ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Sur les intégrales non oscillatoires d'un système de trois équations différentielles linéaires

par Z. Butlewski (Poznań)

Introduction. Nous considérons dans cet article le système de trois équations différentielles linéaires

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ z' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \end{cases} \qquad \left(' = \frac{d}{dt}\right),
$$

où *les coefficients* a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 *sont les fonctions continues* de la variable réelle t pour $t_0 \leqslant t < \infty$.

Nous appelons une solution $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du système (I) *non oscillante,* si les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ n'ont pas des zéros pour les grandes valeurs de la variable t.

En suite nous considérons le système d'équations différentielles

$$
\text{(II)} \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = \alpha_1 x + \beta_1 y, \end{cases}
$$

où *les coefficients* α, β, α_1, β_1 *sont des fonctions continues* de la variable t pour $t_0 \leqslant t < \infty$.

Le système (II) est *non oscillant,* si pour toute solution $x(t)$, $y(t)$ les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ n'ont pas de zéros pour les grandes valeurs de la variable t.

Dans le § 1 je donne une démonstration simple du théorème bien connu [1] que le système (II) ne soit pas oscillant.

Nous obtenons (§ 2) des conditions suffisantes pour qu'une solution $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ du système (I) possède les propriétés suivantes

$$
\xi(t) > 0, \quad \eta(t) > 0, \quad \zeta(t) > 0,
$$
$$
\xi'(t) > 0, \quad \eta'(t) > 0, \quad \zeta'(t) > 0
$$

pour $t_0 \leqslant t < \infty$.

M. Švec [2] et B. A. Kondratiew [3] ont obtenus récemment des propriétés analogues pour une solution $\xi(t)$ de l'équation binome $x''' = A(t)x$.

En tenant compté de ces propriétés de l'inégrale ξ, η, ζ nous retrouvons des conditions suffisantes pour que tous les intégrales du système (I) soient non oscillantes.

Dans la suite (§ 3 et § 4) nous obtenons des conditions suffisantes pour que chacune de ces fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ soit différente de zéro pour les grandes valeurs de la variable t. En conséquence nous trouvons les conditions suffisantes pour que toute solution $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du système (I) soit non oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

Dans la démonstration nous appliquons les résultats du § 1 et un théorème de M. Potter [4].

En particulier nous aboutissons au résultat de M. Švec [2] obtenu récemment et concernant des solutions non oscillantes de l'équation différentielle binome, troisième ordre $x''' = A(t)x$. La méthode, que nous appliquons pour démontrer nos théorèmes III et IV ne diffère pas en essentiell de celle employée par Švec [2].

§ 1. Soit donné le système d'équations différentielles

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y\,, \\ y' &= \alpha_1 x + \beta_1 y\,, \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

où *les coefficients* α, β, α_1, β_1 *sont des fonctions continues* de la variable t pour $t_0 \leqslant t < \infty$.

On peut remplaçer le système (1.1) par le suivant

$$\left\{\begin{aligned} X' &= Y\beta \exp \int_{t_0}^{t} (\beta_1 - \alpha)\, dt \text{ (1)}, \\ Y' &= X\alpha_1 \exp \int_{t_0}^{t} (\alpha - \beta_1)\, dt\,, \end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

où

$$X = x \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \alpha\, dt\Big), \qquad Y = y \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} \beta_1\, dt\Big). \tag{1.3}$$

Nous allons démontrer le

THÉORÈME I. *Soit* $x(t)$, $y(t)$ *la solution* (*non triviale*) *du système* (1.1). *Si* $\alpha_1\beta \geqslant 0$ *et aucune des fonctions* α_1 *et* β *ne change pas de signe pour* $t_0 < t < \infty$ *alors, le produit* $x(t)\cdot y(t)$ *possède au plus un zéro dans l'intervalle* (t_0, ∞) *et par conséquent le système* (1.1) *est non oscillant.*

Démonstration. D'après (1.3) on a

$$XY = xy \exp\Big[-\int_{t_0}^{t} (\alpha + \beta_1)\, dt\Big]. \tag{1.4}$$

---

(1) $\exp u = e^u$.

