ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Sur le problème de Cauchy et les problèmes de Fourier pour les équations paraboliques dans un domaine non borné

par W. Bodanko (Częstochowa)

Introduction. Dans la présente note nous démontrons quelques théorèmes sur l'unicité et l'existence des solutions des problèmes de Fourier dans des domaines non bornés, et du problème de Cauchy, pour l'équation linéaire du type parabolique

$$(1)\qquad F(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\, u'_{x_i} + c(x,t)\, u - u'_t = f(x,t)$$

et pour le système du type parabolique

$$(2)\qquad \frac{\partial u_s}{\partial t} = F_s\left(x, t, u_i, \frac{\partial u_s}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_j \partial x_k}\right) \quad (s, i = 1, 2, \ldots, m;\ j, k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Nous y étudions, de plus, certaines inégalités différentielles aux dérivées partielles du type parabolique et nous démontrons des théorèmes analogues à [1] et [2].

M. Krzyżański (voir [5]) a démontré que si les coefficients de l'équation (1) satisfont aux conditions suivantes

$$(3)\qquad |a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \qquad |b_i(x,t)| \leqslant M(r^2+1)^{1/2}, \qquad c(x,t) \leqslant M(r^2+1)$$

où

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

alors le premier problème de Fourier (FI) admet dans la classe E_2 (voir § 1) une solution au plus.

Ce dernier théorème s'étend au système (2) (voir [1]).

Dans [3] on a démontré l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans la classe des fonctions bornées si les coefficients de l'équation (1) remplissent les conditions suivantes:

$$(4)\qquad |a_{ij}(x,t)| \leqslant M(r^2+1)\,, \qquad |b_i(x,t)| \leqslant M(r^2+1)^{1/2}, \qquad c(x,t) \leqslant M\,.$$

Dans le présent travail nous allons démontrer un théorème sur l'unicité du problème (FI) dans le classe E_{2a} $(0 \leqslant a < \infty)$, si les coefficients de l'équation (1) satisfont aux inégalités

$$(5) \quad |a_{ij}(x, t)| \leqslant M(r^2+1)^{1-a}, \quad |b_i(x, t)| \leqslant M(r^2+1)^{1/2}, \quad c(x, t) \leqslant M(r^2+1)^a \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce théorème s'étend aux solutions des second et troisième problèmes de Fourier (FII-FIII) relatifs à l'équation (1) et (2).

J'exprimemes sincères remerciements à prof. M. Krzyżański qui a bien voulu m'aider dans la rédaction de ce travail.

§ 1. Définitions et théorèmes auxiliaires. Soit (x, t) un point variable $(x_1, \ldots, x_n, t)$ de l'espace euclidien à $(n+1)$ dimensions E_{n+1}. Soient encore:

Ω — un domaine non borné dans l'espace E_n des variables $(x_1, \ldots, x_n)$,

$D = \Omega \times (0, T)$ le produit topologique de Ω et $(0, T)$,

$\sigma = \mathrm{F}(\Omega) \times (0, T]$, où $\mathrm{F}(\Omega)$ est la frontière de Ω,

$D^{T_1} = \{(x, t)\colon\ (x, t) \in D,\ t \leqslant T_1 \leqslant T\}$.

Nous supposons que les coefficients de l'équation (1) et la fonction $f(x, t)$ sont définies dans D et que la forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\lambda_i\lambda_j$$

est définie positive.

Les fonctions $F_s(x, t, y_i, z_j, z_{jk})$ $(s, i = 1, 2, \ldots, m;\ j, k = 1, 2, \ldots, n)$ sont définies pour $(x, t) \in D$ et y_i, z_j, z_{jk} arbitraires.

Définition 1. Nous dirons qu'une fonction $F(x, t)$ *est de classe* E_a $(a > 0)$ *dans un domaine* D, s'il existe un nombre positif A tel que

$$|F(x, t)| \leqslant \exp\{A(r^2+1)^{a/2}\} \quad \text{pour} \quad (x, t) \in D \text{ et } r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Remarque 1. La classe E_0 est la classe des fonctions satisfaisant aux inégalités

$$|u(x, t)| \leqslant M(r^2+1)^\delta \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \delta < 1.$$

Lemme 1. *Nous supposons que les coefficients de l'équation* (1) *satisfont aux conditions* (5) *dans* D *et que* $u(x, t)$ *est une fonction de classe* E_{2a} $(0 \leqslant a < \infty)$ *dans* D.

Alors il existe une fonction $H(x, t, K, \beta)$ *définie et positive dans* D *telle que*

$$(6) \quad \lim_{|x|\to\infty} \big(u(x, t)/H(x, t, K, \beta)\big) = 0 \quad \textit{uniformément pour} \quad t \in (0, T),$$

$$(7) \quad F(H)/H \leqslant -1 \quad \textit{pour} \quad (x, t) \in D^{T_1},$$

a constante T_1 *dépendant de* a, M *et* n.

