ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVIII (1980)

Sur une sous-classe de fonctions étoilées dont les valeurs recouvrent un cercle fixé

par Z. Bogucki (Radom) et J. Zderkiewicz (Lublin)

Résumé. Désignons par S_a, $0 < a \leqslant 1$, la famille des fonctions $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, analytiques et univalentes dans le cercle-unité K et satisfaisant dans celui-ci à la condition $\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < a\frac{\pi}{2}$.

Dans ce travail on détermine, en utilisant les formules variationnelles de Hadamard pour la fonction de Green et la constante de Robin, les limitations de $\inf|f(z)|$, $\sup|f(z)|$, $\sup|a_2(f)|$, $f \in S_a$.

1. Désignons par S_a, $0 < a \leqslant 1$, la classe des fonctions

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,$$

analytiques dans le cercle K_1 (où $K_r = \{z\colon |z| < r\}$), qui satisfont à la condition

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < a\frac{\pi}{2}.$$

Évidemment $S_a \subset S^*$, où S^* est la famille bien connue des fonctions étoilées, et $S_1 = S^*$. On sait [1] que si $f \in S_a$, $f(K_1)$ est un domaine de Jordan. Il s'ensuit que pour toute fonction $f \in S_a$ on a

$$K_{r_a} \subset f(K_1) \subset K_{M_a},$$

où $r_a = \inf|f(e^{it})|$, $M_a = \sup|f(e^{it})|$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $f \in S_a$, le nombre M_a étant fini [5].

Fixons les nombres R, M, $0 < R < 1 < M$, et posons

$$S_a(R) = \{f \in S_a\colon K_R \subset f(K_1)\},$$

$$S_a(M) = \{f \in S_a\colon f(K_1) \subset K_M\},$$

$$S_a(R, M) = \{f \in S_a\colon K_R \subset f(K_1) \subset K_M\}.$$

Évidemment on a: $S_a(R) = S_a$ si $R \leqslant r_a$, et $S_a(M) = S_a$ si $M_a \leqslant M$.

Dans ce travail nous nous proposons de déterminer l'extrémum des fonctionnelles: $|f(z)|$, $|a_2(f)|$, $f \in S_a(R, M)$. Ces fonctionnelles étant continues et la classe $S_a(R, M)$ étant compacte, il existe des fonctions f_0, f_1, f_2 appartenant à cette classe et réalisant respectivement: $\sup|f(z)|$, $\inf|f(z)|$, $\sup|a_2(f)|$. Les résultats obtenus s'étendent au cas-limite où $a = 1$, c'est-à-dire à la classe $S^*(R, M)$ des fonctions étoilées.

2. Les nombres a, R, M étant fixés, $0 < a < 1, 0 < R < 1 < M$, désignons par $U_a(R, M)$ la famille des domaines G dont chacun contient deux points fixés $0, q$ $(0 < q < M)$ et satisfait aux conditions suivantes:

1° $K_R \subset G \subset K_M$,

2° le rayon conforme intérieur $r(0, G) = 1$,

3° pour tout point $w_0 \in G, w_0 \neq 0$, la partie commune de chacune des spirales $w = w_0\exp\{is \pm s\operatorname{ctg}(1-a)\frac{1}{2}\pi\}$, $-\infty < s < +\infty$, et du domaine G est un ensemble connexe.

On sait [6] que pour tout domaine $G \in U_a(R, M)$ il existe une fonction $f \in S_a(R, M)$ telle que $f(K_1) = G$, et inversement.

Le nombre r_0 étant fixé, $0 < r_0 < 1$, supposons que la fonction f_0 réalise $\sup\limits_{f,t}|f(re^{it})|$. Si $\sup\limits_{t}|f_0(r_0e^{it})| = q$, les relations $\sup\limits_{t}|f(re^{it})| = q$, $f \in S_a(R, M)$ entraînent $r_0 \leqslant r$. Autrement dit: la fonction extrémale f_0 réalise l'égalité $\sup\limits_{t}|f_0(re^{it})| = q$ pour r aussi petit que possible.