En dérivant la relation (1.4) nous obtenons

$$(1.5)\qquad (XY)' = X^2 a_1 \exp\Big[\int_{t_0}^{t} (a-\beta_1)\,dt\Big] + Y^2 \beta \exp\Big[\int_{t_0}^{t} (\beta_1 - a)\,dt\Big].$$

On déduit de la formulè (1.5) que les deux cas sont possibles

$$(XY)' \geqslant 0, \quad \text{si} \quad a_1 \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0,$$
$$(XY)' \leqslant 0, \quad \text{si} \quad a_1 \leqslant 0, \quad \beta \leqslant 0.$$

Alors le produit XY est une fonction monotone pour $t_0 \leqslant t < \infty$ et en conséquent, il a au plus un zéro dans l'intervalle (t_0, ∞). Le système (1.1) est donc non oscillant.

Remarque. Si $a_1 \equiv 0$ et $\beta \equiv 0$ dans l'intervalle $[t_0, \infty)$, la solution $x(t)$, $y(t)$ est non oscillante et alors le système (1.1) est non oscillant.

§ 2. Nous considérons un système d'équations différentielles

$$(2.1)\qquad \begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ z' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \end{cases}$$

où *les coefficients* $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ *sont des fonctions continues* de la variable réelle t pour $t_0 \leqslant t < \infty$.

On suppose dans la suite que les coefficients satisfont les conditions suivantes

$$(2.2)\qquad \begin{array}{ll} b > 0, & c \geqslant 0, \\ a_1 \geqslant 0, & c_1 > 0, \\ a_2 > 0, & b_2 \geqslant 0, \end{array}$$

pour $t_0 \leqslant t < \infty$.

Théorème II. *Si les conditions* (2.2) *sont remplies et* $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ *est une solution du système* (2.1) *satisfaisante les conditions initiales*

$$\xi(t_0) > 0, \quad \eta(t_0) > 0, \quad \zeta(t_0) > 0;$$

on a les inégalités

$$\xi(t) > 0, \quad \eta(t) > 0, \quad \zeta(t) > 0 \quad (t_0 < t < \infty);$$

si de plus $a \geqslant 0$, $b_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$ *pour* $t_0 \leqslant t < \infty$, *il y a* $\xi'(t) > 0$, $\eta'(t) > 0$, $\zeta'(t) > 0$ *pour* $t_0 < t < \infty$.

Remarque. On peut remplaçer les hypothèses du théorème II par les suivantes (plus générales): $\xi(t_0) \geqslant 0$, $\eta(t_0) \geqslant 0$, $\zeta(t_0) \geqslant 0$, les coefficients du système (2.1) sont nonnégatives pour $t_0 \leqslant t < \infty$ et, en plus, au moins un des trois cas ou $b(t_0) > 0$, $\eta(t_0) > 0$, ou $c_1(t_0) > 0$, $\zeta(t_0) > 0$, ou bien $a_2(t_0) > 0$, $\xi(t_0) > 0$ est satisfait.

Démonstration. Nous remplaçons le système (2.1) par le suivant

$$\left\{\begin{aligned} X' &= BY+CZ,\\ Y' &= A_1X+C_1Z,\\ Z' &= A_2X+B_2Y,\end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

où posons

$$\begin{aligned} X &= x\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\Big],\\ Y &= y\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} b_1(t)\,dt\Big],\\ Z &= z\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} c_2(t)\,dt\Big].\end{aligned} \tag{2.4}$$

On peut exprimer les coefficients du système (2.3) par les mêmes du système (2.1).