Démonstration. Nous posons

$$H(x, t, K, \beta) = \exp\{K(r^2+1)^a e^{\beta t}\} \quad \text{pour} \quad 0 < a < \infty;$$

On peut choisir le nombre $K > 1$ de sorte que l'on ait (6). On a

$$F(H)/H = e^{\beta t}K\Big[2a(r^2+1)^{(a-1)}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + e^{\beta t}4Ka^2(r^2+1)^{2(a-1)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j +$$

$$+4a(a-1)(r^2+1)^{(a-2)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2a(r^2+1)^{(a-1)}\sum_{i=1}^{n} b_ix_i +$$

$$+ce^{-\beta t}/K - \beta(r^2+1)^a\Big].$$

Nous choisissons une constante M_1 dépendant de a, M et n de façon que

$$\text{(a)} \qquad \Big|2a(r^2+1)^{(a-1)}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\Big| \leqslant M_1,$$

$$\text{(b)} \qquad \Big|e^{\beta t}4Ka^2(r^2+1)^{2(a-1)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\Big| \leqslant M_1(r^2+1)^a Ke^{\beta t},$$

$$\text{(c)} \qquad \Big|4a(a-1)(r^2+1)^{(a-2)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\Big| \leqslant M_1,$$

$$\text{(d)} \qquad \Big|2a(r^2+1)^{(a-1)}\sum_{i=1}^{n} b_ix_i\Big| \leqslant M_1(r^2+1)^a.$$

Enfin nous obtenons l'inégalité

$$F(H)/H \leqslant e^{\beta t}K(r^2+1)^a(M_2Ke^{\beta t} - \beta) \leqslant -1$$

pour $\beta = M_2Ke+1$ et $(x, t) \in D^{T_1}$, $T_1 = 1/\beta$.

Dans le cas où $a = 0$ nous posons

$$H(x, t, K, \beta) = (r^2+1)e^{\beta t}.$$

Alors

$$F(H)/H = \Big[2\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c(r^2+1) - \beta(r^2+1)\Big]\Big/(r^2+1)$$

$$\leqslant [M_1(r^2+1) - \beta(r^2+1)]/(r^2+1) \leqslant -1$$

pour $\beta = M_1+1$ et $(x, t) \in D$.

Lemme 2. *Soit $H(x, t, K, \beta)$ la fonction introduite dans le Lemme* 1. *On a*

$$\frac{H(x, t, K, \beta(K))}{H(x, t, K+k, \beta(K+k))} \leqslant \exp\{-k(r^2+1)^a\} \quad \textit{pour} \quad k > 0 \ \textit{et} \ 0 < a < \infty.$$

Démonstration. On a

$$\frac{H(x, t, K, \beta(K))}{H(x, t, K+k, \beta(K+k))} = \exp\{K(r^2+1)^a e^{\beta(K)t} - (K+k)(r^2+1)^a e^{\beta(K+k)t}\}$$
$$\leqslant \exp\{-k(r^2+1)^a\}$$

puisque $\beta(K) \leqslant \beta(K+k)$ pour $k > 0$.

DÉFINITION 2. Nous dirons qu'un domaine D satisfait à la condition (G_m), lorsque

1. $D = \Omega \times (0, T)$ et la frontière $F(\Omega)$ est bornée.

2. La frontière $F(\Omega)$ est par hypothèse une surface dont l'équation s'écrit sous la forme
$$G(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$G(x)$ étant une fonction de classe C^2 et ne s'annulant pas dans le domaine Ω, dont les dérivées secondes sont bornées dans ce domaine, et de classe C^1 dans la fermeture $\overline{\Omega}$ du domaine Ω. Nous supposons que $G(x) = r$ pour $r > R_0$, R_0 étant un nombre positif.

3. À chaque point (x, t) de σ correspondent des demi-droites l_s $(s = 1, \ldots, m)$ pénétrant à l'intérieur de D, parallèles au plan $t = 0$, telles que
$$\cos(l_s, n) \geqslant \varrho_0 > 0 \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \sigma, \quad s = 1, \ldots, m.$$

Dans le cas où $m = 1$, à chaque point $(x, t) \in \sigma$ correspond une seule droite pénétrant à l'intérieur de D et nous la désignerons par l.

4. $\operatorname{grad}^2 G(x) = \sum_{i=1}^{n} (G'_{x_i})^2 \geqslant g_0^2 > 0$, g_0 étant un nombre constant.

Nous démontrons d'abord le lemme suivant:

LEMME 3. *Nous supposons que*

1. *le domaine D satisfait à la condition* (G_1).

2. *les coefficients de l'équation* (1) *satisfont aux conditions* (5) *pour* $(x, t) \in D$,

3. $u(x, t)$ *est une fonction de classe* E_{2a} $(0 \leqslant a < \infty)$ *dans le domaine* D,

4. *la fonction* $h(x, t)$ *est définie et bornée supérieurement pour* $(x, t) \in \sigma$.

Dans toutes ces hypothèses il existe une fonction $H(x, t, K, \beta, \nu)$, *définie et positive dans le domaine* D, *telle que*

(8) $\quad \lim_{|x|\to\infty} \big(u(x, t)/H(x, t, K, \beta, \nu)\big) = 0$ *uniformément pour* $t \in (0, T)$,

(9) $\quad F(H)/H \leqslant -1 \quad$ *pour* $\quad (x, t) \in D^{T_1} \quad (T_1 \leqslant T)$,

(10) $\quad L(H)/H \leqslant -1 \quad$ *pour* $\quad (x, t) \in \sigma$,

où

$$L(W)=\frac{dW}{dl}+h(x,t)W,$$

la constante T_1 dépendant de a, M et n.

Démonstration. Soit $0<a<\infty$. Nous posons

$$H(x,t,K,\beta,\nu)=\exp\{K[(G+1)^a-p]^2e^{\beta t}+\nu t\}.$$

On peut supposer que $G(x)>0$ dans Ω et K, $p>1$, $\beta,\nu>0$.

