ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1974)

Théorème de Noether pour des problèmes variationnels à arguments déplacés

par A. HALANAY (Bucarest)

Résumé. Soit le problème variationnel défini par la fonctionnelle

$$J(x) = \int_{t_0}^{T} L(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1))\,dt.$$

Si

$$L(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = L(t, \varphi(x_1;\ a), x_2, (D_1\varphi)(x_1;\ a)\xi_1, \xi_2)$$
$$= L(t, x_1, \varphi(x_2;\ a), \xi_1, (D_1\varphi)(x_2;\ a)\xi_2),$$

où φ est un groupe de Lie, alors F, définie par

$$F(t, x, \xi, c) = [(D_4L)(t, x, c(t-1), \xi, \dot{c}(t-1)) + \\ + (D_5L)(t+1, c(t+1), x, \dot{c}(t+1), \xi)](D_2\varphi)(x;\ 0)z,$$

est une intégrale première des équations d'Euler–Lagrange pour tout z dans l'algèbre de Lie du groupe.

On obtient un résultat analogue pour le problème défini par $J(x) = \sum_k J_k(x)$,

$$J_k(x) = \int_{t_0}^{T} \cdots \int_{t_0}^{T} L_k(t_1, \ldots, t_k, x(t_1), \ldots, x(t_k), \dot{x}(t_1), \ldots, \dot{x}(t_k))\,dt_1 \ldots dt_k.$$

1. Introduction. Les problèmes variationnels à arguments déplacés conduisent à des équations d'Euler–Lagrange qui sont bien étranges et pour lesquelles il n'y a pas encore de théorie générale. C'est pourquoi toute nouvelle information concernant les propriétés de ces équations peut présenter un certain intérêt. Dans ce travail nous étudions la possibilité de prouver pour ces problèmes des théorèmes du type de Noether.

2. Théorème de Noether pour le problème variationnel à retard. Considérons la fonctionnelle

$$J(x) = \int_{t_0}^{T} L(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1))\,dt.$$

Les équations d'Euler–Lagrange correspondantes sont

$$\frac{d}{dt}\big[(D_4L)\big(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1)\big)+ + (D_5L)\big(t+1, x(t+1), x(t), \dot{x}(t+1), \dot{x}(t)\big)\big]$$
$$= (D_2L)\big(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1)\big)+ + (D_3L)\big(t+1, x(t+1), x(t), \dot{x}(t+1), \dot{x}(t)\big)$$

avec la convention que L et ses dérivées sont supposées nulles pour $t > T$; D_k est la dérivée par rapport aux arguments qui occupent la position k.

Nous allons supposer que L est invariante par rapport à l'action d'un groupe de transformations $\varphi(x;\ a)$ dans le sens suivant:

$$L(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = L\big(t, \varphi(x_1;\ a), x_2, (D_1\varphi)(x_1;\ a)\xi_1, \xi_2\big)$$
$$= L\big(t, x_1, \varphi(x_2;\ a), \xi_1, (D_1\varphi)(x_2;\ a)\xi_2\big).$$

Nous allons considérer une famille à un paramètre de telles transformations; soient

$$l_1(\varepsilon) = L\big(t;\ \varphi\big(x_1;\ a(\varepsilon)\big), x_2, (D_1\varphi)\big(x_1;\ a(\varepsilon)\big)\xi_1, \xi_2\big),$$
$$l_2(\varepsilon) = L\big(t, x_1, \varphi\big(x_2;\ a(\varepsilon)\big), \xi_1, (D_1\varphi)\big(x_2;\ a(\varepsilon)\big)\xi_2\big).$$

L'invariance de L montre que les fonctions l_1 et l_2 sont constantes, donc en particulier $l_1'(0) = l_2'(0) = 0$.