Nous avons donc les relations

$$\begin{aligned} B &= b\exp\Big[\int_{t_0}^{t}(b_1-a)\,dt\Big], & C &= c\exp\Big[\int_{t_0}^{t}(c_2-a)\,dt\Big],\\ A_1 &= a_1\exp\Big[\int_{t_0}^{t}(a-b_1)\,dt\Big], & C_1 &= c_1\exp\Big[\int_{t_0}^{t}(c_2-b_1)\,dt\Big],\\ A_2 &= a_2\exp\Big[\int_{t_0}^{t}(a-c_2)\,dt\Big], & B_2 &= b_2\exp\Big[\int_{t_0}^{t}(b_1-c_2)\,dt\Big].\end{aligned} \tag{2.5}$$

Désignons par $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ une solution du système (2.3), où on a

$$\lambda=\xi\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} a\,dt\Big],\qquad \mu=\eta\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} b_1\,dt\Big],\qquad \nu=\zeta\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} c_2\,dt\Big] \tag{2.6}$$

et donc

$$\lambda(t_0)=\xi(t_0)>0,\qquad \mu(t_0)=\eta(t_0)>0,\qquad \nu(t_0)=\zeta(t_0)>0. \tag{2.7}$$

D'après (2.3) nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} \lambda' &= B\mu+C\nu,\\ \mu' &= A_1\lambda+C_1\nu,\\ \nu' &= A_2\lambda+B_2\mu.\end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

On déduit de (2.5) et (2.2) qu'il y a

$$\begin{matrix} B>0, & C\geqslant 0, & A_1\geqslant 0,\\ C_1>0, & A_2>0, & B_2\geqslant 0\end{matrix}\qquad (t_0\leqslant t<\infty). \tag{2.9}$$

En tenant compte de (2.8), (2.9) et (2.7) nous obtenons les inégalités $\lambda'(t_0)>0$, $\mu'(t_0)>0$, $\nu'(t_0)>0$.

Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$, qu'on a

$$\begin{aligned} \lambda(t) > 0, \quad \mu(t) > 0, \quad \nu(t) > 0, \\ \lambda'(t) > 0, \quad \mu'(t) > 0, \quad \nu'(t) > 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

dans l'intervalle $(t_0, t_0 + \varepsilon)$.

Les inégalités (2.10) sont satisfaites dans l'intervalle (t_0, ∞). En effet, si au contraire il y avait un premier point T_1 $(T_1 > t_0)$, où $\lambda'(T_1) = 0$, $\lambda(t) > 0$, $\mu(t) > 0$, $\nu(t) > 0$ dans l'intervalle $(t_0, T_1]$ et alors d'après (2.8) et (2.9) serait $\lambda'(T_1) > 0$, ce qui est en contradiction avec la définition du nombre T_1.

On peut faire des considérations analogues pour les fonctions $\mu(t)$ et $\nu(t)$. Il y a donc toujours $\lambda(t) > 0$, $\lambda'(t) > 0$, $\mu(t) > 0$, $\mu'(t) > 0$, $\nu(t) > 0$, $\nu'(t) > 0$ dans l'intervalle (t_0, ∞).

D'après les relations (2.6) et les inégalités (2.10) on a

$$\xi(t) > 0, \quad \eta(t) > 0, \quad \zeta(t) > 0 \quad (t_0 < t < \infty). \tag{2.11}$$

En dérivant les relations (2.6) nous obtenons

$$\lambda' = (\xi' - a\xi)\exp\left[-\int_{t_0}^{t} a\,dt\right], \qquad \mu' = (\eta' - b_1\eta)\exp\left[-\int_{t_0}^{t} b_1\,dt\right],$$

$$\nu' = (\zeta' - c_2\zeta)\exp\left[-\int_{t_0}^{t} c_2\,dt\right].$$

Selon (2.10), (2.11) et d'après les hypothèses du théorème II il vient $\xi' > a\xi \geqslant 0$, $\eta' > b_1\eta \geqslant 0$, $\zeta' > c_2\zeta \geqslant 0$ dans l'intervalle $[t_0, \infty)$. Le théorème II est donc démontré.

§ 3. Considérons le système des équations différentielles

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a_1x + b_1y + c_1z, \\ z' = a_2x + b_2y + c_2z, \end{cases} \tag{2.1a}$$

où *les fonctions* $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ *sont continues de la variable* t *pour* $t_0 \leqslant t < \infty$ *et* b, c, a_1, c_1, a_2, b_2 *dérivables dans* (t_0, ∞).

