ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVII (1980)

Sur les groupes de fonctions

par ZENON MOSZNER (Cracovie)

Résumé. On donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions forme un groupe par rapport à la superposition, et aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit l'élément d'une famille de fonctions de ce genre.

On sait bien que $\mathscr{G}$ forme un groupe de transformations si $\mathscr{G}$ est non vide, si

$$\bigwedge_{f,g\in\mathscr{G}} (f\circ g \in \mathscr{G}), \tag{1}$$

où "$\circ$" désigne la superposition des fonctions et

$$\bigwedge_{f\in\mathscr{G}} (f^{-1} \text{ existe et } f^{-1} \in \mathscr{G}). \tag{2}$$

Le groupe des transformations forme évidemment un groupe abstrait par rapport a la superposition "$\circ$" comme operation. Mais une famille $\mathscr{F}$ de fonction peut former un groupe abstrait par rapport a la superposition et en même temps ne pas être un groupe de transformations. En effet, il suffit de prendre par exemple $\mathscr{F} = \{f(a) = |ax|\colon x \in R \wedge x \neq 0 \wedge a \in R\}$.

Il se pose donc la question: quelle doit être la famille $\mathscr{F}$ des fonctions $\Gamma \to \Gamma$, où Γ est un ensemble arbitraire, pour qu'elle soit un groupe abstrait par rapport a la superposition?

La reponse a cette question est contenue dans le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si la famille $\mathscr{F}$ des fonctions qui transforment un ensemble Γ dans Γ forme un groupe par rapport à la superposition, chaque f de $\mathscr{F}$ admet le même contre-domaine, f est une bijection sur ce contre-domaine et la condition suivante est remplie*:

$$\bigwedge_{f_1,f_2\in\mathscr{F}} \bigwedge_{a_1,a_2\in\Gamma} \big(f_1(a_1) = f_1(a_2) \Leftrightarrow f_2(a_1) = f_2(a_2)\big). \tag{3}$$

La condition (3) signifie que les familles $\{f_1^{-1}(\{a\})\}_{a\in\Gamma}$ et $\{f_2^{-1}(\{a\})\}_{a\in\Gamma}$ sont identiques pour tout couple de fonctions f_1 et f_2 de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire que la famille $\{f^{-1}(\{a\})\}_{a\in\Gamma}$ ne dépend pas de la fonction f de $\mathscr{F}$.

On dit que la fonction $F(a, x)$: $\Gamma \times \mathcal{G} \to \Gamma$, où $\mathcal{G}$ est un groupe par rapport a l'operation "$\cdot$", est une solution de l'équation de translation si

$$\bigwedge_{a \in \Gamma} \bigwedge_{x, y \in \mathcal{G}} \big(F(F(a, x), y) = F(a, x \cdot y)\big). \tag{4}$$

Le problème posé plus haut pour la famille $\mathcal{F}$ est équivalent au suivant: quelle doit être la famille $\mathcal{F}$ pour qu'il existe un groupe $\mathcal{G}$, une solution F: $\Gamma \times \mathcal{G} \to \Gamma$ de l'équation de translation tels que pour chaque f de $\mathcal{F}$ il existe un element x_f de $\mathcal{G}$ tel que $f(a) = F(a, x_f)$ pour chaque a de Γ?

Pour démontrer cette équivalence remarquons d'abord que si la famille $\mathcal{F}$ des fonctions $\Gamma \to \Gamma$ forme un groupe par rapport a la superposition, alors en posant $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, "$\cdot$" = "$\circ$", $F(a, x) = x(a)$, nous avons (4) et $F(a, f) = f(a)$ pour chaque f de $\mathcal{F}$. Inversement, chaque solution F de l'équation de translation nous donne un homomorphisme $H(x)$: $x \to F(\cdot, x)$ du groupe $\mathcal{G}$ sur un groupe de fonctions $F(\cdot, x)$: $\Gamma \to \Gamma$ par rapport à la superposition. Ce groupe de fonctions constitue notre famille $\mathcal{F}$.

On sait ([1]) que chaque fonction F qui remplit (4) est de la forme

$$F(a, x) = g_k^{-1}\big(g_k(g(a))\, x\big) \quad \text{où } g(a) \in \Gamma_k, \tag{5}$$

où

$$g\colon \Gamma \to \Gamma \text{ est une fonction telle que } g(g(a)) = g(a), \tag{6}$$

$$g_k\colon \Gamma_k \to \mathcal{G}/\mathcal{G}_k \text{ est une bijection de l'ensemble } \Gamma_k \tag{7}$$

sur la famille des classes d'équivalence à droite du groupe $\mathcal{G}$ par rapport au sousgroupe $\mathcal{G}_k$, $g(\Gamma) = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k$ est une décomposition de l'ensemble $g(\Gamma)$ en ensembles non vides, disjoints et tels que pour chaque k de K il existe un sous-groupe $\mathcal{G}_k$ du groupe $\mathcal{G}$ tel que l'indice de G_k est égal à la puissance $\overline{\overline{\Gamma}}_k$ de l'ensemble Γ_k.

