ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Sur la notion du biscalaire

par Z. MOSZNER et J. TABOR (Kraków)

Introduction. La notion du biscalaire a été définie par S. Gołąb dans la note [3], p. 114, sous la forme suivante:

DÉFINITION 1. Un *biscalaire* est une grandeur de la forme $\Omega = a\omega + b$, où ω est le quotient de la densité de Weyl par la densité simple et a et b sont des scalaires.

Le même auteur donne, dans le livre [4], p. 91, la définition suivante:

DÉFINITION 2. Un *W-scalaire* (¹) est un objet dont la règle de transformation est de la forme:

$$\tilde{g}' = (\operatorname{sgn} \Delta) \cdot \tilde{g} ,$$

où Δ est le jacobien de la transformation qui conduit d'un système de coordonnées, dans lequel cet objet a la coordonnée $\tilde{g}$, au système des coordonnées où cet objet a la coordonnée $\tilde{g}'$.

Enfin, plus généralement (voir par exemple [5], p. 20) on a:

DÉFINITION 3. Un *biscalaire* est un objet géométrique qui possède une coordonnée parcourant seulement deux valeurs différentes.

Dans la 3ᵉ partie de cette note nous résolvons la question de savoir si ces définitions sont équivalentes. Nous verrons que la réponse dépend de l'ensemble des systèmes admissibles de coordonnées.

Comme un biscalaire au sens de la définition 3 détermine un sous-groupe d'indice 2 du groupe des systèmes admissibles de coordonnées (voir la 3ᵉ partie de cette note), nous donnons dans la première partie quelques théorèmes au sujet de l'existence d'un seul sous-groupe d'indice 2 d'un groupe abstrait général et, dans la 2ᵉ partie, quelques applications de ces théorèmes.

§ 1. Considérations algébriques. On sait qu'on peut assigner une orientation à l'espace dans la géométrie fondée sur un groupe G de transformations, en déterminant dans le groupe G un sous-groupe d'indice 2. C'est pourquoi nous dirons d'un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G

(¹) Ce terme a été introduit par J. A. Schouten ([4], p. 91).

abstrait arbitraire que ce sous-groupe oriente le groupe G; dans ce cas, le groupe G sera appelé groupe orienté par ce sous-groupe.

Remarquons d'abord que

(I) *le sous-groupe $\tilde{G}$ du groupe G oriente G si et seulement si $\tilde{G} \neq G$ et*

$$\bigwedge_{a \in (G\setminus\tilde{G})} \bigwedge_{b \in (G\setminus\tilde{G})} (a \cdot b \in \tilde{G}) . \tag{1}$$

En effet, si le groupe $\tilde{G}$ oriente G, alors évidemment $\tilde{G} \neq G$. Si $a \in (G\setminus\tilde{G})$, on a $a^{-1} \in (G\setminus\tilde{G})$, puisque $\tilde{G}$ est un groupe. L'indice du sous-groupe $\tilde{G}$ est égal à 2, donc les deux éléments de G qui n'appartiennent pas à $\tilde{G}$, appartiennent à la même classe d'équivalence du groupe G par rapport à $\tilde{G}$. Il en résulte que si $a \in (\tilde{G}\setminus G)$ et $b \in (\tilde{G}\setminus G)$, alors $a^{-1} \in (\tilde{G}\setminus G)$ et $b \in (G\setminus\tilde{G})$, d'où

$$a \cdot b = (a^{-1})^{-1} \cdot b \in \tilde{G} ,$$

donc (1) a lieu.

Inversement, si (1) a lieu, on a

$$\bigwedge_{a \in (G\setminus\tilde{G})} \bigwedge_{b \in (G\setminus\tilde{G})} (a^{-1} \cdot b \in \tilde{G})$$

donc, puisque de plus $G \neq \tilde{G}$, l'indice de $\tilde{G}$ est égal à 2.

Désignons l'ensemble

$$\underset{x}{E} \bigvee_{a \in G} (a^2 = x)$$

par $C(G)$ et appelons-le l'ensemble des carrés du groupe G.