Supposant que $a(0) = 0$, $\varphi(x;\ 0) = x$, nous obtenons

$$(D_2L)(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)(D_2\varphi)(x_1;\ 0)a'(0)+ + (D_4L)(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)(D_1D_2\varphi)(x_1;\ 0)a'(0)\xi_1 = 0,$$
$$(D_3L)(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)(D_2\varphi)(x_2;\ 0)a'(0)+ + (D_5L)(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)(D_1D_2\varphi)(x_2;\ 0)a'(0)\xi_2 = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\big[(D_2L)\big(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1)\big)+$$
$$+ (D_3L)\big(t+1, x(t+1), x(t), \dot{x}(t+1), \dot{x}(t)\big)\big](D_2\varphi)\big(x(t);\ 0\big)a'(0)+$$
$$+\big[(D_4L)\big(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1)\big)+$$
$$+ (D_5L)\big(t+1, x(t+1), x(t), \dot{x}(t+1), \dot{x}(t)\big)\big](D_1D_2\varphi)\big(x(t);\ 0\big)a'(0)\dot{x}(t) = 0$$

et, en tenant compte des équations d'Euler–Lagrange, on déduit que

$$\Big\{\frac{d}{dt}\big[(D_4L)\big(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1)\big)+$$

$$+(D_2L)\big(t+1, x(t+1), x(t), \dot{x}(t+1), \dot{x}(t)\big)\big]\Big\}\,(D_2\varphi)\big(x(t);\ 0\big)\alpha'(0)+$$

$$+\big[(D_4L)\big(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1)\big)+$$

$$+(D_5L)(t+1)x(t+1), x(t), \dot{x}(t+1), \dot{x}(t)\big)\big]\frac{d}{dt}\big[(D_2\varphi)\big(x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\big] = 0$$

ce qui montre que si x est une solution des équations d'Euler–Lagrange, la fonction

$$t\mapsto(D_4L)\big(t, x(t), x(t-1), \dot{x}(t), \dot{x}(t-1)\big)+$$
$$+(D_5L)\big(t+1, x(t+1), x(t), \dot{x}(t+1), \dot{x}(t)\big)(D_2\varphi)\big(x(t);\ 0\big)\alpha'(0)$$

est constante, ou bien que la fonction

$$t\mapsto F\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(\cdot)\big)$$

où

$$F(t, x, \xi, c) \overset{\text{def}}{=} \big[(D_4L)\big(t, x, c(t-1), \xi, \dot{c}(t-1)\big)+$$
$$+(D_5L)\big(t+1, c(t+1), x, \dot{c}(t+1), \xi\big)\big](D_2\varphi)(x;\ 0)\alpha'(0)$$

est constante pour toute solution x des équations d'Euler–Lagrange. Donc F est une intégrale première de ces équations et à chaque famille à un paramètre de transformations du groupe considéré correspondra une telle intégrale première. C'est justement le théorème de Noether.

Pour les applications il y aura lieu de considérer une extension au cas de „l'invariance infinitésimale" [2], notamment à la situation où l'on peut trouver une fonction η telle que

$$(D_2L)(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)\eta(x_1)+(D_4L)(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)(D\eta)(x_1)\xi_1 = 0,$$

$$(D_3L)(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)\eta(x_2)+(D_5L)(t, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)(D\eta)(x_2)\xi_2 = 0.$$

L'intégrale première sera dans ce cas

$$F(t, x, \xi, c) \overset{\text{def}}{=} (D_4L)\big(t, x, c(t-1), \xi, \dot{c}(t-1)\big)+(D_5L)\big(t+1, c(t+1), x, \dot{c}(t+1), \xi\big)\eta(x).$$

Le cas du groupe de transformations correspond à

$$\eta(x) = (D_2\varphi)(x;\ 0)\alpha'(0).$$

Exemple. $L(t, x, x_2, \xi_1, \xi_2) = a_1f^2(x_1)\xi_1^2+2\beta f(x_1)f(x_2)\xi_1\xi_2+a_2f^2(x_2)\xi_2^2+$ $+2\gamma_1f(x_1)\xi_1+2\gamma_2f(x_2)\xi_2.$