Nous choisissons le nombre K de sorte que l'on ait (8). Comme

$$G'_{x_i}=\cos(x_i,n)\Big[\sum_{j=1}^{n}(G'_{x_j})\Big]^{1/2}=\cos(x_i,n)|\operatorname{grad}G|,$$

on a

$$\begin{aligned}\underset{(x,t)\in\sigma}{L(H)/H}&=2Kae^{\beta t}(1-p)\sum_{i=1}^{n}G'_{x_i}\cos(l,x_i)+h(x,t)\\&=2Kae^{\beta t}(1-p)|\operatorname{grad}G|\cos(l,n)+h(x,t)\\&\leqslant 2ag_0\varrho_0(1-p)+h_0\end{aligned}$$

où $h_0=\max h(x,t)$ pour $(x,t)\in\sigma$.

On peut donc choisir le nombre p de façon que l'on ait

$$L(H)/H\leqslant -1\qquad\text{pour}\qquad (x,t)\in\sigma;$$

$$\begin{aligned}F(H)/H=Ke^{\beta t}\Big\{&e^{\beta t}4Ka^2[(G+1)^a-p]^2(G+1)^{2(a-1)}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}+\\&+2a^2(G+1)^{2(a-1)}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}+\\&+2a(a-1)[(G+1)^a-p](G+1)^{(a-2)}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}+\\&+2a[(G+1)^a-p](G+1)^{(a-1)}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}G''_{x_ix_j}+\\&+2a[(G+1)^a-p](G+1)^{(a-1)}\sum_{i=1}^{n}b_iG'_{x_i}+\\&+c/Ke^{\beta t}-\beta[(G+1)^a-p]^2\Big\}-\nu\,.\end{aligned}$$

En vertu des hypothèses faites sur la fonction $G(x)$, il existe des constantes positives M_1 et M_2 telles que

$$
\begin{aligned}
M_2(r^2+1)^a \leqslant [(G+1)^a-p]^2 &\leqslant M_1(r^2+1)^a ,\\
|(G+1)^{2(a-1)}| &\leqslant M_1(r^2+1)^{a-1} ,\\
|(G+1)^a-p| &\leqslant M_1(r^2+1)^{a/2} ,\\
|(G+1)^{(a-2)}| &\leqslant M_1(r^2+1)^{a/2-1} ,\\
|(G+1)^{(a-1)}| &\leqslant M_1(r^2+1)^{a/2-1/2}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

pour $r \geqslant R_1 = R_1(R_0, p) \geqslant R_0$.

Par conséquent nous obtenons

$$\text{(a)} \qquad \Big| a^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}[(G+1)^a-p]^2(G+1)^{2(a-1)} G'_{x_i} G'_{x_j} \Big| \leqslant M_3(r^2+1)^a ,$$

$$\text{(b)} \qquad \Big| a^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(G+1)^{2(a-1)} G'_{x_i} G'_{x_j} \Big| \leqslant M_3 ,$$

$$\text{(c)} \qquad \Big| a(a-1) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}[(G+1)^a-p](G+1)^{(a-2)} G'_{x_i} G'_{x_j} \Big| \leqslant M_3 .$$

$$\text{(d)} \qquad \Big| a \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}[(G+1)^a-p](G+1)^{(a-1)} G''_{x_i x_j} \Big| \leqslant M_3 ,$$

$$\text{(e)} \qquad \Big| a \sum_{i,j=1}^{n} b_i[(G+1)^a-p](G+1)^{(a-1)} G'_{x_i} \Big| \leqslant M_3(r^2+1)^a .$$

Enfin, pour $r \geqslant R_1$, on a

$$F(H)/H \leqslant Ke^{\beta t}(r^2+1)^a(Ke^{\beta t}M_4-\beta M_2)-\nu \leqslant -1$$

si

$$\beta = (M_4 Ke+1)/M_2, \qquad t \leqslant T_1 = 1/\beta \qquad \text{et} \qquad \nu \geqslant 0 .$$

Pour $r \leqslant R_1$ les fonctions a_{ij}, b_i, c, G, G'_{x_i}, $G''_{x_i x_j}$ sont bornées; on peut donc choisir le nombre ν de façon que l'on ait l'inégalité (9).

Pour $a = 0$ nous posons

$$H(x, t, K, \beta) = K\big(G(x)p-1\big)^2 e^{\beta t}+\beta t+1, \qquad K > 1 ,\ p > 0 ,\ \beta > 0 .$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\underset{(x,t)\in\sigma}{L(H)/H} &= \frac{-2Kpe^{\beta t}\sum_{i=1}^{n} G'_{x_i}\cos(l, x_i)}{Ke^{\beta t}+\beta t+1} + h(x, t)\\
&\leqslant \frac{-2pg_0\varrho_0 Ke^{\beta t}+(Ke^{\beta t}+\beta t+1)h_0}{Ke^{\beta t}+\beta t+1} = \frac{-2pg_0\varrho_0+k(t)h_0}{k(t)}
\end{aligned}
$$

où $h_0 = \sup h(x, t)$ pour $(x, t) \in \sigma$ et $k(t) = 1+\beta t/Ke^{\beta t}+1/Ke^{\beta t}$.

