ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Une remarque sur l'instabilité de la solution $x=0$ d'une équation différentielle à paramètre retardé dans le cas envisagé par Germaidze

par Z. Mikołajska (Kraków)

Dans la présente note nous allons donner un exemple d'équation différentielle à paramètre retardé, qui montre que la condition donnée par Germaidze [1] n'est pas suffisante pour la stabilité (au sens de Liapunow) de la solution $x \equiv 0$ de l'équation

$$y'(t) = -ay(t)+\varphi(t)y(t-h) \qquad (h>0) \tag{1}$$

où $\varphi(t)$ est continue et $\varphi(t) \geqslant 0$, $h>0$.

La condition de Germaidze est la suivante: Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \varphi(s)\,ds \leqslant \gamma \quad \text{pour tout } t \quad \text{et} \quad T = 2h+\varrho \tag{2}$$

(ϱ convenablement choisi). Nous démontrons que l'existence d'une telle constance n'est pas suffisante pour la stabilité (et par suite aussi pour la stabilité asymptotique). Dans la note [2] nous avons démontré une autre condition suffisante pour la stabilité asymptotique (pour les équations différentielles à paramètre retardé), dont l'application dans le cas (1) donne la condition

$$\lim t\left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(s)\,ds - ae^{-ah}\right\} = -\infty\,. \tag{3}$$

On peut déduire de (3) que la constante dans (2) doit être suffisamment petite.

Considérons l'exemple suivant: Posons dans (1)

$$\varphi(t) = b > 2ae^{ah}, \qquad a>0,\ h>0\,. \tag{4}$$

Nous obtenons ainsi l'équation suivante

$$y'(t) = -ay(t)+by(t-h)\,. \tag{5}$$

Envisageons une solution de l'équation (5) avec la condition

$$y(t) = \psi(t) \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0 \tag{6}$$

où $\psi(t)$ est continue dans l'intervalle $\langle -h, 0\rangle$ et

(7) $$\psi'(0) = -a\psi(0) + b\psi(-h),$$
$$\psi(t) \geqslant ke^{at} \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0,$$

où $k > 0$ quelconque (suffisamment petit).

Envisageons la fonction
$$w(t) = y(t) - ke^{at};$$
on a
$$w(t) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0.$$

Supposons que

(8) $$w(t) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant t_0 < \infty,$$

(9) $$w(t) < 0 \quad \text{pour} \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \varepsilon \ (\varepsilon > 0).$$

On a
$$w'(t) = y'(t) - ake^{at} = -ay(t) + by(t-h) - ake^{at}, \qquad w(t_0) = 0$$
c'est-à-dire $y(t_0) = ke^{at_0}$ et par suite pour $t = t_0$ on a en vertu de (8)
$$w'(t_0) \geqslant -ake^{at_0} + bke^{at_0-ah} - ake^{at_0} = ke^{at_0}\{be^{-ah} - 2a\} > 0$$
d'où il vient
$$w(t) > w(t_0) = 0 \quad \text{pour} \quad t_0 < t < t_0 + \eta$$
ce qui est incompatible avec (9). Nous avons ainsi démontré que

(10) $$y(t) \geqslant ke^{at} \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t < \infty.$$

Mais pour chaque $\delta > 0$ il existe un k tel que
$$0 < ke^{at} \leqslant \delta \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0.$$

C'est-à-dire la fonction $\psi(t)$ peut être petite, mais la solution $y(t)$ tend vers l'infini pour $t \to \infty$ et, par suite, la solution $x = 0$ de l'équation (5) est instable, bien que l'équation (5) satisfasse à la condition de Germaidze.

Travaux cités

[1] В. Е. Гермаидзе, *Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом*, Усп. Мат. Наук. 11 (4) (88) (1959).

[2] Z. Mikołajska, *Remarque sur la stabilité d'une solution du système d'équations différentielles avec le paramètre retardé*, Colloq. Math.

Reçu par la Rédaction le 26. 5. 1966