nu,\tau_\nu)$ durch $\big|f\big(g(t_\nu)\big)-f\big(g(\tau_\nu)\big)\big|$ ersetzen.

Wie man bemerkt, wurde die Stetigkeit von $g(t)$ beim Beweis nicht voll ausgenutzt, es wurde nur der Zwischenwertsatz verwendet. Es gibt aber Funktionen, die dem Zwischenwertsatz genügen, ohne stetig zu sein. Man könnte also die Voraussetzungen von Satz 11 noch etwas abschwächen. Dagegen ist die Vermutung falsch, daß es nach Satz 7 genügt, $f(g)$ als stückweise monoton oder $g(t)$ als stückweise stetig vorauszusetzen. Man braucht nur folgendes Beispiel zu betrachten:

$$f(g)=\sin g \quad\text{und}\quad g(t)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad 0\leqslant t<1\,,\\ \pi & \text{für}\quad 1\leqslant t\leqslant 2\,.\end{cases}$$

Es ist $\int_0^2 f\big(g(t)\big)\,dg(t)=0$, dagegen

$$\int_{g(0)}^{g(2)} f(g)\,dg=\int_0^\pi \sin g\,dg=2\,.$$

Man könnte die Funktion $f(g)$ mit $f(0)=f(\pi)$ sogar so definieren, daß das Riemann-Integral über $\langle 0,\pi\rangle$ nicht einmal existiert.

Literaturverzeichnis

[1] L. Berg, *Komplexe Kurvenintegrale über nichtrektifizierbare Kurven*, Math. Nachr. 20 (1959), S. 259-264.

[2] E. Kamke, *Das Lebesgue-Stieltjes-Integral*, Leipzig 1956.

[3] W. I. Smirnow, *Lehrgang der höheren Mathematik*, Teil V, Berlin 1962. (Übersetzung aus dem Russischen.)

Reçu par la Rédaction le 1. 8. 1963