Comme la fonction $k(t)$ est bornée pour $K>1$, $t,\beta>0$, il existe un nombre p tel que

$$L(H)/H\leqslant -1 \quad \text{pour} \quad K>1,\ t,\beta>0 \text{ arbitraires.}$$

D'après les hypothèses sur la fonction $G(x)$ on a

$$\bar{M}_1(r^2+1)\leqslant \big(G(x)p-1\big)^2\leqslant M_1(r^2+1)\,,$$

$$(12)\qquad |G(x)p-1|\leqslant M_1(r^2+1)^{1/2}\,,$$

$$|G'_{x_i}|\leqslant M_1,\quad |G''_{x_ix_j}|\leqslant M_1(r^2+1)^{-1/2}\quad \text{pour}\quad r\geqslant R_2=R_2(R_0,p)\geqslant R_0\,,$$

et par conséquent

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}G'_{x_i}G'_{x_j}\Big|\leqslant M_2(r^2+1)\,,$$

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\big(G(x)p-1\big)G''_{x_ix_j}\Big|\leqslant M_2(r^2+1)\,,$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} b_i\big(G(x)p-1\big)G'_{x_i}\Big|\leqslant M_2(r^2+1)\,.$$

Posons

$$M_3=\max\big(pn^2M_2,\ MM_1/2p,\ \sup M(\beta t+1)/2Kpe^{\beta t}\big)$$

on a

$$F(H)/H\leqslant \frac{2Kpe^{\beta t}(r^2+1)(M_3-\beta\bar{M}_1/2p)-\beta}{H}$$
$$\leqslant \frac{2Kpe^{\beta t}(r^2+1)(M_3-\beta\bar{M}_1/2p)-\beta}{KM_1(r^2+1)e^{\beta t}+\beta t+1}$$

pour $\beta\bar{M}_1/2p>M_3$ et $r\geqslant R_2$. Donc

$$F(H)/H\leqslant -1 \quad \text{pour} \quad \beta=\beta_1,\ r\geqslant R_2 \text{ et } t\beta_1\leqslant 1$$

(le nombre $K=K(p)>1$ est choisi de façon que l'on ait (8)).

Si $r<R_2$ les fonctions a_{ij}, b_i, c, G, G'_{x_i}, $G''_{x_ix_j}$ sont bornées et il existe un $\beta=\beta_2$ tel que

$$F(H)/H\leqslant -1 \quad \text{pour} \quad r\leqslant R_2 \text{ et } \beta_2 t\leqslant 1\,.$$

Enfin, pour $\beta_3=\max(\beta_1,\beta_2)$ nous avons l'inégalité

$$F(H)/H\leqslant -1 \quad \text{pour} \quad (x,t)\in D^{T_1} \text{ et } T_1=1/\beta_3\,.$$

Remarque 2. La constante p dépend du domaine D et de la fonction $h(x,t)$.

LEMME 4. *Soit* $H(x, t, K, \beta(K), \nu(K))$ *la fonction définie dans Lemme* 3.

On a

$$\frac{H(x, t, K, \beta(K), \nu(K))}{H(x, t, K+k, \beta(K+k), \nu(K+k))} \leqslant \exp\{-k[(G+1)^a - p]^2\}$$

pour $k > 0$ *et* $0 < a < \infty$.

La démonstration du Lemme 4 est analogue à celle du Lemme 2.

§ 2. Théorèmes sur l'unicité de la solution des problèmes de Fourier.

DÉFINITION 3. Nous disons que la fonction $\varphi(x, t)$ est *régulière* dans $\bar{D}$ si elle admet des derivées $\varphi'_{x_i}, \varphi''_{x_i x_j}, \varphi'_t$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ continues dans D et si elle est continue dans $\bar{D}$.

THÉORÈME I. *Nous supposons que*

1. *la fonction* $u(x, t)$ *est une solution de l'équation* (1) *régulière et de classe* E_{2a} *dans* $\bar{D}$ $(0 \leqslant a < \infty)$,

2. $f(x, t) \leqslant 0$ *dans* D $(f(x, t) \geqslant 0$ *dans* $D)$,

3. $u(x, t) \geqslant 0$ *pour* $(x, t) \in \Gamma = \bar{\Omega} \cup \sigma$ $(u(x, t) \leqslant 0$ *sur* $\Gamma)$,

4. *les coefficients de l'équation* (1) *satisfont aux conditions* (5) *dans* D.

Alors $u(x, t) \geqslant 0$ *dans* D $(u(x, t) \leqslant 0$ *dans* $D)$.

En particulier, sous les hypothèses 1 *et* 4, *si* $f(x, t) = 0$ *dans* D *et* $u(x, t) = 0$ *sur* Γ, *alors* $u(x, t) = 0$ *dans* D.

La démonstration est pareille à celle du Théorème 1 de [5].

Désignons par D_R l'ensemble ouvert séparé de D par la surface $W_R = \{(x, t): \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2\}$, par Ω_R et σ_R les parties des ensembles Ω et σ situées à l'intérieur de W_R et sur W_R, enfin par C_R la partie de W_R située dans $\bar{D} \cap \{E_n \times (0, T]\}$.

Soit

$$\Sigma_R = \sigma_R \cup C_R, \qquad \Gamma_R = \bar{\Omega}_R \cup \Sigma_R \tag{13}$$

et $H(x, t, K, \beta)$ une fonction positive dans D et satisfaisant à la condition (6)-(7).

La fonction $v(x, t) = u(x, t)/H$ satisfait dans le domaine D^{T_1} à l'équation

$$\bar{F}(v) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i v'_{x_i} + \bar{c}v - v'_t = \bar{f}(x, t), \tag{14}$$

où l'on a $\bar{c} = F(H)/H \leqslant -1$ et $\bar{f} = f/H \leqslant 0$.

Soit $(\bar{x}, \bar{t})$ un point quelconque de D^{T_1} et $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Nous choisissons un nombre $R_0 > 0$ de façon que l'on ait:

$$|v(x, t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad r \geqslant R_0 \text{ et } (\bar{x}, \bar{t}) \in D_{R_0}^{T_1}.$$

D'après le principe de l'extremum on a $v(\bar{x}, \bar{t}) \geqslant -\varepsilon$ puisque $v(x, t) > -\varepsilon$ pour $(x, t) \in \Gamma_{R_0}^{T_1}$.

Le nombre ε étant arbitraire, on a $v(\bar{x}, \bar{t}) \geqslant 0$.