Les conditions d'invariance sont satisfaites pour $\eta(x) = 1/f(x)$,

$$F(t, x, \xi, c) = \beta\big[f\big(c(t-1)\big)\dot{c}(t-1)+f\big(c(t+1)\big)\dot{c}(t+1)\big]+(a_1+a_2)f(x)\xi.$$

Si Φ est une primitive de f, on aura pour les extrémales

$$\beta\big[\Phi\big(x(t-1)\big)+\Phi\big(x(t+1)\big)\big]+(a_1+a_2)\Phi\big(x(t)\big) = \gamma_1 t+\gamma_2.$$

3. Un problème variationnel qui intervient dans les théories non locales du champ. Dans l'étude des théories non locales du champ [1] on considère certains problèmes variationnels à arguments déplacés que nous allons maintenant étudier dans le cas le plus simple; dans [1] on utilise aussi l'idée générale de E. Noether pour déduire des lois de conservation, ce que nous allons faire dans la section suivante.

Soient L_k: $G_1\times G_2\times G_3 \subset R^k\times(R^n)^k\times(R^n)^k \to \boldsymbol{R}$ de classe C^2, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Considérons la fonctionnelle

$$J(x) = \sum_{k=1}^{N} J_k(x),$$

$$J_k(x) = \int_{t_0}^{T}\ldots\int_{t_0}^{T} L_k\big(t_1, \ldots, t_k, x(t_1), \ldots, x(t_k), \dot{x}(t_1), \ldots, \dot{x}(t_k)\big)dt_1\ldots dt_k.$$

Les équations d'Euler–Lagrange sont

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T}\ldots\int_{t_0}^{T}\sum_{j}(D_{2k+j}L_k)\big(t_2, \ldots, t, \ldots, x(t_2), \ldots, x(t), \ldots, \dot{x}(t_2), \ldots, \dot{x}(t), \ldots, \dot{x}(t_k)\big)dt_2\ldots dt_k\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{T}\ldots\int_{t_0}^{T}\sum_{j}(D_{k+j}L_k)\big(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, x(t_2), \ldots, x(t), \ldots, x(t_k), \dot{x}(t_2), \ldots, \dot{x}(t), \ldots, \dot{x}(t_k)\big)dt_2\ldots dt_k.$$

(Pour $k = 1$ le terme correspondant ne contient pas d'intégrale.)

Pour ne pas trop compliquer les notations nous allons supposer dans ce qui suit que $N = 2$.

Admettons l'hypothèse de régularité

$$\det\Big[(D_3D_3L_1)(t, x, u)+\int_{t_0}^{T}\big[(D_5D_5L_2)\big(t, t_2, x, x(t_2), u, \dot{x}(t_2)\big)+ (D_6D_6L_2)\big(t_2, t, x(t_2), x, \dot{x}(t_2), u\big)\big]dt_2\Big] \neq 0.$$

Définissons à l'aide du théorème des fonctions implicites une fonction u: $V_t\times V_x\times V_y\times V_{x(\cdot)} \subset \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\times C^1([t_0, T], \boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}^n$ telle que

$$y-(D_3L_1)\big(t, x, u(t, x, y, z)\big)- \int_{t_0}^{T}\big[(D_5L_2)\big(t, t_2, x, z(t_2), u(t, x, y, z), \dot{z}(t_2)\big)+ (D_6L_2)\big(t_2, t, z(t_2), x, \dot{z}(t_2), u(t, x, y, z)\big)\big]dt_2 = 0.$$

Dans le domaine de définition de u soit

$$\mathscr{H}(t,x,y,z) \overset{\mathrm{def}}{=} yu(t,x,y,z) - L_1\big(t,x,u(t,x,y,z)\big) - \\ - \int_{t_0}^{T} \big[L_2\big(t,t_2,x,z(t_2),u(t,x,y,z),\dot z(t_2)\big) + \\ + L_2\big(t_2,t,z(t_2),x,\dot z(t_2),u(t,x,y,z)\big)\big]\,dt_2.$$