Supposons maintenant que la fonction $z = h(w)$ effectue la représentation conforme du domaine $G \in U_a(R, M)$ sur le cercle K_1, $h(0) = 0$. Alors la fonction de Green $g(w, q, G)$ du domaine G avec un pôle au point q s'exprime par la formule

$$g(w, q, G) = \log\left|\frac{1-h(w)\bar{h}(q)}{h(w)-h(q)}\right| \overset{\mathrm{df}}{=} \log|F(w)|. \tag{2.1}$$

Soit $f(K_1) = G, f \in S_a(R, M)$ et $\sup\limits_{t}|f(re^{it})| = q$. Alors $z = h(w) = f^{-1}(w)$ et de (2.1) on tire $g(0, q, G) = \log 1/r$. On voit donc que la détermination de la fonction f_0 qui réalise $\sup\limits_{f,t}|f(re^{it})|$ pour r tel que $\sup\limits_{t}|f_0(re^{it})| = q$ est équivalente à celle du domaine $G_0 \in U_a(R, M)$ qui satisfait à la condition

$$\sup g(0, q, G) = g(0, q, G_0), \quad G \in U_a(R, M). \tag{2.2}$$

Si le domaine G_0 est le même pour tout $q \in (0, M)$, la fonction f_0: $f_0(K_1) = G_0$ réalise $\sup|f(z)|$ pour tout $|z| = r, r \in (0, 1)$.

De même, la détermination de la fonction f_1 qui réalise $\inf\limits_{f,t}|f(re^{it})|$ pour r tel que $\inf\limits_{t}|f_1|(re^{it})| = -q$, $q \in (-R, 0)$, est équivalente à celle du domaine $\hat{G} \in U_a(R, M)$ qui satisfait à la condition

$$\inf g(0, q, G) = g(0, q, \hat{G}), \quad G \in U_a(R, M). \tag{2.3}$$

On voit donc que le problème proposé: déterminer l'extrémum de

$|f(z)|$, sera résolu si l'on aura trouvé les domaines G_0 et $\hat{G}$ qui réalisent les égalités dans (2.2) et (2.3).

3. Dans la famille $U_a(R, M)$ nous distinguerons la sous-classe U_n, $n = 1, 2, \ldots$, des polygones circulairement spiralés G_p définis comme il suit:

$$G_p = K_M - \bigcup_1^p W_k, \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \tag{3.1}$$

où W_k désigne le quadrilatère circulairement spiralé dont la frontière est constituée par les arcs de circonférence

$$l_k:\ w = r_k e^{i\theta}, \quad a_k < \theta < \beta_k, \quad a_k, \beta_k \in (0, 2\pi), \quad R \leqslant r_k \leqslant M,$$
$$l_M:\ |w| = M,$$

et les deux arcs de spirales

$$w = r_k \exp\{i(s + a_k) - s\operatorname{ctg}(1-a)\tfrac{1}{2}\pi\},$$
$$w = r_k \exp\{i(s + \beta_k) + s\operatorname{ctg}(1-a)\tfrac{1}{2}\pi\},$$

qui joignent les extrémités de l_k et l_M. Nous admettrons encore que $l_j \cap l_k = \emptyset$, $j \neq k$.

Pour tout domaine $G \in U_a(R, M)$ il existe une suite $\{G_n\}$ de polygones (3.1) convergente vers G au sens de la convergence vers le noyau. De plus, si $n \geqslant 1$ est fixé, il existe dans la famille U_n un polygone $\hat{G}_p$ tel que

$$\sup g(0, q, G_p) = g(0, q, \hat{G}_p), \quad 1 \leqslant p \leqslant n. \tag{3.2}$$