Nous avons ainsi démontré que $u(x, t) \geqslant 0$ dans D^{T_1}.

On divise ensuite le domaine D en domaines partiels par les plans $t = T_1 n$ $(n = 1, \ldots, r)$ et on établit de proche en proche l'inégalité $u(x, t) \geqslant 0$ dans ces domaines.

Théorème II. *Nous supposons que les hypothèses* 1, 2, 4 *du Théorème* I *sont satisfaites et que*

$$c(x, t) \leqslant 0, \quad u(x, t) \geqslant -M \text{ sur } \Gamma \quad (u(x, t) \leqslant M \text{ sur } \Gamma),$$

où M est un nombre non négatif on a aussi $u(x, t) \geqslant -M$ dans D ($u(x, t) \leqslant M$ dans D).

Pour la démonstration on pose

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) \pm M$$

et on applique le Théorème I.

Théorème III. *Nous supposons que*

1. *le domaine D satisfait à la condition* (G_1),

2. *la fonction $u(x, t)$ est une solution de l'équation* (1), *régulière et de classe E_{2a} dans $\bar{D}$,*

3. *il existe une dérivée du/dl pour $(x, t) \in \sigma$ et*

$$L(u) \equiv \frac{du}{dl} + h(x, t)u \leqslant 0 \quad \text{sur } \sigma \quad (L(u) \geqslant 0),$$

la fonction $h(x, t)$ est bornée supérieurement pour $(x, t) \in \sigma$,

4. *$u(x, 0) \geqslant 0$ pour $x \in \Omega$ ($u(x, 0) \leqslant 0$ pour $x \in \Omega$),*

5. *les coefficients de l'équation* (1) *satisfont aux conditions* (5),

6. *$f(x, t) \leqslant 0$ dans D ($f(x, t) \geqslant 0$ dans D).*

Alors $u(x, t) \geqslant 0$ pour $(x, t) \in D$ ($u(x, t) \leqslant 0$ pour $(x, t) \in D$).

En particulier $u(x, t) = 0$ si $f(x, t) = 0$ dans D, $L(u) = 0$ sur σ et $u(x, 0) = 0$ dans Ω.

Démonstration. Soit $H(x, t, K, \beta, \nu)$ une fonction positive dans D et choisie de façon que l'on ait les relations (8)-(10) (voir Lemme 3).

La fonction $v(x, t) = u(x, t)/H$ satisfait dans D^{T_1} à l'équation (14) où l'on a

$$\bar{c} = F(H)/H \leqslant -1 \quad \text{et} \quad \bar{f} = f/H \leqslant 0\,.$$

Ensuite on procède de même manière que dans la démonstration du Théorème dans [6].

DÉFINITION 4. La fonction $F_s(x, t, y_i, z_j, z_{jk})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j, k = 1, 2, \ldots, n)$ est dite elliptique par rapport à un système de fonctions

$$w_1(x, t), \ldots, w_m(x, t)$$

de classe C^1 dans D, lorsque

$$F_s\left(x, t, w_i, \frac{\partial w_s}{\partial x_j}, z_{jk}\right) - F_s\left(x, t, w_i, \frac{\partial w_s}{\partial x_j}, \bar{z}_{jk}\right) \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad (x, t) \in D$$

pour tout système de nombres $z_{jk} = z_{kj}$, $\bar{z}_{jk} = \bar{z}_{kj}$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ tel que la forme quadratique

$$\sum_{j,k=1}^{n} (z_{jk} - \bar{z}_{jk}) \lambda_i \lambda_j$$

est non positive.

DÉFINITION 5. Nous disons que les fonctions $F_s(x, t, y_i, z_j, z_{jk})$ $(s, i = 1, \ldots, m,\ j, k = 1, \ldots, n)$ satisfont à la condition (L_a) $(0 \leqslant a < \infty)$ s'il existe des nombres positifs L_1, L_2, L_3 tels que

$$\begin{aligned} & F_s(x, t, y_i, z_j, z_{jk}) - F_s(x, t, \bar{y}_i, \bar{z}_j, \bar{z}_{jk}) \\ & \leqslant L_1(r^2+1)^{(1-a)} \sum_{j,k=1}^{n} |z_{jk} - \bar{z}_{jk}| + L_2(r^2+1)^{1/2} \sum_{j=1}^{n} |z_j - \bar{z}_j| + L_3(r^2+1)^{a} \sum_{i=1}^{m} |y_i - \bar{y}_i| \\ & \qquad (s = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

pour tout système de nombres $y_i, \bar{y}_i, z_j, \bar{z}_j, z_{jk}, \bar{z}_{jk}, y_s \geqslant \bar{y}_s$ $(j, k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m)$. En ce qui concerne le système (2), nous avons le

THÉORÈME IV. *On suppose que les fonctions F_s $(s = 1, \ldots, m)$ du système* (2) *satisfont à condition* (L_a).

Alors le premier problème de Fourier relatif au système (2) *admet dans le domaine $\bar{D}$ une solution au plus, régulière et de classe E_{2a}, telle que les fonctions F_s $(s = 1, \ldots, m)$ sont elliptique par rapport à cette solution.*

THÉORÈME V. *Nous supposons que*

1. *le domaine D satisfait à la condition* (G_m),

2. *les fonctions F_s $(s = 1, \ldots, m)$ satisfont à la condition* (L_a),

3. *les fonctions $G_s(x, t, y_1, \ldots, y_m)$ $(s = 1, \ldots, m)$ satisfont à la condition* $(\bar{\mathrm{L}})$; *il existe une constante L, telle que*

$$G_s(x, t, y_1, \ldots, y_m) - G_s(x, t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m) \leqslant L \sum_{i=1}^{m} |y_i - \bar{y}_i|$$

pour $(x, t) \in \sigma$ et tout système de nombres $y_i, \bar{y}_i, y_s \geqslant \bar{y}_s$.