Alors

$$(D_2\mathscr{H})(t,x,y,z) = y(D_2u)(t,x,y,z) - (D_2L_1)\big(t,x,u(t,x,y,z)\big) - \\ - (D_3L_1)\big(t,x,u(t,x,y,z)\big)(D_2u)(t,x,y,z) - \\ - \int_{t_0}^{T} \big[(D_3L_2)\big(t,t_2,x,z(t_2),u(t,x,y,z),\dot z(t_2)\big) + \\ + (D_5L_2)\big(t,t_2,x,z,(t_2),u(t,x,y,z),\dot z(t_2)\big)(D_2u)(t,x,y,z) + \\ + (D_4L_2)\big(t_2,t,z(t_2),x,\dot z(t_2),u(t,x,y,z)\big) + \\ + (D_6L_2)\big(t_2,t,z(t_2),x,\dot z(t_2),u(t,x,y,z)\big)(D_2u)(t,x,y,z)\big]\,dt_2 \\ = -(D_2L_1)\big(t,x,u(t,x,y,z)\big) - \\ - \int_{t_0}^{T} \big[(D_3L_2)\big(t,t_2,x,z(t_2),u(t,x,y,z),\dot z(t_2)\big) + \\ + (D_4L_2)\big(t_2,t,z(t_2),x,\dot z(t_2),u(t,x,y,z)\big)\big]\,dt_2,$$

$$(D_3\mathscr{H})(t,x,y,z) = u(t,x,y,z) + y(D_3u)(t,x,y,z) - \\ - (D_3L_1)\big(t,x,u(t,x,y,z)\big)(D_3u)(t,x,y,z) - \\ - \int_{t_0}^{T} \big[(D_5L_2)\big(t,t_2,x,z(t_2),u(t,y,z),\dot z(t_2)\big) + \\ + (D_6L_2)\big(t_2,t,z(t_2),x,\dot z(t_2),u(t,x,y,z)\big)\big](D_3u)(t,x,y,z)\,dt_2 \\ = u(t,x,y,z).$$

Considérons le système

$$(*) \qquad \begin{aligned} \dot x(t) &= (D_3\mathscr{H})\big(t,x(t),y(t),x(\cdot)\big), \\ \dot y(t) &= -(D_2\mathscr{H})\big(t,x(t),y(t),x(\cdot)\big). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que si x est une solution des équations d'Euler–Lagrange, alors le couple $\big(x(\cdot),y(\cdot)\big)$ avec

$$y(t) = (D_3L_1)\big(t,x(t),\dot x(t)\big) + \int_{t_0}^{T} \big[(D_5L_2)\big(t,t_2,x(t),x(t_2),\dot x(t),\dot x(t_2)\big) + \\ + (D_6L_2)\big(t_2,t,x(t_2),x(t),\dot x(t_2),\dot x(t)\big)\big]\,dt_2$$

est une solution du système $(*)$ et réciproquement, si $(x(\cdot), y(\cdot))$ est une solution de $(*)$, alors $x(\cdot)$ est une solution des équations d'Euler–Lagrange.

En effet, la définition de $u(t, x, y, z)$ donne

$$y(t)-(D_3L_1)\big(t, x(t), u\big(t, x(t), y(t), x(\cdot)\big)\big)-$$
$$-\int_{t_0}^{T}\Big[(D_5L_2)\big(t, t_2, x(t), x(t_2), u\big(t, x(t), y(t), x(\cdot)\big), \dot{x}(t_2)\big)+$$
$$+(D_6L_2)\Big(t_2, t, x(t_2), x(t), \dot{x}(t_2), u\big(t, x(t), y(t), x(\cdot)\big)\Big)\Big]dt_2 = 0.$$

L'unicité dans le théorème des fonctions implicites donne

$$u\big(t, x(t), y(t), x(\cdot)\big) = \dot{x}(t)$$

donc

$$\dot{x}(t) = (D_3\mathscr{H})\big(t, x(t), y(t), x(\cdot)\big).$$

La seconde équation du système $(**)$ se réduit directement à l'équation d'Euler–Lagrange.