Posons

$$\begin{aligned} M &= a_1'c_1 - a_1c_1' + a_1c_1(a - c_2) + a_2c_1^2 - a_1^2c, \\ N &= bc' - b'c + bc(c_2 - b_1) + b^2c_1 - b_2c^2, \\ P &= a_2b_2' - a_2'b_2 + a_2b_2(b_1 - a) + a_2^2b - a_1b_2^2, \\ \Phi &= c\eta - c_1\xi, \\ \Psi &= b_2\xi - b\zeta, \\ X &= a_1\zeta - a_2\eta. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nous distinguons deux cas:

$$(3.2)\qquad \begin{array}{llll} \text{(I)} & M\Phi \geqslant 0, & N\Psi \geqslant 0, & P\chi \geqslant 0 \\ \text{(II)} & M\Phi < 0, & N\Psi < 0, & P\chi < 0 \end{array} \quad (t_0 \leqslant t).$$

Nous considérons plus bas (§ 3) le cas (I) et ensuite (§ 4) le cas (II). Dans le cas (I) les produits $M\Phi$, $N\Psi$ et $P\chi$ peuvent être identiquement égales à zéro dans l'intervalle $[t_0, \infty)$, ou dans un sousintervalle de cet intervalle. Nous allons démontrer le

THÉORÈME III. *Soit ξ, η, ζ une solution du système* (2.1a) *où $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$ pour $t_0 \leqslant t < \infty$.*

Désignons par x, y, z une solution quelconque (non triviale) du système (2.1a).

1° *Si $b \neq 0$, $N\Psi \geqslant 0$ et aucune des fonctions N et Ψ ne change pas de signe pour $t_0 \leqslant t < \infty$ alors, la fonction $x(t)$ possède au plus deux zéros dans l'intervalle $[t_0, \infty)$.*

2° *Si $c \neq 0$, $M\Phi \geqslant 0$ et aucune des fonctions M et Φ ne change pas de signe pour $t_0 \leqslant t < \infty$ alors, la fonction $y(t)$ possède au plus deux zéros dans l'intervalle $[t_0, \infty)$.*

3° *Si $a_2 \neq 0$, $P\chi \geqslant 0$ et aucune des fonctions P et χ ne change pas de signe pour $t_0 \leqslant t < \infty$ alors, la fonction $z(t)$ possède au plus deux zéros dans l'intervalle $[t_0, \infty)$.*

4° *Si les hypothèses 1°, 2° et 3° sont remplies, la solution $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ du système* (2.1a) *est non oscillante pour $t_0 \leqslant t < \infty$.*

Démonstration. Ad 1°. Considérons un système des équations différentielles

$$(2.3a)\qquad \begin{cases} X' = BY + CZ, \\ Y' = A_1 X + C_1 Z, \\ Z' = A_2 X + B_2 Y. \end{cases}$$

Nous remplaçons dans cet système les fonctions X, Y, Z par X_1, Y_1, Z_1 respectivement, définies par les formules

$$(3.3)\qquad X_1 = \lambda \int_{t_0}^{t} u\,dt, \qquad Y_1 = \mu \int_{t_0}^{t} u\,dt + v, \qquad Z_1 = \nu \int_{t_0}^{t} u\,dt + w,$$

où les fonctions λ, μ, ν satisfont les relations (2.6) et u, v, w sont des variables nouvelles.

D'après (3.3) et (2.3a) on obtient un système d'équations

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \lambda u = Bv + Cw, \\ v' + \mu u = C_1 w, \\ w' + \nu u = B_2 v. \end{cases}$$

L'elimination de la variable v conduit au système de deux équations différentielles

$$(3.5)\qquad \begin{cases} u' = \left(\dfrac{B_2 C}{B} + \dfrac{B'}{B} - \dfrac{2\lambda'}{\lambda}\right)u + \dfrac{N}{b\xi}\left(\exp\displaystyle\int_{t_0}^{t} c_2\,dt\right)w\,, \\ w' = \dfrac{\Psi}{b}\left[\exp\left(-\displaystyle\int_{t_0}^{t} c_2\,dt\right)\right]u - \dfrac{B_2 C}{B}w\,. \end{cases}$$

D'après les hypothèses du théorème III, 1° et les relations (2.5) on a $N\Psi \geqslant 0$ et $B \neq 0$ pour $t_0 \leqslant t < \infty$. En appliquent le théorème I au système (3.5) on déduit que cet système est non oscillant.