Alors il existe un système au plus $u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t)$ de fonctions de classe E_{2a} et régulière dans $\bar{D}$, tel que

(a) *$u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t)$ est une solution du système* (2),

(b) *les fonctions F_s $(s=1,\ldots,m)$ sont elliptiques par rapport $u_1, \ldots, u_m$,*

(c) *$u_i(x,0)=\varphi_i(x)$ pour $x \in \Omega$ $(i=1,\ldots,m)$ où les fonctions $\varphi_i(x)$ sont données et continues dans $\bar{\Omega}$,*

(d) *il existe des dérivées du_i/dl_i pour $(x,t) \in \sigma$ $(i=1,\ldots,m)$ et $du_i/dl_i + G(x,t,u_1,\ldots,u_m)=0$ pour $(x,t) \in \sigma$ $(i=1,\ldots,m)$.*

Les démonstrations des Théorèmes IV et V sont, d'après des Lemmes 1 et 3 analogues, à celles des théorèmes concernant le cas $\alpha=1$ (voir [1] et [2]).

§ 3. Inégalités entre les solutions des équations paraboliques.

Définition 6. Nous disons que les fonctions

$$\psi_s(y_1, \ldots, y_m, Z) \qquad (s=1,\ldots,m),$$

où Z ne dépend pas de $\{y_i\}$, satisfont à la condition (W) par rapport à $(y_1,\ldots,y_m)$ si on a l'inégalité

$$\psi_s(y_1,\ldots,y_m; Z) \leqslant \psi_s(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_m, Z) \qquad (s=1,\ldots,m),$$

pour $y_i \leqslant \bar{y}_i$, $i \neq s$, $y_s = \bar{y}_s$.

Théorème VI. *Nous supposons que*

1. *$\{\bar{u}_i(x,t)\}$, $\{\bar{\bar{u}}_i(x,t)\}$ $(i=1,\ldots,m)$ sont les solutions des systèmes*

$$\begin{aligned}
&(15) \qquad \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} = \bar{F}_s\left(x,t,\bar{u}_i,\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial x_j},\frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial x_j \partial x_k}\right), \\
&(16) \qquad \frac{\partial \bar{\bar{u}}_s}{\partial t} = \bar{\bar{F}}_s\left(x,t,\bar{\bar{u}}_i,\frac{\partial \bar{\bar{u}}_s}{\partial x_j},\frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_s}{\partial x_j \partial x_k}\right)
\end{aligned} \qquad (s=1,\ldots,m),$$

régulières et de classe E_{2a} dans $\bar{D}$,

2. *pour chaque s $(s=1,\ldots,m)$ la fonction $\bar{F}_s$ ou $\bar{\bar{F}}_s$ est elliptique par rapport à $\{\bar{u}_i\}$ ou $\{\bar{\bar{u}}_i\}$ respectivement),*

3. *pour chaque s $(s=1,\ldots,m)$ la fonction $\bar{F}_s$ ou $\bar{\bar{F}}_s$ satisfait en même temps aux conditions (L_a) et (W), par rapport à $\{y_i\}$,*

4. *$\bar{F}_s(x,t,y_i,z_j,z_{jk}) \leqslant \bar{\bar{F}}_s(x,t,y_i,z_j,z_{jk})$ $(s=1,\ldots,m)$ pour $(x,t) \in D$ et y_i, z_j, z_{jk} arbitraires,*

5. *$\bar{u}_i(x,t) \leqslant \bar{\bar{u}}_i(x,t)$ pour $(x,t) \in \Gamma$ $(i=1,\ldots,m)$.*

Alors $\bar{u}_i(x,t) \leqslant \bar{\bar{u}}_i(x,t)$ dans D $(i=1,\ldots,m)$.

THÉORÈME VII. *Nous supposons que*

1. *les hypothèses* 1, 2, 3, 4 *du théorème* VI *sont vérifiées et le domaine* D *satisfait à la condition* (G_m),

2. $\bar{u}_i(x, 0) \leqslant \bar{\bar{u}}_i(x, 0)$ *pour* $x \in \Omega$ $(i = 1, \ldots, m)$,

3. *il existe des dérivées* $d\bar{u}_i/dl_i$, $d\bar{\bar{u}}_i/dl_i$ *pour* $(x, t) \in \sigma$ $(i = 1, \ldots, m)$ *et*

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{u}_i}{dl_i} + \bar{G}_i(x, t, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m) = 0, \\ &\frac{d\bar{\bar{u}}_i}{dl_i} + \bar{\bar{G}}_i(x, t, \bar{\bar{u}}_1, \ldots, \bar{\bar{u}}_m) = 0 \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

pour $(x, t) \in \sigma$,

4. $\bar{G}_i(x, t, y_j) \leqslant \bar{\bar{G}}_i(x, t, y_j)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *pour* $(x, t) \in \sigma$ *et* y_j *arbitraires*,

5. *pour chaque* s $(s = 1, \ldots, m)$ *la fonction* $\bar{G}_s$ *ou* $\bar{\bar{G}}_s$ *satisfait conditions* $(\bar{L})$ *et* (W) *par rapport* $\{y_i\}$.

Alors $\bar{u}_i(x, t) \leqslant \bar{\bar{u}}_i(x, t)$ *dans* D $(i = 1, \ldots, m)$.

Les démonstrations des Théorèmes VI et VII sont analogues, en vertu des Lemmes 1 et 3, à celles des théorèmes concernant le cas $\alpha = 1$ (voir [1] et [2]).