Remarquons que le système $(*)$ est un système usuel d'équations intégro-différentielles.

4. Théorème de Noether. Considérons un groupe transformations sur $R\times R^n$ et admettons la propriété d'invariance suivante:

$$L_k(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, x_2, \ldots, x, \ldots, x_k, \xi_2, \ldots, \xi, \ldots, \ldots, \xi_k)$$
$$= L_k\Big(t_2, \ldots, \tau(t, x;\ a), \ldots, t_k, x_2, \ldots, \varphi(t, x;\ a), \ldots, x_k, \xi_2, \ldots$$
$$\ldots, \frac{(D_1\varphi)(t, x;\ a)+(D_2\varphi)(t, x;\ a)\,\xi}{(D_1\tau)(t, x;\ a)+(D_2\tau)(t, x;\ a)\,\xi}, \ldots, \xi_k\Big)[(D_1\tau)(t, x;\ a)+$$
$$+(D_2\tau)(t, x;\ a)\,\xi]$$

pour tout k et tout j (dans la relation d'invariance les arguments transformés occupent la position j).

Considérons une famille de transformations à un paramètre, avec $a(0) = 0$, $\tau(t, x;\ 0) = t$, $\varphi(t, x;\ 0) = x$ et soit

$$l_{kj}(\varepsilon) = L_k\Bigg(t_2, \ldots, \tau\big(t, x;\ a(\varepsilon)\big), \ldots, \varphi\big(t, x;\ a(\varepsilon)\big), \ldots$$
$$\ldots, \frac{(D_1\varphi)\big(t, x;\ a(\varepsilon)\big)+(D_2\varphi)\big(t, x;\ a(\varepsilon)\big)\xi}{(D_1\tau)\big(t, x;\ a(\varepsilon)\big)+(D_2\tau)\big(t, x;\ a(\varepsilon)\big)\xi}, \ldots, \xi_k\Bigg)\times$$
$$\times\Big[(D_1\tau)\big(t, x;\ a(\varepsilon)\big)+(D_2\tau)\big(t, x;\ a(\varepsilon)\big)\,\xi\Big].$$

L'hypothèse d'invariance entraîne $l'_{kj}(0) = 0$, ce qui donne

$$(D_j L_k)(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, x_2, \ldots, x, \ldots, x_k, \xi_2, \ldots, \xi, \ldots, \xi_k)(D_3\tau)\times$$
$$\times(t, x;\ 0)\alpha'(0)+$$
$$+(D_{k+j}L_k)(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, x_2, \ldots, x, \ldots, x_k, \xi_2, \ldots, \xi, \ldots, \xi_k)(D_3\varphi)\times$$
$$\times(t, x;\ 0)\alpha'(0)+$$
$$+(D_{2k+j}L_k)(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, x_2, \ldots, x, \ldots, x_k, \xi_2, \ldots, \xi, \ldots, \xi_k)\times$$
$$\times\big[(D_1D_3\varphi)(t, x;\ 0)\alpha'(0)+$$
$$+(D_2D_3\varphi)(t, x;\ 0)\alpha'(0)\xi-\big((D_1D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0)+(D_2D_3\tau)(t, x;\ 0)\times$$
$$\times\ \alpha'(0)\xi\big)\xi\big]+$$
$$+L_k(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, x_2, \ldots, x, \ldots, x_k, \xi_2, \ldots, \xi, \ldots, \xi_k)\times$$
$$\times\ [(D_1D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0)+$$
$$+(D_2D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0)\xi] = 0.$$