Pour déterminer le domaine G_0 et le polygone $\hat{G}_p$ nous utiliserons les formules de Hadamard [4] pour la variation de la fonction de Green et de la constante de Robin:

$$\delta g(w_0, q, G) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial n_w} g(w, w_0, G) \frac{\partial}{\partial n_w} g(w, q, G)\, \delta n(s)\, ds, \tag{3.3}$$

$$\delta \gamma(w_0, G) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\partial}{\partial n_w} g(w, w_0, G)\right]^2 \delta n(s)\, ds, \tag{3.4}$$

où δg, $\delta\gamma$ sont les parties linéaires des accroissements respectifs de la fonction de Green et de la constante de Robin du domaine G, $\gamma(w_0, G) = \ln r(w_0, G)$, L est la frontière orientée positivement du domaine G, $\partial/\partial n_w$ la dérivée dans la direction du vecteur normal, $\delta n(s) = tp(s)$, $t > 0$, la partie linéaire de l'accroissement du vecteur normal. Les formules (3.3) et (3.4) sont vraies si la frontière L du domaine simplement connexe G est un système fini d'arcs analytiques tels que les angles intérieurs compris entre deux arcs consécutifs égalent $\varphi\pi$, $0 < \varphi < 2$, et $p(s)$ est une fonction continue sur L, sauf peut-être en un nombre fini de points.

Tenant compte de (2.1) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial n_w} g(w, q, G) = \frac{\partial}{\partial n_w} \log|F(w)| = |F'(w)|,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial n_w} g(w, q, G) = \frac{|h'(w)|\left(1-|h(q)|^2\right)}{|h(w)-h(q)|^2}, \quad w \in L. \tag{3.5}$$

Des formules (3.3) et (3.4) on tire, moyennant (3.5),

$$\delta g(0, q, G) = \frac{1}{2\pi} \int_L |h'(w)|^2 H(w)\, \delta n(s)\, ds, \tag{3.6}$$

$$\delta \gamma(0, G) = \frac{1}{2\pi} \int_L |h'(w)|^2 \delta n(s)\, ds, \tag{3.7}$$

$$H(w) = \frac{|1-|h(q)|^2}{|h(w-h(q)|^2} = \frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}, \quad z, z_0 \in K_1.$$

Nous profiterons aussi dans la suite du

LEMME 1 [3]. *Supposons que la frontière L du domaine G soit une courbe de Jordan et que les points A, B, C partagent L en trois arcs qui ne se réduisent pas à des points. Alors on peut toujours choisir, parmi ces trois arcs, deux arcs L_1, L_2 tels que pour des arcs quelconques $l_1, l_2, l_1 \subset L_1$, $l_2 \subset L_2$, on ait*

$$\max H(w) < \min H(v), \quad w \in l_2,\ v \in l_1, \tag{3.8}$$

oú H est la fonction définie dans (3.7).

En utilisant les formules (3.6) et (3.7) nous aurons à éliminer de la famille U_n les polygones qui n'ont pas la propriété extrémale (3.2). Dans ce but nous procéderons comme il suit. Supposons que $G \in U_n$ et soit G_t, $0 < t$, le domaine obtenu de G en déformant sa frontière G (si $t \to 0$, on a $G_t \to G$). Si $G_t \in U_n$ et $g(0, q, G_t) - g(0, q, G) > 0$, il est évident que le polygone G n'a pas la propriété (3.2).

4. Nous allons maintenant montrer comment procéder à la déformation de la frontière d'un polygone de la famille U_n, dont nous profiterons dans la suite.

Soit Γ l'arc de spirale qui est un côté du quadrilatère W_k intervenant dans (3.1), p. ex.

$$\Gamma = \{w\colon\ w = r_k \exp[i(s+a_k) - s\operatorname{ctg}(1-a)\tfrac{1}{2}\pi],\ 0 \leqslant s \leqslant s_k\}.$$

Déformons la frontière du quadrilatère W_k en remplaçant son côté Γ par l'arc de spirale Γ_t,

$$\Gamma_t = \{w\colon\ w = r_k \exp[i(s+a_k \pm t) - s\operatorname{ctg}(1-a)\tfrac{1}{2}\pi],\ 0 \leqslant s \leqslant s_k'\},$$