Pour l'équation (1) nous avons le

THÉORÈME VIII. *Nous supposons que*

1. *le domaine* D *satisfait à la condition* (G_1),

2. *les fonctions* $u_1(x, t)$ *et* $u_2(x, t)$ *sont les solutions des équations*

$$F(u) = f_1(x, t), \qquad F(u) = f_2(x, t) \qquad \textit{respectivement},$$

(gulières et de classe $E_{2\alpha}$ *dans* $\bar{D}$,

3. $f_1(x, t) \geqslant f_2(x, t)$ *dans* D,

4. $u_1(x, 0) \leqslant u_2(x, 0)$ *dans* Ω,

5. *il existe des dérivées* du_1/dl, du_2/dl *et*

$$\begin{aligned} &\frac{du_1}{dl} + G_1(x, t, u_1) = 0 \\ &\frac{du_2}{dl} + G_2(x, t, u_2) = 0 \end{aligned} \qquad \textit{pour} \quad (x, t) \in \sigma.$$

6. $G_1(x, t, y) \leqslant G_2(x, t, y)$ *pour* $(x, t) \in \sigma$ *et* y *arbitraire*,

7. *la fonction* G_1 *ou* G_2 *satisfait à la condition* (L) *par rapport à* y,

8. *les coefficients de l'équation* (1) *satisfont aux conditions* (5).

Alors $u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t)$ *dans* D.

§ 4. Existence de la solution dans un domaine non borné. Nous admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSE (H). *Soit* $\varphi(x, t)$ *une fonction continue dans* $\bar{D}$.

Pour chaque $R > R_0$ *il existe une solution* $u_R(x, t)$ *de l'équation* (1), *régulière dans* $\bar{D}_R$, *telle que*

$$u_R(x, t) = \varphi(x, t) \quad \textit{pour} \quad (x, t) \in \Gamma_R .$$

HYPOTHÈSE (H_m). *Soit* $\{\varphi_i(x, t)\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ *un système de fonctions continues dans* $\bar{D}$.

Pour chaque $R > R_0$ *il existe une solution* $\{u_i^R(x, t)\}$ *du système* (2) *telle que*

1. *les fonctions* F_s $(s = 1, 2, \ldots, m)$ *sont elliptiques par rapport à* $\{u_i(x, t)\}$,

2. $u_i^R(x, t) = \varphi_i(x, t)$ *pour* $(x, t) \in \Gamma_R$.

THÉORÈME IX. *Nous supposons que*

1. *l'hypothèse* (H) *est vérifiée,*

2. *la fonction* $f(x, t)$ *est de classe* E_{2a} *dans* D,

3. *les coefficients de l'équation* (1) *satisfont aux conditions* (5),

4. *la fonction* $\varphi(x, t)$ *est définie, continue et de classe* E_{2a} *dans* $\bar{D}$,

5. $0 < a < \infty$.

Alors il existe une solution de l'équation (1), *régulière et de classe* E_{2a} *dans* D^{T_1}, *telle que*

$$u(x, t) = \varphi(x, t) \quad \textit{pour} \quad (x, t) \in \Gamma^{T_1}$$

le nombre $T_1 \leqslant T$ *dépendant des coefficients de l'équation* (1) *et des fonctions* $f(x, t)$ *et* $\varphi(x, t)$.

La démonstration est pareille à celle du théorème de [4] concernant le cas $a = 1$.

Soit $\{R_n\}$ une suite de nombres positifs telle que $R_n \to \infty$, $R_{n+1} \geqslant R_n \geqslant R_0$ et soit $\{u_n(x, t)\}$ une suite des solutions de l'équation (1) régulières dans $\bar{D}_{R_n}$ et telles que

$$u_n(x, t) = \varphi(x, t) \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \Gamma_{R_n} .$$

Désignons par $H\big(x, t, K, \beta(K)\big)$ une fonction positive qui satisfait aux conditions:

(a) $F(H)/H \leqslant -1$ pour $(x, t) \in D^{T_1}$, $T_1 \leqslant T$,

(b) $\lim\limits_{|x| \to \infty} f/H = 0$, $\lim\limits_{|x| \to \infty} \varphi/H = 0$ uniformément dans $(0, T)$ (voir Lemme 1).

Les fonctions $v_n = u_n/H$ satisfont dans $D_{R_n}^{T_1}$ à une équation de la forme (14) avec $\bar{f} = f/H$, $\bar{c} = F(H)/H \leqslant -1$.

Soit

$$\bar{M} = \max\{\sup_D |\varphi/H|, \sup_D |f/H|\}.$$

Nous allons démontrer que

$$(17) \qquad |v_n(x, t)| \leqslant \bar{M} \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \overline{D^{T_1}_{R_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Supposons qu'il existe un nombre n_0 tel que

$$\max_{\overline{D^{T_1}_{R_{n_0}}}} v_{n_0} > \bar{M}.$$

On peut choisir un point $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{D^{T_1}_{R_{n_0}}}$ de sorte que

$$v_{n_0}(\bar{x}, \bar{t}) = \sup_{\overline{D^{T_1}_{R_{n_0}}}} v_{n_0}(x, t) = \bar{M} + \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon > 0.$$

D'après la définition de $\bar{M}$ on a $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_{R_{n_0}} \times (0, T_1]$.

Alors

$$-\bar{M} \leqslant \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{F}(v_{n_0})(\bar{x}, \bar{t}) \leqslant v_{n_0}(\bar{x}, \bar{t})\bar{c} \leqslant -\bar{M} - \varepsilon,$$

ce qui est impossible. D'une manière analogue nous démontrons que $v_n(x, t) \geqslant -\bar{M}$, $n = 1, 2, \ldots$

Désignons $\bar{v}_n = u_n/H(x, t, K+k, \beta(K+k))$, $k > 0$.