Si $u(t)$, $w(t)$ est une solution du système (3.5), toutes les deux de ces fonctions $u(t)$ et $v(t)$ possèdent au plus un zéro dans l'intervalle (t_0, ∞). Soient (u_1, w_1), (u_2, w_2) deux integrales linéairement indépendantes du système (3.5). Nous obtenons alors les trois intégrales linéairement indépendantes du système (2.3)

$$\begin{array}{lll} \lambda, & \lambda\displaystyle\int_{t_0}^{t} u_1\,dt, & \lambda\displaystyle\int_{t_0}^{t} u_2\,dt\,, \\ \mu, & \mu\displaystyle\int_{t_0}^{t} u_1\,dt + v_1, & \mu\displaystyle\int_{t_0}^{t} u_2\,dt + v_2\,, \\ \nu, & \nu\displaystyle\int_{t_0}^{t} u_1\,dt + w_1, & \nu\displaystyle\int_{t_0}^{t} u_2\,dt + w_2\,, \end{array}$$

où d'après (3.4) on a les relations

$$\lambda u_1 = Bv_1 + Cw_1\,, \qquad \lambda u_2 = Bv_2 + Cw_2\,.$$

Nous avons donc

$$X = \lambda\Gamma\,,$$

où

$$\Gamma = k_1 + k_2\int_{t_0}^{t} u_1\,dt + k_3\int_{t_0}^{t} u_2\,dt \qquad (k_1, k_2, k_3 = \text{const})\,.$$

En dérivant la fonction Γ nous obtenons

$$\Gamma' = k_2 u_1 + k_3 u_2 = u(t)\,.$$

La dérivée Γ' possède au plus un zéro dans l'intervalle (t_0, ∞) et par conséquent la fonction Γ possède au plus deux zéros pour (t_0, ∞). La fonction $X(t)$ a la même propriété. Finalement d'après (2.4) on déduit que la fonction $x(t)$ possède au plus deux zéros dans l'intervalle (t_0, ∞).

Les considérations sont analogues dans le cas des fonctions $y(t)$ et $z(t)$.

Ad 2°. Nous appliquons pour le système (2.3a) la transformation des variables en remplaçant X, Y, Z par X_2, Y_2, Z_2 respectivement, où

$$(3.7) \qquad X_2 = \lambda \int_{t_0}^{t} v\,dt + u, \qquad Y_2 = \mu \int_{t_0}^{t} v\,dt, \qquad Z_2 = \nu \int_{t_0}^{t} v\,dt + w\,.$$

Nous obtenons donc le système des équations

$$\begin{cases} u' + \lambda v = Cw\,, \\ \qquad \mu v = A_1 u + C_1 w\,, \\ w' + \nu v = A_2 u\,. \end{cases}$$

En eliminant la variable w, on obtient le système de deux équations différentielles

$$(3.8) \qquad \begin{cases} u' = -\dfrac{A_1 C}{C_1} u + \dfrac{\Phi}{c_1}\left[\exp\left(-\displaystyle\int_{t_0}^{t} a\,dt\right)\right] v\,, \\ v' = \dfrac{M}{c_1 \eta}\left(\exp \displaystyle\int_{t_0}^{t} a\,dt\right) u + \left(\dfrac{A_1 C}{C_1} + \dfrac{C_1'}{C_1} - 2\dfrac{\mu'}{\mu}\right) v\,. \end{cases}$$

Le raisonnement analogue comme dans le cas du système (3.5) conduit au résultat que la fonction $y(t)$ possède au plus deux zéros dans l'intervalle (t_0, ∞).