Il en résulte d'après (I) que

(II) *si $\tilde{G}$ oriente G, alors $C(G) \subset \tilde{G}$.*

Nous démontrerons maintenant que

(III) *si G_1 et G_2 orientent G et $G_1 \neq G_2$, alors $G_1 \cap G_2$ oriente G_1 et G_2.*

D'après (I) il suffit de démontrer que $G_1 \cap G_2 \neq G_1$, $G_1 \cap G_2 \neq G_2$ et

$$\bigwedge_{a \in (G_1\setminus G_1 \cap G_2)} \bigwedge_{b \in (G_1\setminus G_1 \cap G_2)} (a \cdot b \in G_1 \cap G_2) \tag{2}$$

ainsi que

$$\bigwedge_{a \in (G_2\setminus G_1 \cap G_2)} \bigwedge_{b \in (G_2\setminus G_1 \cap G_2)} (a \cdot b \in G_1 \cap G_2) . \tag{3}$$

Les deux premières inégalités ont lieu puisque G_1 et G_2 orientent G, donc ni $G_1 \subset G_2$ ni $G_2 \subset G_1$.

D'après (I) et la l'hypothèse,

$$\bigwedge_{a \in (G\setminus G_2)} \bigwedge_{b \in (G\setminus G_2)} (a \cdot b \in G_2) . \tag{4}$$

Si $a \in G_1$, $b \in G_1$, $a \notin G_1 \cap G_2$ et $b \notin G_1 \cap G_2$, alors $a \notin G_2$ et $b \notin G_2$; donc — d'après (4) — $a \cdot b \in G_2$ et puisque, par hypothèse, $a \cdot b \in G_1$, nous avons $a \cdot b \in G_1 \cap G_2$, donc (2) a lieu. On peut démontrer (3) d'une manière analogue.

Démontrons maintenant que

(IV) *si le groupe engendré par l'ensemble des carrés du groupe G oriente G, alors cette orientation du groupe G est unique.*

Désignons par G_1 le groupe engendré par $C(G)$ et admettons pour l'instant que, outre le groupe G_1, il existe un groupe $G_2 \neq G_1$ qui oriente G. Il en résulte, d'après (II), que $C(G) \subset G_2$, donc $G_1 \subset G_2$, d'où, d'après (III), $G_1 = G_1 \cap G_2$ oriente G_1, ce qui est impossible.

Remarquons que l'ensemble des carrés d'un groupe G peut ne pas être un sous-groupe du groupe G. L'ensemble $C(G)$ doit être fermé par rapport à l'opération de prendre de l'élément inverse, mais il peut ne pas l'être par rapport à l'opération du groupe G (évidemment seulement pour un groupe non abelien — il est intéressant de voir que, dans le cas considéré, l'ordre du groupe G doit être au moins égal à 12), comme le montre l'exemple du groupe alterné A d'ordre 12 (puisque dans l'ensemble $C(A)$ il y a 9 éléments).

Remarquons encore que l'ensemble des carrés d'un groupe G peut être un sous-groupe, mais que le groupe G peut être non orienté (par exemple le groupe multiplicatif des nombres positifs — non orienté d'après (II)) ou qu'il peut être orienté, mais pas par $C(G)$ (par exemple le groupe des quaternions $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, pour lequel $C(Q) = \{-1, 1\}$, et qui est orienté par ses trois sous-groupes).

Soient G un groupe, G_1 et G_2 ses sous-groupes; nous disons que

(V) *si $C(G) \subset G_1 \subset G_2$, G_1 oriente G_2 et G_2 oriente G, alors l'orientation de G n'est pas unique.*

Pour la démonstration, nous montrons d'abord que G_1 est un sous-groupe invariant du groupe G. Soit $a \cdot b^{-1} \in G_1$. D'après (II) on a $a^{-1} \cdot b = (a^{-1})^2 \cdot a \cdot b^{-1} \cdot b^2 \in G_1$. D'une façon analogue, si $a^{-1} \cdot b \in G_1$, on a $a \cdot b^{-1} \in G_1$. Il en résulte que l'ensemble des classes d'équivalence à gauche du groupe G par rapport à G_1 est égal à l'ensemble des classes d'équivalence à droite; le sous-groupe G_1 est donc invariant.

