ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXV (1971)

Sur la construction de la solution fondamentale principale pour l'équation du type parabolique

par J. CHABROWSKI (Katowice)

La présente communication contient la construction de la solution fondamentale principale pour l'équation linéaire parabolique. La solution fondamentale dite principale est connue dans la théorie des équations elliptiques [6] et [8]. Dans le cas des équations paraboliques ce problème a été traité dans la note [2], où le rôle de la solution fondamentale est joué par une mesure borélienne dépendant de point de l'espace-temps. La solution que nous construirons ici sera la densité de cette mesure.

1. Introduisons d'abord quelques définitions et hypothèses. Dans la suite, E_n désigne l'espace à n dimensions et E_{n+1} désigne l'espace-temps à $(n+1)$ dimensions.

Nous considérons l'opérateur parabolique linéaire

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(t,x)u_{x_j}\big)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u - u_t, \tag{1}$$

dont les coefficients sont définie dans tout l'espace-temps E_{n+1}. Les coefficients de l'opérateur L sont supposés soumis aux hypothèses suivantes:

I. Les coefficients a_{ij}, $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$, b_i, $\dfrac{\partial b_i}{\partial x_i}$, c sont bornés et hölderiens par rapport aux variables (t,x) dans E_{n+1} et de plus

$$c(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(t,x)}{\partial x_i} \leqslant 0 \qquad \text{pour } (t,x) \in E_{n+1} \tag{2}$$

$$c(t,x) \leqslant -d \tag{2'}$$

où d est une constante positive.

II. Il existe des constantes positives ν et μ telles que

$$\nu|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu|\xi|^2 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $(t,x) \in E_{n+1}$.

Dans la suite il sera commode d'introduire une certaine classe de fonctions non bornées. Une fonction $g(t, x)$ est dite de classe $E(M, p)$ dans l'espace-temps E_{n+1} (M et p étant des constantes positives) lorsque

$$|g(t, x)| \leqslant M \exp p\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i| + |t|\Big)$$

pour $(t, x) \in E_{n+1}$.

Posons

$$H(t, x, p) = \cosh pt \prod_{i=1}^{n} \cosh px_i.$$

Il est évident qu'il existe un nombre $p_0 > 0$, le plus grand et unique, tel que à chaque $0 < p < p_0$ on peut faire correspondre un nombre $\alpha > 0$ tel que $LH \leqslant -\alpha H$ dans E_{n+1}.

Cette propriété de l'opérateur L permet d'introduire la classe suivante de fonctions:

$$E = \{g(t, x) \in E(M, p); 0 < p < p_0, M > 0\}.$$

Une fonction $Z(t, x; \tau, y)$ définie pour $x, y \in E_n$ et $-\infty < \tau < t < +\infty$ est dite solution fondamentale principale de l'équation $Lu = 0$ lorsqu'elle satisfait aux deux conditions suivantes:

1° $Z(t, x; \tau, y)$, en tant que fonction de (t, x) pour chaque point fixé $(\tau, y) \in E_{n+1}$, possède des dérivées $Z_{x_i}, Z_{x_i x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ et Z_t continues dans $(\tau, +\infty) \times E_n$, et elle y satisfait à l'équation $LZ = 0$.

2° Si f est une fonction bornée et localement hölderienne par rapport aux variables $(t, x) \in E_{n+1}$, alors

$$L\Big[\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n} Z(t, x; \tau, y) f(\tau, y)\, dy\Big] = -f(t, x)$$

pour tout $(t, x) \in E_{n+1}$.

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* I *et* II *étant satisfaites, il existe une solution fondamentale principale de l'équation* $Lu = 0$ *définie pour* $x, y \in E_n$ *et* $-\infty < \tau < t < \infty$. *Cette solution possède les propriétés suivantes*:

$$\int_{E_n} Z(t, x; \tau, y)\, dy \leqslant 1 \quad \textit{pour } x \in E_n,\ -\infty < \tau < t < \infty, \tag{3}$$

$$\int_{E_n} Z(t, x; \tau, y)\, dx \leqslant 1 \quad \textit{pour } y \in E_n,\ -\infty < \tau < t < \infty,$$

$$0 \leqslant Z(t, x; \tau, y) \leqslant k(t-\tau)^{-n/2} \quad \textit{pour } x, y \in E_n,\ -\infty < \tau < t < \infty, \tag{4}$$

où k est une constante positive et, de plus, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} d\tau \int_{E_n} Z(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy$$

pour la fonction hölderienne f de classe E constitue la solution de l'équation $Lu = f$ dans E_{n+1} appartenant à la même classe E.