Ad 3°. Nous appliquons dans le système (2.3a) les substitutiones

$$(3.9) \qquad X_3 = \lambda \int_{t_0}^{t} w\,dt + u, \qquad Y_3 = \mu \int_{t_0}^{t} w\,dt + v, \qquad Z_3 = \nu \int_{t_0}^{t} w\,dt\,.$$

On obtient alors le système des équations suivantes

$$\begin{cases} u' + \lambda w = Bv\,, \\ v' + \mu w = A_1 u\,, \\ \qquad \nu w = A_2 u + B_2 v\,. \end{cases}$$

L'elimination de u conduit au système d'équations différentielles

$$(3.10) \qquad \begin{cases} v' = -\dfrac{A_1 B_2}{A_2} v + \dfrac{\chi}{a_2}\left[\exp\left(-\displaystyle\int_{t_0}^{t} b_1\,dt\right)\right] w\,, \\ w' = \dfrac{P}{a_2 \zeta}\left(\exp \displaystyle\int_{t_0}^{t} b_1\,dt\right) v + \left(\dfrac{A_1 B_2}{A_2} + \dfrac{A_2'}{A_2} - 2\dfrac{\nu'}{\nu}\right) w\,. \end{cases}$$

En appliquant le même raisonnement que plus haut dans le cas du système (3.5) nous arrivons à la conclusion que la fonction $z(t)$ possède au plus deux zéros dans l'intervalle (t_0, ∞).

Si les hypothèses 1°, 2°, et 3° sont remplies, chacune de ces fonctions x, y, z n'a pas de zéros pour le grandes valeurs de la variable t et en conséquent toute intégrale x, y, z du système (2.1a) est non oscillante. Le théorème III est donc démontré.

Remarque. On peut la dérivée $\Phi'(t)$ exprimer par la formule

$$\Phi'(t) = (a_1c - ac_1 - c_1')\xi + (b_1c - bc_1 + c')\eta .$$

Nous pouvons alors remplaçer l'inégalité $M\Phi \geqslant 0$ par les conditions suivantes: ou

$$M(t) \geqslant 0, \quad \Phi(t_0) \geqslant 0, \quad \Phi'(t) \geqslant 0$$

ou $(t_0 < t < \infty)$

$$M(t) \leqslant 0, \quad \Phi(t_0) \leqslant 0, \quad \Phi'(t) \leqslant 0 .$$

Nous avons aussi

$$\Psi'(t) = (ab_2 - a_2b + b_2')\xi + (b_2c - bc_2 - b')\zeta .$$

On peut remplaçer l'inégalité $N\Psi \geqslant 0$ par les conditions: ou

$$N(t) \geqslant 0, \quad \Psi(t_0) \geqslant 0, \quad \Psi'(t) \geqslant 0$$

ou $(t_0 < t < \infty)$

$$N(t) \leqslant 0, \quad \Psi(t_0) \leqslant 0, \quad \Psi'(t) \leqslant 0 .$$

Il y a

$$\chi'(t) = (a_1b_2 - a_2b_1 - a_2')\eta + (a_1c_2 - a_2c_1 + a_1')\zeta .$$

Or, nous pouvons remplaçer l'inégalité $P\chi \geqslant 0$ par les conditions: ou

$$P(t) \geqslant 0, \quad \chi(t_0) \geqslant 0, \quad \chi'(t) \geqslant 0$$

ou $(t_0 < t < \infty)$.

$$P(t) \leqslant 0, \quad \chi(t_0) \leqslant 0, \quad \chi'(t) \leqslant 0 .$$

§ 4. Cas II. Nous allons étudier les intégrales du système

$$\text{(2.1a)} \qquad \begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a_1x + b_1y + c_1z, \\ z' = a_2x + b_2y + c_2z, \end{cases}$$

dans le cas II, c'est à dire si on a

$$\text{(3.2)} \qquad \text{(II)} \quad M\Phi < 0, \quad N\Psi < 0, \quad P\chi < 0 \quad (t_0 \leqslant t < \infty) .$$