Les fonctions $\bar{v}_{n,m} = \bar{v}_n - \bar{v}_m$ satisfont dans $D^{T_2}_{R_{n,m}}$ $(T_2 \leqslant T_1)$ (où $R_{n,m} = \min(R_n, R_m)$) à l'équation

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{b}}_i v'_{x_i} + \bar{\bar{c}} v - v'_t = 0,$$

où

$$\bar{\bar{c}} = \frac{F\big(H(x, t, K+k, \beta(K+k))\big)}{H\big(x, t, K+k, \beta(K+k)\big)} \leqslant -1 \quad \text{pour} \quad (x, t) \in D^{T_2}.$$

D'après le Lemme 2 et (17) on a

$$|\bar{v}_{n,m}(x, t)| \leqslant 2\bar{M} \exp\{-k(r^2+1)^a\} \quad \text{pour} \quad (x,t) \in D^{T_2}_{R_{n,m}}$$

et, en particulier,

$$|\bar{v}_{n,m}(x, t)| \leqslant 2\bar{M} \exp\{-k(R^2_{n,m}+1)^a\} \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \Gamma^{T_2}_{R_{n,m}}.$$

En appliquant le principe de l'extremum on obtient l'inégalité

$$|\bar{v}_{n,m}(x, t)| \leqslant 2\bar{M} \exp\{-k(R^2_{n,m}+1)^a\} \quad \text{pour} \quad (x, t) \in D^{T_2}_{R_{n,m}} \text{ et } n, m = 1, 2, \ldots$$

Comme $u_n = \bar{v}_n H(x, t, K+k, \beta(K+k))$, *la suite* $\{u_n\}$ converge pour $n \to \infty$ vers une fonction $u(x, t)$ uniformément dans $D^{T_2}_R$ pour tout $R > R_0$.

La fonction $u(x, t)$ est évidemment continue dans $\bar{D}^{T_2}$ et de classe E_{2a} (d'après (17)).

Nous allons démontrer que la fonction $u(x, t)$ est une solution de l'équation (1) régulière dans $\bar{D}^{T_2}$.

Choisissons $R > R_0$ et soit $\bar{u}(x, t)$ une solution de l'équation (1), régulière dans $\bar{D}_R^{T_2}$, telle que

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) \quad \text{pour} \quad (x, t) \in \Gamma_R^{T_2}.$$

Les fonctions $w_n = \bar{u} - u_n$ ($R_n > R$) sont régulières dans $\bar{D}_R^{T_2}$ et satisfont à l'équation $F(u) = 0$ dans $D_R^{T_2}$.

Alors (voir [3], p. 10)

$$|\bar{u} - u_n| \leqslant \exp\left\{\left(\sup_{D_R} c(x, t)\right) t\right\} \sup_{\Gamma_R^{T_2}} |u - u_n| \quad \text{pour} \quad n > N = N(R)$$

c'est-à-dire

$$\bar{u} = u \quad \text{pour} \quad (x, t) \in D_R^{T_2}.$$

Théorème X. *Nous supposons que*

1. *l'hypothèse* (H_m) *est vérifiée,*

2. *les fonctions* $F_s(x, t, 0, \ldots, 0)$ $(s = 1, \ldots, m)$ *sont de classe* E_{2a} *dans* D,

3. *les fonctions* F_s $(s = 1, \ldots, m)$ *satisfont à la condition* (L_a),

4. $\varphi_s(x, t)$ *sont des fonctions définies, continues et de classe* E_{2a} *dans* D,

5. $0 < a < \infty$.

Alors il existe une solution $\{u_i(x, t)\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ *du système* (2), *régulière et de classe* E_{2a} *dans* $\overline{D^{T_1}}$ $(T_1 \leqslant T)$ *telle que* $u_i(x, t) = \varphi_i(x, t)$ *pour* $(x, t) \in \Gamma^{T_1}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

En vertu des Lemmes 1 et 2, la démonstration du Théorème X est analogue à celle du théorème concernant le cas $a = 1$ (voir [1]).

Remarque 3. En appliquant les Lemmes 3 et 4 on peut démontrer des théorèmes analogues aux Théorèmes IX et X, relatifs aux second et troisième problèmes de Fourier.

Remarque 4. Les Théorèmes I, II, IV, VI, IX, X restent vrais si le domaine D n'est pas cylindrique.

Remarque 5. Si σ est un ensemble vide, nous obtenons le problème de Cauchy.

Travaux cités

[1] P. Besala, *On solutions of Fourier's first problem for a system of non-linear parabolic equations in an unbounded domain*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), p. 247-266.

[2] — *Concerning solutions of an exterior boundary-value problem for a system of non-linear parabolic equations*, Ann. Polon. Math. 14 (1964), p. 289-302.

[3] A. Ilin, A. Kalašnikov, O. Olejnik, *Équations linéaires du second ordre du type parabolique* (en russe), Успехи мат. наук 17, 3 (105), (1962), p. 3-146.

[4] M. Krzyżański, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique, déterminées par les conditions initiales*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 18 (1945).

[5] — *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bull. de l'Acad. Polon. des Sci., Série des sci. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 131-136.

[6] — *Sur l'unicité des solutions des second et troisième problèmes de Fourier relatifs à l'équation linéaire normale du type parabolique*, Ann. Polon. Math. 7 (1960), p. 201-208.

Reçu par la Rédaction le 11. 2. 1965