Démonstration. La démonstration est strictement analogue à celle du théorème I dans [1].

Soit $D_m = \{(-m < t \leqslant m) \times (|x| < m)\}$ pour $m = 1, 2, \ldots$ Désignons par $G_m(t, x; \tau, y)$ la fonction de Green pour l'équation $Lu = 0$ et pour le cylindre D_m (voir [4], p. 81). On sait qu'elle l'est aussi par rapport aux variables (τ, y) pour l'équation adjointe, qui prend la forme

$$L^* v = \sum_{i,j=1}^{n} [a_{ij}(\tau, y) v_{y_j}]_{y_i} - \sum_{i=1}^{n} [b_i(\tau, y) v]_{y_i} + c(\tau, y) v + v_\tau = 0.$$

En appliquant le principe d'extremum, il est facile de vérifier que

$$\int_{|y|<m} G_m(t, x; \tau, y) dy \leqslant 1 \quad \text{pour } |x| < m \text{ et } -m < \tau < t \leqslant m, \tag{5}$$

$$\int_{|y|<m} G_m(t, x; \tau, y) dx \leqslant 1 \quad \text{pour } |y| < m \text{ et } -m < \tau < t \leqslant m. \tag{6}$$

Observons que G_m et G_{m+1} satisfont aux conditions suivantes

$$L\Big[-\int_{-m}^{t} d\tau \int_{|y|<m} G_m(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy + \\ + \int_{-(m+1)}^{t} d\tau \int_{|y|<m+1} G_{m+1}(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy\Big] = 0$$

pour $(t, x) \in D_m$ et

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(s,\xi)\\(s,\xi)\in\partial D_m}} \Big[-\int_{-m}^{t} d\tau \int_{|y|<m} G_m(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy + \\ + \int_{-(m+1)}^{t} d\tau \int_{|y|<m+1} G_{m+1}(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy\Big] \geqslant 0,$$

où ∂D_m désigne la frontière parabolique et f est une fonction hölderienne à support borné dans D_m; en vertu du principe d'extremum nous avons

$$G_{m+1}(t, x; \tau, y) \geqslant G_m(t, x; \tau, y) \quad \text{pour } (t, x) \in D_m.$$

En posant $G_m(t, x; \tau, y) = 0$ pour $|x|$ ou $|y| \geqslant m$, $t > m$ et $\tau < -m$ on a

$$0 \leqslant G_1(t, x; \tau, y) \leqslant G_2(t, x; \tau, y) \leqslant \ldots \leqslant G_m(t, x; \tau, y) \leqslant G_{m+1}(t, x; \tau, y) \leqslant \ldots$$

pour tous $x, y \in E_n$ et $-\infty < \tau < t < +\infty$, d'où résulte que la suite $G_m(t, x; \tau, y)$ converge presque partout vers une limite $Z(t, x; \tau, y)$ qui est finie presque partout. Pour démontrer l'inégalité (3), on peut utiliser la méthode employée par Nash dans son travail [7], à savoir; $(\tau, y) \in E_{n+1}$ étant un point fixé arbitrairement, posons

$$E^m(t) = \int_{|x|<m} G_m(t, x; \tau, y)^2 dx \quad \text{pour } \tau < t,$$

où m est choisi de façon que $|y| < m$. Alors

$$\frac{d}{dt} E^m(t) = 2 \int_{|x|<m} G_m \frac{\partial}{\partial t} G_m \, dx$$

$$= 2 \int_{|x|<m} G_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial G_m}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial G_m}{\partial x_i} + c G_m \right] dx.$$

Les fonctions G_m et $\nabla_x G_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} G_m, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} G_m \right)$ sont continues pour $|x| < m$ et $-m < \tau < t < m$; en outre on a $G_m = 0$ pour $|x| = m$ (voir [4]). Par conséquent, en vertu du théorème de Green,

$$\frac{d}{dt} E^m(t) = 2 \int_{|x|<m} \left[\sum_{i,j=1}^{n} -a_{ij} \frac{\partial G_m}{\partial_k} \frac{\partial G_m}{\partial x_j} + \left(c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) G_m^2 \right] dx.$$

