ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

Sur une généralisation de quelques théorèmes de M. Biernacki sur les fonctions analytiques

par A. Bielecki et Z. Lewandowski (Lublin)

1. Admettons que deux fonctions complexes

(1) $$F(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

et

(2) $$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots, \qquad a_n \text{ réel, positif},$$

soient holomorphes dans le cercle $C_\varrho = \{z\colon |z| < \varrho\}$, où $\varrho > 0$.

La fonction F sera appelée *majorante de la fonction f dans C_ϱ*, ce que nous écrirons $f \prec_\varrho F$, s'il existe une troisième fonction $g(z)$, holomorphe dans C_ϱ et telle que l'on ait

(3) $$|g(z)| < \varrho \quad \text{pour} \quad |z| < \varrho$$

et

(4) $$f(z) = F(g(z)) \quad \text{pour} \quad |z| < \varrho .$$

Il est bien évident que dans ce cas

(5) $$g(z) = a_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \dots, \quad \text{pour} \quad |z| < \varrho .$$

La fonction f sera dite *majorée en module par la fonction F dans C_ϱ* si l'on a $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour tout $z \in C_\varrho$, ce que nous noterons $|f| \prec_\varrho |F|$.

Dans le cas où F est une fonction univalente dans C_ϱ la condition $f \prec_\varrho F$ s'interprète tout simplement comme l'inclusion suivante des images du cercle C_ϱ:

(6) $$f(C_\varrho) \subset F(C_\varrho) .$$

Inversement, si l'on admet la condition (6), la fonction étant toujours univalente [1], il suffit de poser $g(z) = F^{-1}(f(z))$ pour obtenir les relations (3) et (4).

---

[1] Bien entendu, dans le cas général où la fonction $F(z)$ n'est plus supposée univalente, on peut encore se servir de l'inclusion (6), à condition de l'interpréter d'une manière convenable, notamment comme inclusion de domaines sur une surface de Riemann.

2. M. Biernacki a été le premier à attirer l'attention des mathématiciens sur les relations entre les deux types de majoration que nous venons de mentionner. Il a démontré, en 1935, [2], p. 256 (voir aussi [3]), que si les fonctions F et f sont univalentes dans C_1 (donc $n = 1 = \varrho$) et $f \prec_1 F$, on a toujours $|f| \prec_r |F|$, où r est le nombre réel bien déterminé par les conditions suivantes:

$$\ln\frac{1+r}{1-r}+2\operatorname{arc\,tg} r=\frac{\pi}{2}, \qquad 0<r<1 . \tag{7}$$

On en tire l'évaluation numérique $r = 0{,}390\ldots$ En plus, M. Biernacki a prouvé, par un exemple convenable, que ce nombre est le plus grand possible dans ces conditions. Il a encore obtenu deux autres théorèmes tout à fait analogues, concernant deux classes de fonctions, plus étroites que celle des fonctions univalentes, notamment les fonctions étoilées et les fonctions convexes. Dans ces deux cas on doit remplacer le nombre r respectivement par des nombres plus grands r^* et r^c, qui ont été définis moyennant les équations

$$4\operatorname{arc\,tg} r^* = \pi/2 , \qquad 0<r^*<1 \tag{7*}$$

et

$$\arcsin r^c + 2\operatorname{arc\,tg} r^c = \pi/2 , \qquad 0<r^c<1 , \tag{7c}$$

qui conduisent aux évaluations $r^* = \sqrt{2}-1 = 0{,}41\ldots$ et $r^c = 0{,}54\ldots$; ces rayons sont aussi optimaux dans les classes des fonctions envisagées; cf. [2], p. 356.