$t > 0$. Procédant de même, nous déformons l'arc de spirale Γ' qui est le second côté du quadrilatère W_k et obtenons ainsi le côté Γ'_t. Le côté $\Gamma'' = \{w\colon\ |w| = r_k\}$ du quadrilatère W_k, qui est un arc de cercle, sera déformé en le remplaçant par l'arc $\Gamma''_t = \{w\colon\ |w| = r_k \pm t\}$, $t > 0$, dont les extrémités sont situées sur les côtés spiralés de ce quadrilatère ou sur leurs prolongements. Remplaçant tous les côtés $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ (ou quelques uns d'eux) respectivement par $\Gamma_t, \Gamma'_t, \Gamma''_t$, on obtient de W_k le quadrilatère W'_k.

Désignons par G'_p le polygone spiralé qui s'obtient de G_p en y remplaçant au moins un quadrilatère W_k par le quadrilatère déformé W'_k.

LEMME 2. *Les parties linéaires des accroissements*

$$\Delta g = g(0, q, G'_p) - g(0, q, G_p), \qquad q \in G'_p \cap G_p,$$

$$\Delta\gamma = \gamma(0, G'_p) - \gamma(0, G_p),$$

s'expriment respectivement par les formules (3.6) *et* (3.7).

Démonstration. I. Considérons d'abord le cas où la frontière du polygone G_p contient trois arcs consécutifs: l'arc de circonférence L_1 d'équation $|w| = M$, l'arc de spirale Γ et l'arc de circonférence L_2 d'équation $|w| = r_k$, $R \leqslant r_k$. Le reste de la frontière du polygone G_p sera désigné par $\hat{L}$. On a donc: $\partial G_p = \hat{L} + L_1 + \Gamma + L_2$.

Soit $\Gamma = \{w(s)\colon\ w(s) = r_k \exp[i(s + a_k) - s \operatorname{ctg}(1-\alpha)\frac{1}{2}\pi],\ 0 \leqslant s \leqslant s_k\}$, et soit $p(s)$ une fonction définie sur Γ comme il suit: $p(s) = \pm |w'(s)|$, $0 \leqslant s \leqslant s_k$, où $iw'(s) = w(s)[-1 + i \operatorname{ctg}(1-\alpha)\frac{1}{2}\pi]$. Nous admettons que $p(s) > 0$ lorsque le vecteur normal $iw'(s)$ est dirigé vers l'extérieur de G_p et que $p(s) < 0$ dans le cas contraire. Évidemment l'équation

$$w_t(s) = w(s) + itw'(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant s_k,\ 0 < t,$$

représente l'arc de spirale Γ'_t. Supposons que $p(s) < 0$ et choisissons le paramètre t en sorte que les arcs Γ'_t et Γ_t (où Γ_t a été défini en même temps que le polygone G'_p) aient une partie commune non vide. Désignons par G_t le domaine que l'on obtient de G_p en remplaçant l'arc Γ par l'arc Γ_t et en y ajoutant les segments de droite I_1, I_2 qui joignent les extrémités des arcs Γ, Γ_t le long des normales. Alors

$$\partial G_t = \hat{L} + I_1 + \Gamma_t + I_2 + L_2.$$

Prolongeant la fonction $p(s)$ sur toute la frontière du polygone G_p et admettant qu'elle est nulle en dehors de l'arc Γ, on peut représenter la partie linéaire de l'accroissement $\Delta' g = g(0, q, G_t) - g(0, q, G)$ par la formule (3.6). La différence $\Delta'' g = g(0, q, G'_p) - g(0, q, G_t)$ est une fonction harmonique dans la partie commune des domaines G'_p et G_t. En exprimant du rayon conforme intérieur du domaine et de l'hypothèse admise au début. Alors sur l'arc l_1 on a $\delta n(s) > 0$, sur l_2, $\delta n(s) < 0$, enfin $\delta n(s) = 0$ sur le reste de la frontière de G_p. Du lemme 2 et de (3.7) on tire

$$0 = \gamma(0, G'_p) - \gamma(0, G_p) = \frac{1}{2\pi}\int_E |h'(w)|^2 \delta n(s)\,ds + o(t), \qquad E = l_1 + l_2,$$

d'où

$$\int_{l_1} |h'(w)|^2 \delta n(s)\,ds = \int_{l_2} |h'(w)|^2 [-\delta n(s)]\,ds. \tag{5.1}$$