D'après les hypothèses I et II on a

$$\frac{d}{dt} E^m(t) \leqslant -2\nu \int_{|x|<m} |\nabla_x G_m|^2 dx. \tag{7}$$

La fonction G_m appartient à la classe $W^{1,2}(|x| < m)$ (voir [5], p. 14) et elle est continue pour $|x| < m$ et $G_m = 0$ pour $|x| = m$; par conséquent $G_m \in W_0^{1,2}$ $(|x| < m)$. Puisque $G_m = 0$ pour $|x| \geqslant m$ on a $G_m \in W_0^{1,2}(E_n)$. Il résulte de l'inégalité de Nirenberg (voir [5], p. 79, théorème 2.2) que

$$\int_{|x|<m} (G_m)^2 dx \tag{8}$$

$$\leqslant \beta \Big(\int_{|x|<m} |\nabla_x G_m|^2 dx \Big)^{\frac{n}{n+2}} \Big(\int_{|x|<m} G_m dx \Big)^{\frac{4}{n+2}} \leqslant \beta \Big(\int_{|x|<m} |\nabla_x G_m|^2 dx \Big)^{\frac{n}{n+2}},$$

où β est une constante dépendant de n. Les inégalités (7) et (8) entraînent

$$\frac{d}{dt} [E^m(t)]^{-2/n} \geqslant \frac{4\nu}{n\beta^{1+2/n}}.$$

On sait que $\lim\limits_{t\to\tau} E^m(t) = +\infty$ (voir [4]); en intégrant donc dans (τ, t) on trouve

$$(9) \qquad \int\limits_{|x|<m} G_m(t, x; \tau, y)^2 dx \leqslant \beta \left(\frac{n\beta}{4\nu}\right)^{n/2} (t-\tau)^{-n/2}$$

et pareillement, en profitant de l'équation $L^* G_m = 0$ par rapport aux variables (τ, y), on obtient

$$(10) \qquad \int\limits_{|y|<m} G_m(t, x; \tau, y)^2 dy \leqslant \beta \left(\frac{\beta n}{4\nu}\right)^{n/2} (t-\tau)^{-n/2} \quad \text{pour } t > \tau.$$

D'une part les fonctions G_m satisfont à l'identité de Kolmogorov

$$(11) \qquad G_m(t, x; \tau, y) = \int\limits_{|z|<m} G_m\left(t, x; \frac{t+\tau}{2}, z\right) G_m\left(\frac{t+\tau}{2}, z; \tau, y\right) dz$$

pour $|x|$, $|y| < m$ et $-m < \tau < t \leqslant m$. D'autre part, en appliquant l'inégalité de Schwarz, on conclut de (9) et (10) que

$$(12) \qquad G_m(t, x; \tau, y) \leqslant k(t-\tau)^{-n/2}.$$

Remarquons que la constante k dans la dernière inégalité ne dépend pas de m. Le passage à la limite dans (5), (6) et (12) conduit aux inégalités (3) et (4).

Il reste à prouver que Z est une solution fondamentale. Soient $(\tau, y) \in E_{n+1}$ un point fixé et D un domaine borné arbitraire contenu dans $(\tau, +\infty) \times E_n$. Choisissons un domaine borné B tel que $D \subset B \subset \bar{B} \subset (\tau, +\infty) \times E_n$. On a $|y| < m$ et $\bar{B} \subset D_m$ pour m suffisamment grand; en outre $LG_m = 0$ pour $(t, x) \in B$ et

$$G_m(t, x; \tau, y) \leqslant k[\min_{(t,x)\in\bar{B}} (t-\tau)]^{-n/2}.$$

Les estimations intérieures de Schauder et Friedman (voir [4], p. 64) permettent de choisir une suite G_{ϱ_m} qui converge uniformément vers $\bar{Z}$ dans D avec ses dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ et $\frac{\partial}{\partial t}$. Il est évident que $L\bar{Z} = 0$, mais en vertu de la convergence monotone de toute la suite G_m vers Z on a $\bar{Z} = Z$ donc $LZ = 0$ pour $(t, x) \in (\tau, \times\infty) \times E_n$.