Soit ξ, η, ζ une intégrale du système (2.1a). Supposons que les inégalités $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$ sont satisfaites pour $0 < t_0 \leqslant t < \infty$. R. L. Potter [4] a démontré recemment le théorème suivant: *Si $r(t)$ et $p(t)$ sont des fonctions de classe C^1, $r(t) > 0$, $p(t) \geqslant 0$ pour $0 < t_0 < t$ et de plus on a*

$$\text{(4.1)} \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r(t)} = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} r(t)\frac{d}{dt}[r(t)p(t)]^{-1/2} = L > 2 ,$$

l'équation différentielle

$$[r(t)y']' + p(t)y = 0 \tag{4.2}$$

est non oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

Remarque. On peut appliquer d'autres conditions pour que l'équation (4.2) soit non oscillante, par exemple celles de M. E. Hille [5].

Nous remplaçons le système (3.5) par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{b^2}{\xi}\cdot\frac{F}{N}\frac{dU}{dt}\right] - \frac{\Psi}{\xi^2}FU = 0\,, \tag{4.3}$$

où

$$\begin{aligned} F &= \exp\int_{t_0}^{t}\left(a + b_1 - c_2 + 2\frac{b_2 c}{b}\right)dt\,,\\ U &= u\frac{b(t_0)}{b(t)}\cdot\frac{\xi^2(t)}{\xi^2(t_0)}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\left(a + b_1 + \frac{b_2 c}{b}\right)dt\right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

D'après la relation (4.4) on déduit que les fonctions $u(t)$ et $U(t)$ sont de même signe.

Nous allons retrouver des conditions pour que l'équation (4.3) soit non oscillante. Il suffit ici de considérer le cas $N > 0$, $\Psi < 0$ pour $0 < t_0 \leqslant t < \infty$. Soient remplies les hypothèses suivantes

$$\frac{b^2}{\xi}\cdot\frac{F}{N} \geqslant r, \quad 0 < -\frac{\Psi}{\xi^2}F \leqslant p \quad (0 < t_0 \leqslant t < \infty)\,. \tag{4.5}$$

En appliquant le théorème de comparaison des solutions de Sturm-Picone (comp. par exemple [1]), la non-oscillation de l'équation (4.2) conduit à la non-oscillation de l'équation (4.3). D'après le théorème de Potter cité plus haut, on déduit que l'équation (4.3) est non oscillante. Dans la suite nous appliquons des considérations analogues ainsi que dans le cas du système (3.5). Alors la fonction $x(t)$ est non oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

Exemple. Considérons maintenant l'équation du troisième ordre

$$x''' = A(t)x, \quad A(t) > 0 \quad (0 < t_0 \leqslant t < \infty)\,. \tag{4.6}$$

On peut remplaçer l'équation (4.6) par le système des équations différentielles

$$\begin{cases} x' = y\,,\\ y' = z\,,\\ z' = Ax\,. \end{cases} \tag{4.7}$$

D'après le théorème II une solution ξ, η, ζ du système (4.7) rempliessante les conditions initiales $\xi(t_0) > 0$, $\eta(t_0) > 0$, $\zeta(t_0) > 0$ est positive, c'est-à-dire $\xi(t) > 0$, $\eta(t) > 0$, $\zeta(t) > 0$ pour $0 < t_0 < t < \infty$ et de plus on a $\xi'(t) > 0$, $\eta'(t) > 0$, $\zeta'(t) > 0$ pour $0 < t_0 < t < \infty$.

Supposons que $0 < \lim_{t\to\infty} \zeta(t) = m < \infty$. L'équation (4.3) prend la forme

$$\left(\frac{1}{\xi} U'\right)' + \frac{\zeta}{\xi^2} U = 0, \qquad U = u \frac{\xi^2(t)}{\xi^2(t_0)}. \tag{4.8}$$

Pour comparer nous considérons l'équation différentielle

$$\left(\frac{1}{\xi} U'\right)' + \frac{m}{\xi^2} U = 0. \tag{4.9}$$

Dans ce cas nous posons $r = 1/\xi$, $p = m/\xi^2$ et d'après (4.1) on a

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \xi(t)\,dt = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\xi} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\xi} \cdot \frac{m}{\xi^2}\right]^{-1/2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2.$$

L'équation (4.9) est donc non oscillante et par conséquent l'équation (4.8) possède la même propriété. Toute solution $x(t)$ de l'équation (4.6) est donc non oscillante. Ce résultat a obtenu recemment M. Švec [2].