Les formules (3.8) et (5.1) donnent

$$\int_{l_1} |h'(w)|^2 H(w)\, \delta n(s)\,ds > \int_{l_2} |h'(w)|^2 H(w) [-\delta n(s)]\,ds,$$

ce qui signifie que $\delta g(0, q, G_p) > 0$, donc aussi $\Delta g = g(0, q, G'_p) - g(0, q, G_p) > 0$. La contradiction ainsi obtenue achève la démonstration du lemme 3.

Par un raisonnement semblable on établit le

LEMME 4. *Le polygone qui a la propriété* (3.2) *dans la famille U_n est le polygone $\hat{G}_1$ dont la frontière contient un arc de la circonférence $|w| = R$.*

Supposons maintenant que $\lim G_{n_k} = G_0$ (convergence au sens de Carathéodory), où $G_{n_k} \in U_n$ et que G_0 ait la propriété (2.2). Pour tout $n > 1$ on a $g(0, q, G_{n_k}) < g(0, q, \hat{G}_1) \leqslant g(0, q, G_0)$, et par conséquent $g(0, q, G_0) = g(0, q, \hat{G}_1)$.

On prouve de même que le polygone $\hat{G}_1$ du lemme 4 a la propriété (2.3) pour $-R < q < 0$. La seule différence dans la démonstration consiste en ce que, la condition (3.8) étant remplie, on déforme la frontière du polygone G_p le long des arcs l_1 et l_2 en admettant que sur l_1 la fonction $p(s) < 0$, sur $l_2, p(s) > 0$ et enfin $p(s) = 0$ sur le reste de la frontière de G_p, en sorte qu'après la déformation on obtienne le polygone $G'_p \in U_n$.

Observons que le domaine $\hat{G}_1$ a les propriétés (2.2) et (2.3) indépendamment du choix du nombre q, c'est-à-dire que

$$-R < q < 0 \Rightarrow \inf g(0, q, G) = g(0, q, \hat{G}_1),$$

$$0 < q < M \Rightarrow \sup g(0, q, \hat{G}_1) = g(0, q, \hat{G}_1), \qquad G \in U_a(R, M).$$

Comme le domaine $\hat{G}_1$ est circulairement symétrique par rapport au demi-axe positif, la fonction $f_0 \in S_a(R, M)$: $f_0(K_1) = \hat{G}_1$ a, en vertu de [2], la propriété suivante: $\max|f_0(re^{i\theta})| = f_0(r)$, $\min|f_0(re^{i\theta})| = -f(-r)$, $0 < r < 1$. On peut donc énoncer le

THÉORÈME 1. *Si $r_a < \sigma_a(M) < R < 1 < M < M_a$, on a, pour toute fonction $f \in S_a(R, M)$ et tout point $z \in K_1$, $|z| = r$,*

$$-f_0(-r) \leqslant |f(z)| \leqslant f_0(r),$$

où $\sigma_a(M)$ — est la constante de Koebe pour la classe $S_a(M)$, f_0 est la fonction qui effectue la représentation conforme du domaine $\hat{G}_1 = K_M - W_1$, W_1 est le quadrilatère circulairement spiralé dont la frontière est formée de deux arcs de circonférences $|w| = R$, $|w| = M$ et deux arcs de spirales:

$$w = R\exp\{i(s \pm \beta) \mp s\operatorname{ctg}(1-a)\tfrac{1}{2}\pi\}, \quad \beta = \beta(R), \tag{5.2}$$

qui joignent les extrémités de ces arcs de circonférence.