Soit f une fonction hölderienne de classe $E(M, p)$. Soient $u_m(t, x)$ les solutions du problème

$$(13) \qquad Lu_m = f \text{ pour } (t, x) \in D_m, \quad u_m(t, x) = 0 \text{ pour } (t, x) \in \partial D_m.$$

On sait que la solution u_m peut être exprimée par la formule

$$u_m(t, x) = -\int\limits_{-m}^{t} d\tau \int\limits_{|y|<m} G_m(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy.$$

Il résulte du théorème 3 de [3] que la suite u_m converge presque uniformément vers une fonction u de classe $E(M_1, p_1)$ et satisfaisant à l'équation $Lu = f$ dans E_{n+1}, où $0 < p < p_1 < p_0$ et M_1 est une constante positive. Il est clair que

$$u(t, x) = -\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_m} Z(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy.$$

Remarque 1. Il résulte de (11) que la solution fondamentale $Z(t, x; \tau, y)$ satisfait à l'identité de Kolmogorov - Chapman

$$Z(t, x; \tau, y) = \int_{E_n} Z(t, x; s, z) Z(s, z; \tau, y) dz,$$

où $-\infty < \tau < s < t < +\infty$.

Remarque 2. Il est aisé de voir que $Z(t, x; \tau, y)$, en tant que fonction de (τ, y) pour chaque point fixé $(t, x) \in E_{n+1}$, satisfait à l'équation adjointe $L^* Z = 0$.

Remarque 3. Si f est une fonction hölderienne de classe $E(M, p)$, la solution de l'équation $Lu = f$ appartient à la classe $E(M_1, p)$, où M_1 est une constante positive dépendant de M et des coefficients de l'opérateur L.

Dans ce but introduisons les fonctions auxiliaires

$$u_m(t, x) = v_m(t, x) H(t, x, p),$$

où u_m sont les solutions du problème (13). Par un simple calcul nous vérifions que la fonction v_m satisfait à l'équation

$$\tilde{L}v_m = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} v_{mx_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i + 2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{H_{x_j}}{H}\right) v_{mx_i} + \frac{LH}{H} v_m - v_{mt} = \frac{f}{H}$$

et de plus $\dfrac{|f|}{H} \leqslant 2^{n+1} M$ dans E_{n+1}; il résulte donc du principe d'extremum que $|v_m| \leqslant \dfrac{2^{n+1} M}{a}$. Il est clair que la dernière inégalité permet de prouver que la solution u appartient à la classe $E(M_1, p)$.

2. Nous allons maintenant considérer l'opérateur (1) sous des hypothèses plus faibles que dans section 1.

On admet les hypothèses I et II en y remplaçant l'inégalité (2') par la condition suivante:

Pour un t_0 est vérifiée l'inégalité

$$(14) \quad \begin{aligned} &c(t, x) \leqslant -d && \text{pour } t \leqslant t_0,\ x \in E_n \ (d \text{ une constante positive}), \\ &c(t, x) \leqslant K && \text{pour } t > t_0,\ x \in E_n, \text{ où } K \text{ est une constante.} \end{aligned}$$

Posons

$$z(t,x) = H(t,x,p)\ [\omega(t)\varphi(t)q+1],$$

où

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geqslant t_0, \\ 0 & \text{pour } t \leqslant t_1,\ t_1 < t_0, \end{cases}$$

$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$, φ appartient à la classe C^2 et

$$\omega(t) = \exp[\bar{M}(t-t_0)], \qquad \bar{M} > 0.$$

On peut vérifier que la fonction $z(t,x)$ satisfait aux conditions ([3], théorème 5)

1° $z(t,x) > 0$ pour $(t,x) \in E_{n+1}$,

2° $z(t,x)$ appartient à la classe $C^2(E_{n+1})$ et $Lz \leqslant -z$ dans E_{n+1},

3° $\lim\limits_{r\to\infty} z(t,x) = \infty$, où $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + t^2$.

Il est évident que la fonction

$$v(t,x) = \frac{u(t,x)}{z(t,x)}$$

satisfait à l'équation

$$\tilde{L}v = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i + 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{z_{x_j}}{z}\right)v_{x_i} + \frac{Lz}{z} - v_t = z^{-1}Lu.$$

Il est clair que $Lu = 0$ dans E_{n+1} si et seulement si $\tilde{L}v = 0$. Si $\tilde{Z}(t,x;\tau,y)$ est une solution fondamentale de l'équation $\tilde{L}v = 0$, la fonction

$$Z(t,x;\tau,y) = \frac{z(t,x)}{z(\tau,y)}\tilde{Z}(t,x,\tau,y)$$

est solution fondamentale de l'équation $Lu = 0$. Puisque $Lz \leqslant -z$ et que les coefficients satisfont aux hypothèses I et II du section 1, le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.