Nous pouvons à présent démontrer le théorème. Supposons d'abord que la famille $\mathcal{F}$ des fonctions $\Gamma \to \Gamma$ forme un groupe par rapport à la superposition. Dans ce cas il existe un groupe $\mathcal{G}$ et une solution F de l'équation de translation sur $\Gamma \times \mathcal{G}$ tels que chaque fonction f de $\mathcal{F}$ est de la forme $f(a) = F(a, x_0)$, où F est de la forme (5) et x_0 est un élément arbitraire $\mathcal{G}$. Nous tirons de la

$$g_k\big(g(a)\big) \cdot x_0 = g_k\big(f(a)\big) \quad \text{où } g(a) \in \Gamma_k. \tag{8}$$

Le premier membre de cette relation est defini pour chaque a de Γ, il

---

([1]) Z. Moszner, *Structure de l'automate plein, reduit et inversible*, Aeq. Math. 9 (1973), p. 46-59.

en est donc de même pour le membre second. Puisque la reunion des domaines des fonctions g_k est égale à $\bigcup_{k\in K} \Gamma_k = g(\Gamma)$, nous avons $f(a) \in g(\Gamma)$ pour chaque a de Γ. Si a parcourt l'ensemble Γ tout entier, le premier membre de (8) parcourt l'ensemble $\bigcup_{k\in K} \mathscr{G}/\mathscr{G}_k$. Il en résulte, puisque g_k sont des bijections, que $f(a)$ doit parcourir l'ensemble $g(\Gamma)$ tout entier. Nous avons donc $f(\Gamma) = g(\Gamma)$, pour chaque $f(a) = F(a, x_0)$.

D'après (8) nous avons l'équivalence suivante

$$(9) \qquad \bigwedge_{a_1, a_2 \in \Gamma} \big(f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow g(a_1) = g(a_2)\big).$$

D'après (6) la fonction $g(a) = a$ sur $a \in g(\Gamma) = f(\Gamma)$. De là il résulte que si $f(a_1) \neq f(a_2)$, on a $g\big(f(a_1)\big) = f(a_1) \neq f(a_2) = g\big(f(a_2)\big)$ et d'après (9): $f\big(f(a_1)\big) \neq f\big(f(a_2)\big)$. La fonction f est donc une injection sur $f(\Gamma)$. De plus, d'après (6), $g\big(g(a)\big) = g(a)$, donc en vertu de (9): $f\big(g(a)\big) = f(a)$. Puisque $g(\Gamma) = f(\Gamma)$, il existe un élément $\bar{a}$ de Γ tel que $f(\bar{a}) = g(a)$. Nous avons donc $f\big(f(\bar{a})\big) = f(a)$, donc la fonction f transforme l'ensemble $f(\Gamma)$ sur cet ensemble. La fonction f est ainsi une bijection sur *sam* son contre-domaine. D'après (9) nous avons évidemment (3), c.q.f.d.

Il est remarquable que la famille $\mathscr{F}^*$ de toutes les fonctions qui ont comme contre-domaine l'ensemble E, qui sont des bijections sur E et pour lesquelles a lieu (3), forme un groupe par rapport a la superposition. En effet, l'élément neutre est la fonction de $\mathscr{F}$ pour laquelle $\bar{g}(a) = a$ sur E, l'élément inverse de g de $\mathscr{F}$ est donné par la fonction $g^{-1}\big(\bar{g}(a)\big)$, où g^{-1} désigne la fonction inverse de g sur E.

Il résulte de là et du théorème démontré que la *fonction f: $\Gamma \to \Gamma$ est un élément d'une famille $\mathscr{F}$ de fonctions $\Gamma \to \Gamma$ qui est un groupe par rapport a la superposition si et seulement si f est une bijection sur son contre-domaine.*

Pour démontrer que cette condition est suffisante il suffit de prendre pour $\mathscr{F}$ la famille de toutes les fonctions $\Gamma \to \Gamma$ qui ont la même contre-domaine E que la fonction f, qui sont des bijections sur E et pour lesquelles

$$\bigwedge_{g\in\mathscr{F}} \bigwedge_{a_1, a_2 \in \Gamma} \big(f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow g(a_1) = g(a_2)\big).$$

Il est évident que la famille $\mathscr{F}$ des fonctions $\Gamma \to \Gamma$ ne doit pas nécessairement être égale à la famille $\mathscr{F}^*$ mentionnée plus haut pour former un groupe par rapport a la superposition: par exemple, le groupe des transformations affines du plan n'est pas égal au groupe de toutes les transformations du plan.

Remarque complementaire. M. S. Serafin a démontré le théorème plus haut sans la théorie de l'équation de translation, en montrant de plus qu'on ne doit pas supposer dans ce théorème que f transforme l'ensemble Γ à lui-même, il suffit de considerer la fonction $f\colon A \to B$, où A et B sont des ensembles arbitraires. Inclusion $B \subset A$ est ici déjà une conclusion.

Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1976