Par hypothèse G_1 oriente G_2 et G_2 oriente G, le groupe quotient G/G_1 est donc d'ordre 4. Puisque $C(G) \subset G_1$, le carré de chaque élément de G/G_1 est l'élément neutre du groupe G/G_1. Il en résulte qu'il existe dans le groupe G/G_1 (dans notre cas c'est le groupe de Klein) 3 sous-groupes d'ordre 2, c'est-à-dire les 3 sous-groupes qui l'orientent. En prenant l'image inverse de ces sous-groupes par homomorphie naturelle du groupe G au groupe G/G_1, nous obtiendrons — d'après (I) — les trois sous-groupes différents du groupe G qui l'orientent.

§ 2. Applications.

(a) Chaque translation est le carré d'une translation, d'où — d'après (II) — le groupe des translations dans l'espace à n dimensions n'est pas orienté.

(b) On sait que le groupe multiplicatif de tous les quaternions différents de zéro est isomorphe à un sous-groupe du groupe multiplicatif des matrices carrées non singulières à 4 lignes par la fonction

$$a+bi+cj+dk \to \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Puisque, pour le groupe des quaternions Q, l'orientation n'est pas unique, il existe un sous-groupe (fini, à 8 éléments — désigné dans la suite par $\widetilde{Q}$) du groupe centro-affine dans l'espace à 4 dimensions qui est orienté, mais pas d'une façon unique.

(c) Chaque isométrie dans l'espace à n dimensions, dont le déterminant est égal à 1, est la superposition de translations et de rotations élémentaires, c'est-à-dire de rotations dans des planes (voir [2], p. 121). Il en résulte que chaque isométrie de ce genre est la superposition de carrés de translations et de carrés de rotations élémentaires. Puisque l'intersection du groupe unimodulaire spécial et du groupe I des isométries oriente le groupe I, donc — d'après (IV) — *l'orientation du groupe I est unique.*

(d) D'après ce qui précède, chaque matrice orthogonale dont le déterminant est égal à 1, est le produit des carrés de matrices orthogonales.

(e) Chaque matrice de similitude dans l'espace à n dimensions est le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice diagonale positivement définie, d'où — d'après (d) — chaque matrice de similitude dont le déterminant est positif, peut être représentée sous la forme d'un produit de carrés de matrices de similitude. Puisque le groupe des similitudes S est orienté par son sous-groupe des similitudes S^+ à déterminants positifs, donc — d'après (IV) — *le groupe S est orienté d'une manière unique.*

(f) Chaque matrice dont le déterminant est différent de zéro est le produit d'une matrice symétrique et positivement définie et d'une matrice orthogonale (voir [1], p. 290). Puisque chaque matrice symétrique et positivement définie peut être représentée sous la forme PBP^{-1}, où P est une matrice orthogonale et B une matrice diagonale positivement définie, donc chaque matrice dont le déterminant est positif, est — d'après (d) — le produit des carrés de matrices non singulières.

Puisque le groupe des transformations affines A^+, dont les déterminants sont positifs, oriente le groupe A de toutes les transformations affines, il en résulte — d'après (IV) — que cette *orientation du groupe A est unique.*

(g) Considérons maintenant le groupe des dilatations D, c'est-à-dire des transformations affines dont les matrices sont diagonales dans l'espace à 3 dimensions. Le sous-groupe D^+ des transformations du groupe D dont les déterminants sont positifs, oriente D. Le sous-groupe D_1 des transformations du groupe D^+, dont les matrices sont positivement définies ou sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, oriente — d'après (I) — le groupe D^+. L'ensemble des carrés du groupe D est le groupe des transformations du groupe D_1 dont les matrices sont positivement définies d'où $C(D) \subset D_1$. Il en résulte — d'après (V) — *que l'orientation du groupe D n'est pas unique.*

On peut démontrer ([7]) d'après raissonnements dans (f) que les groupes L_n^s et L_n^∞ de Haantjes-Laman ([5], p. 18-19) sont aussi orientés d'une manière unique.