L'analogie frappante entre ces théorèmes de M. Biernacki suggère l'idée de poser le problème d'une manière plus générale en faisant abstraction de la structure particulière des classes de fonctions envisagées. La méthode élémentaire que nous exposerons dans la suite permettra d'affaiblir un peu les hypothèses qui avaient été admises dans les cas étudiés par M. Biernacki. Indépendamment de cela, la portée de notre méthode est plus grande, car elle s'applique toujours lorsque l'on connaît déjà une limitation de l'expression $|\arg\{zF'(z)/F(z)\}|$ pour les fonctions F appartenant à la classe considérée. En particulier nous obtiendrons une généralisation d'un théorème énoncé sans démonstration dans [1], p. 53.

3. Admettons que $\omega(t)$ désigne une fonction réelle définie pour $t \in \langle 0,1\rangle$, non négative et non décroissante, inférieurement continue mais non nécessairement finie, et satisfaisant à la condition $\omega(0) = 0$. Nous faisons correspondre à toute fonction $\omega(t)$ de telle sorte un nombre réel $r[\omega]$, bien déterminé par la formule

$$r[\omega] = \inf\{x\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ \omega(x)+2\operatorname{arc\,tg} x \geqslant \pi/2\} . \tag{8}$$

Evidemment on a $0 \leqslant r[\omega] \leqslant 1$ et

$$\omega(x)+2\operatorname{arc\,tg} x<\pi/2 \quad \text{pour} \quad x\in(0, r[\omega]) , \quad \text{si} \quad r[\omega]>0 . \tag{9}$$

Lorsque $\omega(t)$ est une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$, le nombre $r[\omega]$ est la racine unique de l'équation

$$(10) \qquad \omega(x) + 2\,\mathrm{arctg}\,x = \pi/2 \quad \text{et} \quad r[\omega] > 0\,.$$

Désignons encore par $S_{[\omega]}$ l'ensemble de toutes les fonctions de la forme (1), holomorphes dans C_1 et telles que

$$(11) \qquad |\arg\{zF'(z)/F(z)\}| \leqslant \omega(r) \quad \text{pour} \quad |z| \leqslant r < 1\,.$$

Les limitations du type (11) sont bien connues pour diverses classes de fonctions holomorphes. On a par exemple

$$(12) \qquad \begin{array}{ll} \omega(r) = \ln(1+r) - \ln(1-r) & \text{pour } F \in S \text{ (univalentes)}\,, \\ \omega(r) = 2\,\mathrm{arctg}\,r & \text{pour } F \in S^* \text{ (étoilées)}\,, \\ \omega(r) = \arcsin r & \text{pour } F \in S^c \text{ (convexes)}\,, \\ \omega(r) = \arcsin \dfrac{2r}{1 + r^2 + \dfrac{a}{1-a}(1-r^2)} & \text{pour } F \in S_a \text{ (a-étoilées)}\,, \end{array}$$

voir [4], p. 142, [1], p. 46.

On peut aussi considérer les limitations du type (11) d'un point de vue un peu différent. Supposons donnée une classe $\mathcal{F}$ de fonctions de la forme (1), holomorphes dans C_1. Or nous pouvons admettre que

$$(13) \qquad \omega(r) = \sup_{F \in \mathcal{F}} \{\sup_{|z|<r} |\arg(zF'(z)/F(z))|\}\,,$$

où l'on pose toujours $\arg 0 = \infty$, et $\arg \infty = \infty$. On constate sans peine (nous omettons la démonstration qui est bien facile) que la fonction $\omega(r)$, définie par la formule (13), jouit de toutes propriétés postulées au début de ce N°. Par suite, le théorème que nous allons énoncer au N° suivant s'applique, en principe, à toute classe $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes dans C_1 et satisfaisant aux conditions $F(0) = 0$, $F(0) = 1$.