THÉORÈME 2. *Les hypothèses* I *et* II *étant satisfaites* (*avec la modification* (14)), *il existe une solution fondamentale de l'équation* $Lu = 0$ *et elle est donnée par la formule*

$$Z(t,x;\tau,y) = \frac{z(t,x)}{z(\tau,y)}\tilde{Z}(t,x;\tau,y)$$

pour (t,x), $(\tau,y) \in E_{n+1}$ $(\tau < t)$, *où* $\tilde{Z}$ *est une solution fondamentale de l'équation* $\tilde{L}u = 0$.

Remarque 4. L'inégalité (2') est assez essentielle. Si c est non négatif l'équation $Lu = 0$ ne possède pas de solution fondamentale principale et non négative.

En supposant qu'il existe une solution fondamentale non négative Z on a

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}v_{x_j})_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}b_i v_{x_i}-\frac{1}{\delta}v-v_t = f+c\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{E_n}Zfdy+\frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{E_n}Zfdy-1 \tag{15}$$

pour toute fonction hölderienne et bornée f, où

$$v(t,x) = -\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{E_n}Z(t,x;\tau,y)f(\tau,y)dy+\delta$$

et δ est une constante positive. Si $f \geqslant 1$ dans E_{n+1} alors le second membre de l'égalité (15) est non négatif. Il résulte du théorème 1 de [2] que

$$\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{E_n}Z(t,x;\tau,y)f(\tau,y)dy \geqslant \delta \quad \text{dans } E_{n+1},$$

donc

$$\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{E_n}Z(t,x;\tau,y)f(\tau,y)dy = +\infty,$$

ce qui est impossible.

3. La solution fondamentale qui vient d'être construite est un prolongement de la solution fondamentale du problème de Cauchy.

Soit $H_{T_1T_2} = (T_1, T_2]\times E_n$ (où $-\tau < T_1, T_2 < +\infty$). Désignons par $\Gamma(t,x;\tau,y)$ la solution fondamentale du problème de Cauchy dans cette couche.

Théorème 3. *Sous les hypothèses* I *et* II (*ou bien sous l'hypothèse* II *avec la modification* (14)) *on a:*

$$Z(t,x;\tau,y) = \Gamma(t,x;\tau,y) \tag{16}$$

pour (t,x), $(\tau,y)\in H_{T_1,T_2}$ $(\tau < t)$.

Démonstration. Soit f une fonction hölderienne, bornée et à support borné contenu dans H_{T_1,T_2}. D'une part, l'intégrale

$$v_1(t,x) = -\int_{T_1}^{t}d\tau\int_{E_n}\Gamma(t,x;\tau,y)f(\tau,y)dy$$

constitue la solution de l'équation $Lu = f$ satisfaisant à la condition initiale $\lim_{t\to T_1} v_1(t, x) = 0$ pour $x \in E_n$. D'autre part la fonction

$$v_2(t, x) = -\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n} Z(t, x; \tau, y) f(\tau, x) dy$$

satisfait aussi à l'équation $Lu = f$ et

$$v_2(t, x) = 0 \qquad \text{pour } t \leqslant T_1,\ x \in E_n.$$

En vertu de l'unicité de la solution du problème de Cauchy on a

$$\int_{T_1}^{t} d\tau \int_{E_n} \Gamma(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n} Z(t, x; \tau, y) f(\tau, y) dy$$

pour $(t, x) \in H_{T_1, T_2}$, d'où résulte l'égalité (16).

Travaux cités

[1] D. G. Aronson and P. Besala, *Parabolic equations with unbounded coefficients*, Journ. Diff. Equ. 3 (1967), p. 1–14.

[2] J. Chabrowski, *Sur une mesure associée à l'équation différentielle aux dérivées partielles du type parabolique*, Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, XIII (1968), p. 99–113.

[3] — *Sur l'unicité des solutions des équations paraboliques et elliptiques*, Zeszyty Naukowe UJ, 13 (1969), p. 13–18.

[4] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Printice–Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[5] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцев, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Издательство „Наука"; Москва 1967.

[6] C. Miranda, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1955.

[7] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. 80 (1958), p. 931–954.

[8] B. Szafirski, *The fundamental solution for second order elliptic differential equations*, Zeszyty Naukowe UJ, 13 (1969), p. 97–107.

Reçu par la Rédaction le 22. 4. 1970