Comme corollaire du théorème 1 on peut énoncer le

THÉORÈME 2. *Pour toute fonction $f \in S_a(R, M)$, on a*

$$|f''(0)| \leqslant |f_0''(0)|,$$

où f_0 est la fonction qui intervient dans le théorème 1.

6. Signalons encore comme intéressants les cas-limites suivants du théorème 1 pour la classe $S_a(R, M)$.

1° Si $r_a < R < 1$, $M_a \leqslant M$, on a $S_a(R, M) = S_a(R)$. La fonction f_0 est alors de la forme

$$f_0(z) = z\exp\int_0^z \left\{\left[\frac{\sqrt{1-2u\cos t+u^2}}{1+u}\right]^a - 1\right\}\frac{du}{u},$$

où

$$\ln R = \int_0^1 \left\{\left[\frac{\sqrt{1-2u\cos t+u^2}}{1+u}\right]^a - 1\right\}\frac{du}{u}, \quad \beta(R) = \int_0^t \left[\frac{\cos\theta - \cos t}{\cos(\theta/2)}\right]^a d\theta,$$

et représente le cercle K_1 sur le domaine $\hat{G}_1$ dont la frontière est la somme des deux arcs de spirales (5.2) et de l'arc de circonférence: $w = Re^{it}$, $\pi - \beta \leqslant t \leqslant \pi + \beta$.

2° Si $a = 1$, on a $M_a = \infty$ et $S_1(R, M) = S^*(R, M)$, où $\sigma_1(M) = r^*(M) < R < 1 < M$, est la classe des fonctions étoilées bornées, dont les valeurs recouvrent le cercle K_R. Dans ce cas la fonction f_0 est de la forme

$$f_0(z) = z\exp\int_0^z [p(u)-1]\frac{du}{u}, \quad \text{où} \quad p(z) = \sqrt{\frac{(1-v_2 z)(1-\bar{v}_2 z)}{(1-v_1 z)(1-\bar{v}_1 z)}},$$

$v_k = e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$, et où θ_1, θ_2 satisfont au système d'équations: $f_0(1) = M$, $f_0(-1) = -R$. La fonction f_0 représente le cercle K_1 sur le domaine $\hat{G}_1 = K_M - W_1$, où $W_1 = \{w\colon R \leqslant |w| \leqslant M, \pi - \theta \leqslant \arg w \leqslant \pi + \theta\}$ et $0 < \theta < \pi$.

Si $M = \infty$ et $\frac{1}{4} = r^*(\infty) < R < 1$, $S^*(R, M) = S^*(R)$ est la classe des fonctions étoilées dont les valeurs recouvrent le cercle K_R. Dans ce cas la fonction f_0 est de la forme:

$$f_0(z) = \frac{4}{(2+\theta)^\theta} \frac{[\theta(1+z)+2g(z)]^\theta}{[1+z+g(z)]^2} \frac{z}{(1-z)^\theta}, \quad g(z) = \sqrt{1+(\theta^2-2)z+z^2},$$

$$0 < \theta < 2,$$

et représente le cercle K_1 sur le domaine $G = \{w: |\arg w| < \theta \frac{1}{2}\pi\} \cup \{w: |w| < R\}$. Les nombres R et θ sont liés par la relation:

$$R = 4[(2+\theta)^{2+\theta}(2-\theta)^{2-\theta}]^{-1/2}.$$

Bibliographie

[1] D. A. Brannan et W. E. Kirwan, *On some classes of bounded functions*, J. London Math. Soc. 1 (1969), p. 413–443.

[2] J. A. Jenkins, *On circularly symmetric functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), p. 620–624.

[3] J. Krzyż, *Distortion theorems for bounded convex functions* II, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 (1960), p. 7–18.

[4] Z. Nehari, *Conformal mapping*, New York 1952.

[5] J. Stankiewicz, *Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 20 (1966), p. 59–75.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS
SECTION DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
RADOM ET LUBLIN, POLOGNE

Reçu par la Rédaction le 27. 4. 1977