Arrêtons-nous pour un instant au cas plus particulier où $\mathcal{F} \subset S$ et où l'on sait que l'ensemble des valeurs de l'expression $zF'(z)/F(z)$, pour $F \in \mathcal{F}$ et $|z| < 1$ est contenu dans un domaine E, donné dans le plan de la variable complexe et contenant le point 1. Or, désignons par $H(z)$ une fonction holomorphe dans C_0, telle que $H(C_1) = E$ et $H(0) = 1$. Il est visible que la fonction

$$(14) \qquad \omega(r) = \sup_{|z|<r} |\arg H(z)|$$

remplit les hypothèses précédentes et que, en outre, chaque fonction $F \in \mathcal{F}$ satisfait à l'inégalité (11). Dans certains cas simples on parvient ainsi à des limitations effectives, comme par exemple les inégalités (12).

4. THÉORÈME. *Si* $F(z) \in S_{[\omega]}$, *si* $f(z) = a_n z^n + a_{n+1}z^{n+1} + \ldots$, $a_n > 0$, *est une fonction holomorphe dans* C_1 *et* $f(z) \neq 0$ *pour* $z \neq 0$, $z \in C_1$, *et si* $f(z) \prec_1 F(z)$, *alors*

$$|f(z)| \prec_{r[\omega]} |F(z^n)| , \tag{15}$$

où $r[\omega]$ *est la constante définie au* N° 3, *formule* (8).

En effet, les hypothèses du théorème étant supposées remplies, il existe une fonction $g(z)$ holomorphe dans C_1 et satisfaisant aux conditions (3) et (4), où $\varrho = 1$, et on constate sans peine que

$$g(z) = z^n h(z) \tag{16}$$

où

$$h(z) = a_n + b_{n+1}z + b_{n+2}z^2 + \ldots \qquad (a_n > 0) , \tag{17}$$

est une fonction holomorphe dans C_1. Or, il résulte de (3), (15) et (16) que

$$|g(z)| \leqslant |z^n| \quad \text{et} \quad |h(z)| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad |z| < 1 , \tag{18}$$

cf. [4], p. 364. Mais, d'après l'hypothèse que $f(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$, on a $|h(z)| > 0$, donc $1/|h(z)| \geqslant 1$, d'où la limitation (cf. [4], p. 372)

$$|\arg \ln \{1/h(z)\}| \leqslant 2 \operatorname{arctg} |z| \quad \text{pour} \quad |z| < 1 . \tag{19}$$

Ceci étant, admettons que

$$\gamma(z, t) = z^n [h(z)]^{1-t} = z^n \exp\{(1-t)\ln h(z)\} , \tag{20}$$

pour $z \in C_1$ et $t \in \langle 0, 1\rangle$, où l'on prend la branche du logarithme qui s'annule au point 1. La fonction $\gamma(z, t)$ est évidemment holomorphe dans C_1 pour tout $t \in \langle 0, 1\rangle$ fixé, et

$$|\gamma(z, t)| \leqslant |z^n| \leqslant |z| . \tag{21}$$

Enfin posons

$$\Phi(z, t) = F\big(\gamma(z, t)\big) \quad \text{pour} \quad z \in C_1 , \quad t \in \langle 0, 1\rangle . \tag{22}$$

En vertu de (21), (19), (20), (11) et (18) on a

$$|\arg\{\Phi_t'(z, t)/\Phi(z, t)\}| \leqslant \Big|\arg\big\{\gamma(z, t)F'\big(\gamma(z, t)\big)\big/F\big(\gamma(z, t)\big)\big\}\Big| + \\ + \Big|\arg \ln\big(1/h(z)\big)\Big| \leqslant \omega(r) + 2\operatorname{arctg} r \quad \text{pour} \quad |z| < r ,$$

d'où

$$|\arg\{\Phi_t'(z, t)/\Phi(z, t)\}| \leqslant \pi/2 \quad \text{pour} \quad |z| \in C_{r[\omega]} \text{ (}^2\text{)}$$

(²) Le sens géométrique de cette inégalité est tel que, pour z fixé, le point $\Phi(z, t)$ s'éloigne de l'origine lorsque t augmente.

et par conséquent, la fonction $\Phi(z, t)$ croît avec t pour $z \in C_{r[\omega]}$ (cf. [1], p. 47). Donc $|f(z)| = |\Phi(z, 0)| \leqslant |\Phi(z, 1)| = |F(z^n)|$ pour $z \in C_{r[\omega]}$ ce qui achève notre démonstration.