Dans ces relations prenons $x_i = x(t_i)$, $\xi_i = \dot{x}(t_i)$, intégrons par rapport à $(t_2, \ldots, t_k)$ sur $[t_0, T]^{k-1}$ et effectuons la sommation par rapport à j et k. Nous obtenons

$$\sum_k \Big\{\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j (D_jL_k)\big(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, x(t_2), \ldots, x, \ldots, x(t_k), \dot{x}(t_2), \ldots$$
$$\ldots, \xi, \ldots, \dot{x}(t_k)\big)dt_2\ldots dt_k(D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0)+$$
$$+\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j (D_{k+j}L_k)(\quad)dt_2\ldots dt_k(D_3\varphi)(t, x;\ 0)\alpha'(0)+$$
$$+\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j (D_{2k+j}L_k)(\quad)dt_2\ldots dt_k\big[(D_1D_3\varphi)(t;\ x, 0)\alpha'(0)+$$
$$+(D_2D_3\varphi)(t, x;\ 0)\alpha'(0)\xi-\big((D_1D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0)+$$
$$+(D_2D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0)\xi\big)\xi\big]+$$
$$+\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j L_k(\quad)dt_2\ldots dt_k[(D_1D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0)+$$
$$+(D_2D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0)\xi]\Big\} = 0.$$

Dans cette dernière égalité nous allons remplacer x par $x(t)$ et ξ par $\dot{x}(t)$. Remarquons que

$$(D_1 D_3 \varphi)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0) + (D_2 D_3 \varphi)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\Big[(D_3\varphi)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\Big],$$

$$(D_1 D_3 \tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0) + (D_2 D_3 \tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\Big[(D_3\tau)t\big(, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\Big],$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_j L_k(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, x(t_2), \ldots, x(t), \ldots, x(t_k), \dot{x}(t_2), \ldots \\ \ldots, \dot{x}(t), \ldots, \dot{x}(t_k)\big)(D_3\tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\Big] \\ = \sum_j L_k(\quad)\frac{d}{dt}\big[(D_3\tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\big] + \Big\{\sum_j [(D_j L_k)(\quad) + \\ + (D_{k+j}L_k)(\quad)\dot{x}(t) + (D_{2k+j}L_k)(\quad)\ddot{x}(t)]\Big\}(D_3\tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0).$$

On déduit donc de la condition d'invariance

$$\sum_k \Big\{\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\Big[\frac{d}{dt}\Big(\sum_j L_k(\quad)(D_3\tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\Big)\Big]dt_2\ldots dt_k - \\ - \int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\Big[\sum_j\big((D_{k+j}L_k)(\quad)\dot{x}(t) + (D_{2k+j}L_k)(\quad)\ddot{x}(t)\big)\Big]dt_2\ldots dt_k \times \\ \times (D_3\tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0) + \\ + \int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j (D_{k+j}L_k)(\quad)dt_2\ldots dt_k(D_3\varphi)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0) + \\ + \int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j (D_{2k+j}L_k)(\quad)dt_2\ldots dt_k\Big[\frac{d}{dt}(D_3\varphi)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0) - \\ - \Big(\frac{d}{dt}(D_3\tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\Big)\dot{x}(t)\Big]\Big\} = 0.$$

En utilisant les équations d'Euler–Lagrange on déduit que

$$\sum_k \Big\{\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt}\Big[\sum_j L_k(\quad)(D_3\tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)\Big]di_2\ldots dt_k - \\ - \int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j\Big(\Big(\frac{d}{dt}(D_{2k+j}L_k)(\quad)\Big)\dot{x}(t) + (D_{2k+j}L_k)(\quad)\ddot{x}(t)\Big) \times \\ \times (D_3\tau)\big(t, x(t);\ 0\big)\alpha'(0)dt_2\ldots dt_k -$$

$$-\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j (D_{2k+j}L_k)(\quad)dt_2\ldots dt_k\dot{x}(t)\frac{d}{dt}\big((D_3\tau)(t,x(t);\;0)a'(0)\big)+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j \frac{d}{dt}\big((D_{2k+j}L_k)(\quad)\big)dt_2\ldots dt_k(D_3\varphi)(t,x(t);\;0)a'(0)+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j (D_{2k+j}L_k)(\quad)dt_2\ldots dt_k\frac{d}{dt}\big((D_3\varphi)(t,x(t);\;0)a'(0)\big)\Big\}=0.$$