§ 3. Considérations géométriques. On voit facilement qu'un biscalaire au sens de la définition 1 est un objet dont la règle de transformation est de la forme:

$$\Omega' = (\operatorname{sgn}\Delta)\Omega + b(1 - \operatorname{sgn}\Delta)\,.$$

Il en résulte que, si l'ensemble des systèmes admissibles de coordonnées est déterminé par un ensemble E de transformations dont les jacobiens sont positifs ou négatifs (au point où nous considérons l'objet), dans ce cas la définition 1 est plus générale que la définition 2. Ces deux définitions sont équivalentes seulement dans le cas où l'ensemble E est composé de transformations dont les jacobiens ont le même signe.

Il est évident qu'un biscalaire au sens de la définition 1 est aussi un biscalaire d'après la définition 3. Un biscalaire au sens de la définition 3 qui prend seulement une valeur, c'est-à-dire un scalaire, est aussi un biscalaire d'après la définition 1; c'est pourquoi nous ne nous occuperons pas de scalaires dans la suite.

Dans les considérations suivantes sur l'équivalence des définitions 1 et 3, nous admettrons que l'ensemble E, défini plus haut, forme un groupe par rapport à la superposition des transformations.

On sait ([6]), qu'un objet géométrique qui prend seulement deux valeurs différentes, prend l'une de ces valeurs sur un sous-groupe $\widetilde{E}$ d'indice 2 du groupe E, et l'autre sur la classe d'équivalence du groupe E par rapport à $\widetilde{E}$ qui est différente de E et, inversement, un objet ayant cette propriété est un objet géométrique. Il en résulte qu'un biscalaire au sens de la définition 3, défini sur un groupe E qui n'est pas un scalaire, „oriente" ce groupe, c'est-à-dire il détermine un sous-groupe qui oriente le groupe E. Donc si le groupe E n'est pas orienté, un biscalaire au sens de la définition 3 sur E est un scalaire.

La règle de transformation d'un biscalaire Ω au sens de la définition 3 est de la forme

$$\Omega' = \sigma(T)\Omega + \frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}\big(1-\sigma(T)\big),$$

où Ω_1 et Ω_2 sont les valeurs du biscalaire Ω respectivement sur E et $E\setminus\widetilde{E}$ et

$$\sigma(T) = \begin{cases} +1, & \text{si} \quad T \in \widetilde{E}, \\ -1, & \text{si} \quad T \in (E\setminus\widetilde{E}). \end{cases}$$

Désignons par E^+ le sous-groupe du groupe E dont les transformations ont des jacobiens positifs (au point où nous considérons l'objet). Si $E^+ \neq E$, E^+ oriente E.

Si un sous-groupe $\widetilde{E}$, qui est déterminé par un biscalaire Ω au sens de la définition 3, est égal à E^+ (donc si E^+ oriente le groupe E), alors ce biscalaire est aussi un biscalaire au sens de la définition 1. En effet on a

$$\Omega' = (\operatorname{sgn}\Delta)\Omega + \frac{\Omega_2+\Omega_1}{2}(1-\operatorname{sgn}\Delta)$$

où Ω_1 et Ω_2 sont les valeurs du biscalaire Ω respectivement sur E^+ et $E\setminus E^+$.