5. Corollaires. Posons $n = 1$ dans notre théorème. La relation (15) prendra la forme plus simple

$$|f(z)| \prec_{r[\omega]} |F(z)| \tag{15,1}$$

et dans les cas où $F \in S$, S^*, S^c, les formules (15,1) et (12) donneront des généralisations des théorèmes de M. Biernacki mentionnés plus haut [2]. Les exemples construits par lui montrent bien que les constantes r, r^*, et r ne peuvent pas être remplacées par des nombres plus grands, même dans les cas où les fonctions majorées $f(z)$ sont assujetties à la condition d'appartenir à la même classe que les fonctions $F(z)$ correspondantes.

Pour la classe S_a des fonctions F de la forme (1) et a-étoilées, c'est-à-dire telles que $\operatorname{re}\{zF'(z)/F(z)\} > a$, $a \in \langle 0, 1)$ pour $z \in C_1$ (voir [1], p. 46) on obtient pareillement le résultat suivant:

Si $F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots$ est une fonction univalente, a-étoilée dans C_1, si $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, où $a_1 > 0$, telle que $f(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$ et si $f(z) \prec_1 F(z)$, alors $|f(z)| \prec_{r_a} |F(z)|$ où

$$\arcsin \frac{2r}{1 + r_a^2 + \dfrac{a}{1-a}(1 - r_a^2)} + 2 \operatorname{arctg} r_a = \pi/2$$

et le nombre r_a est le plus grand possible, ce qui résulte d'un exemple donné dans la note que nous venons de citer (p. 52).

Abstraction faite de ces cas particuliers, le problème général reste encore ouvert de savoir si la constante $r[\omega]$, figurant dans notre théorème du N° 4, est toujours la plus grande possible. A cet effet on devrait donner une méthode suffisamment générale pour construire des exemples convenables, ce qui ne semble pas facile. Un autre problème qui s'impose consisterait à chercher, pour une classe $S_{[\omega]}$ et un entier positif n, un nombre $\varrho_n[\omega]$ tel que l'on ait toujours $|f(z)| \prec_{\varrho_n[\omega]} |F(z)|$ dans les hypothèses de notre théorème.

Dans une autre note (en préparation) nous nous proposons de présenter quelques résultats concernant le problème inverse: trouver, pour une fonction $\omega(t)$ donnée, une constante $R_{[\omega]}$ telle que l'on ait $f(z) \prec_{R[\omega]} F(z)$ lorsque $F(z) = z + A_1 z^2 + \ldots \in S_{[\omega]}$, $P(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \in S_{[\omega]}$, où $a_1 > 0$, et $|f(z)| \prec_1 |F(z)|$. Les problèmes de ce type ont été posés par Z. Lewandowski [5] et [6] dans les cas où la fonction majorante $F(z)$ est supposée univalente ou bien étoilée, tandis que la fonction $f(z)$ est seulement holomorphe pour $z \in C_1$, les deux fonctions étant normées par les conditions $f(0) = F(0) = 0$, $F'(0) \geqslant 0$ (cf. aussi [1], p. 53).

Travaux cités

[1] A. Bielecki et Z. Lewandowski, *Sur des familles de fonctions α-étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), p. 45-55.

[2] M. Biernacki, *Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes*, C. R. Acad. Sci. Paris 201 (1935), p. 256-258.

[3] — *Sur les fonctions univalentes*, Mathematica (Cluj) 12 (1936), p. 49-64.

[4] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва-Ленинград 1952.

[5] Z. Lewandowski, *Sur les majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle* $|z| < 1$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), p. 5-11.

[6] — *Starlike majorants and subordination*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), p. 79-84.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 6. 7. 1961