Cette dernière relation donne:

$$\frac{d}{dt}\Big\{\sum_k\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j L_k(\quad)dt_2\ldots dt_k(D_3\tau)(t,x(t);\;0)a'(0)+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j (D_{2k+j}L_k)(\quad)dt_2\ldots dt_k\big[(D_3\varphi)(t,x(t);\;0)a'(0)-$$

$$-\dot{x}(t)(D_3\tau)(t,x(t);\;0)a'(0)\big]\Big\}=0.$$

Nous sommes ainsi amenés à l'intégrale première

$$F(t,x,\xi,c)\overset{\text{def}}{=}\sum_k\int_{t_0}^{T}\cdots\int_{t_0}^{T}\sum_j\big[L_k(t_2,\ldots,t,\ldots,t_k,c(t_2),\ldots,x,\ldots$$

$$\ldots,c(t_k),\dot{c}(t_2),\ldots,\xi,\ldots,\dot{c}(t_k))-$$

$$-(D_{2k+j}L_k)(\quad)\xi(D_3\tau)(t,x;\;0)a'(0)+$$

$$+(D_{2k+j}L_k)(\quad)(D_3\varphi)(t,x;\;0)a'(0)\big]dt_2\ldots dt_k.$$

Lorsque $x(\cdot)$ est une solution des équations d'Euler–Lagrange, l'application $t\mapsto F(t,x(t),\dot{x}(t),x(\cdot))$ est constante.

Dans ce cas aussi l'extension des résultats au cas de „l'invariance infinitésimale" est possible.

Si l'on suppose l'existence des fonctions σ et η telles que

$$(D_jL_k)(\quad)\sigma(t,x)+(D_{k+j}L_k)(\quad)\eta(t,x)+$$

$$+L_k(\quad)\big((D_1\sigma)(t,x)+(D_2\sigma)(t,x)\xi\big)+$$

$$+(D_{2k+j}L_k)(\quad)\big[(D_1\eta)(t,x)+(D_2\eta)(t,x)\xi-\big((D_1\sigma)(t,x)+$$

$$+(D_2\sigma)(t,x)\xi\big)\xi\big]=0,$$

on obtient l'intégrale première

$$F(t, x, \xi, c) = \sum_k \int_{t_0}^{T} \cdots \int_{t_0}^{T} \Big\{ \sum_j \big[L_k(t_2, \ldots, t, \ldots, t_k, c(t_2), \ldots, x, c(t_k), \dot{c}(t_2), \ldots, \xi, \ldots, \dot{c}(t_k)) - -\big((D_{2k+j}L_k)(\quad)\xi\big)\sigma(t, x) + (D_{2k+j}L_k)(\quad)\eta(t, x)\big]\Big\} dt_2 \ldots dt_k.$$

Le cas précédent correspond à

$$\sigma(t, x) = (D_3\tau)(t, x;\ 0)\alpha'(0), \qquad \eta(t, x) = (D_3\varphi)(t, x;\ 0)\alpha'(0).$$

Références

[1] J. Rzewuski, *Differential conservation laws in non-local field theories*, Il Nuovo Cimento, vol. X, no. 6, 1 (1953), p. 784–802.

[2] B. Vujanovic, *A group-variational procedure for finding first integrals of dynamical systems*, Int. J. Nonlinear Mechanics, vol. 5, no. 2 (1970), p. 269–278.

UNIVERSITEÉ DE BUCAREST
MATHÉMATIQUES
BUCUREȘTI, ROUMANIE

Reçu par la Rédaction le 17. 4. 1973