Si le sous-groupe $\widetilde{E}$ qui oriente E n'est pas égal à E^+, il existe un biscalaire au sens de la définition 3 sur E qui n'est pas un biscalaire au sens de la définition 1. En effet posons

$$\Omega(T) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad T \in \widetilde{E}, \\ 1 & \text{pour} \quad T \in (E\setminus\widetilde{E}) \end{cases}$$

et admettons que la règle de la transformation de l'objet Ω soit

$$\Omega' = [\operatorname{sgn}\Delta(T)]\Omega + b\cdot[1-\operatorname{sgn}\Delta(T)],$$

d'où

$$\Omega(T) = [\operatorname{sgn}\Delta(T)]\cdot 0 + b\cdot[1-\operatorname{sgn}\Delta(T)],$$

c'est-à-dire

$$\Omega(T) = b\cdot[1-\operatorname{sgn}\Delta(T)]. \tag{5}$$

Si $E^+ \neq E$, alors $\widetilde{E}$ et E^+ orientent E, et puisque $\widetilde{E} \neq E^+$ il s'ensuit — d'après (III) — que $E^+ \subset \widetilde{E}$ n'a pas lieu. Si $E^+ = E$, alors $E^+ \subset \widetilde{E}$ n'a pas lieu puisque $\widetilde{E} \neq E^+$. Il en résulte qu'il existe une transformation $\widetilde{T}$ de E telle que $\widetilde{T} \in E^+$ et $\widetilde{T} \notin \widetilde{E}$. En posant $T = \widetilde{T}$ dans (5) nous avons

$$1 = \Omega(\widetilde{T}) = b\cdot[1-\operatorname{sgn}\Delta(\widetilde{T})] = 0.$$

Nos considérations précédentes permettent de conclure: — *les définitions* 1 *et* 3 *d'un biscalaire sont équivalentes si et seulement si le groupe E des transformations qui détermine l'ensemble des systèmes admissibles de coordonnées n'est pas orienté, ou s'il est orienté seulement par le sous-groupe* E^+.

Il en résulte, d'après les considérations du § 2 de cette note, que ces deux définitions sont équivalentes dans le cas où E est p. ex. le groupe des translations ou le groupe des isométries, ou le groupe des similitudes ou le groupe des transformations affines *ou* enfin les groupes L_n^s on L_n^∞; elles ne sont pas équivalentes si E est égal p. ex. au groupe des dilatations ou au groupe $\widetilde{Q}$ (voir (b), § 2).

On sait ([6]) que, pour qu'un objet géométrique g définie sur un groupe E soit un comitant algébrique d'un objet géométrique f défini sur E, il faut et il suffit que le sous-groupe E_1 de E défini par f soit un sous-groupe du sous-groupe E_2 de E défini par g. Deux objets géométriques f et g sont équivalents si et seulement si $E_1 = E_2$.

Il en résulte — d'après (III) — qu'un biscalaire B_1 au sens de la définition 3 sera un comitant algébrique d'un biscalaire B_2 au sens de la même définition, non équivalent à ce biscalaire, si et seulement si le biscalaire B_1 est un scalaire et si le biscalaire B_2 n'est pas un scalaire. Il existe dans l'espace deux biscalaires, qui ne sont ni des scalaires, ni des équivalents, si et seulement si le groupe E est orienté, mais pas uniquement orienté.

Remarquons enfin que le rétrécissement ainsi que l'extention du groupe E peuvent modifier la réponse à la question: les définitions 1 et 3 d'un biscalaire sur E sont-elles équivalentes? En effet, considérons trois groupes dans l'espace à 3 dimensions: le groupe G_1 des transformations affines de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix},$$

le groupe D des dilatations et le groupe affine A tout entier.

On a: $G_1 \subset D \subset A$ et, de plus, les définitions 1 et 3 sont équivalentes sur G_1 et sur A, mais ne le sont pas sur D.

References

[1] G. Birkhoff i S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, Warszawa 1960.

[2] K. Borsuk, *Geometria analityczna w n wymiarach*, Warszawa 1950.

[3] S. Gołąb, *Über die Klassifikation der geometrischen Objekte*, Math. Zeitschr. 44 (1938), p. 104-114.

[4] — *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1956.

[5] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Matematyczne, 43 (1964).

[6] S. Midura et Z. Moszner, *Quelques remarques au sujet de la notion d'objet et de l'objet géométrique*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), p. 323-338.

J. Tabor, *Jednoznaczna orientowalność grup* L_n^s, sous presse en Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie.

Reçu par la Rédaction le 23. 11. 1966