Dans le cas des fonctions $y(t)$ et $z(t)$ les considérations sont analoques.

Nous remplaçons le système (3.8) par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{c_1^2}{\eta} \cdot \frac{G}{M} \cdot \frac{dV}{dt}\right] - \frac{\Phi}{\eta^2} GV = 0, \tag{4.10}$$

où

$$\begin{aligned} G &= \exp \int_{t_0}^{t} \left(-a + b_1 + c_2 + 2\frac{a_1 c}{c_1}\right) dt, \\ V &= v \frac{c_1(t_0)}{c_1(t)} \cdot \frac{\eta^2(t)}{\eta^2(t_0)} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \left(-b_1 + c_2 + \frac{a_1 c}{c_1}\right) dt\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

On voit de la formule (4.11) que les fonctions $V(t)$ et $v(t)$ sont du même signe pour $t_0 < t < \infty$. Supposons qu'on a

$$\frac{c_1^2}{\eta} \cdot \frac{G}{M} \geqslant r > 0, \qquad 0 < -\frac{\Phi}{\eta^2} G \leqslant p \qquad (0 < t_0 < t < \infty). \tag{4.12}$$

D'après le théorème de M. Potter l'équation (4.10) est non oscillante. En tenant compte des relations (3.7) et (2.4), la fonction $y(t)$ est non oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

Nous remplaçons le système (3.10) par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{a_2^2}{\zeta} \cdot \frac{H}{P} \frac{dW}{dt}\right] - \frac{\chi}{\zeta^2} HW = 0, \tag{4.13}$$

où

$$
(4.14)\qquad
\begin{aligned}
H &= \exp\int_{t_0}^{t}\left(a-b_1+c_2+2\frac{a_1b_2}{a_2}\right)dt,\\
W &= w\frac{a_2(t_0)}{a_2(t)}\cdot\frac{\zeta^2(t)}{\zeta^2(t_0)}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\left(a+c_2+\frac{a_1b_2}{a_2}\right)dt\right].
\end{aligned}
$$

On voit de la formule (4.14) que les fonctions $W(t)$ et $w(t)$ sont du même signe dans l'intervalle (t_0, ∞). Soient remplies les inégalitées

$$
(4.15)\qquad \frac{a_2^2}{\zeta}\cdot\frac{H}{P}\geqslant r>0,\quad 0<-\frac{\chi}{\zeta^2}H\leqslant p\qquad (0<t_0<t<\infty).
$$

Selon le théorème de la comparaison des solutions et du théorème de M. Potter, l'équation (4.13) est non oscillante. En vertu des relations (3.9) et (2.4), la fonction $z(t)$ est non oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

En résumé nous pouvons énoncer la proposition suivante:

THÉORÈME IV. *Soit* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *la solution du système des équations différentielles* (2.1a). *Supposons que les conditions* (4.1) *sont remplies et de plus:*

1° *si les inégalités* (4.5) *sont satisfaites, la fonction* $x(t)$ *est non oscillante pour* $t>t_0$;

2° *si les inégalités* (4.12) *sont satisfaites, la fonction* $y(t)$ *est non oscillante pour* $t>t_0$;

3° *si les inégalités* (4.15) *sont satisfaites, la fonction* $z(t)$ *est non oscillante pour* $t>t_0$;

4° *toute solution* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *du système* (2.1a) *est non oscillante, si les hypothèses* 1°, 2° et 3° *sont remplies.*

Remarque. Les coefficients $r(t)$ et $p(t)$ dans le théorème de M. Potter dans chaque cas 1°, 2° et 3° pouvent être différentes.

Travaux cités

[1] Z. Butlewski, *O całkach rzeczywistych równań różniczkowych liniowych zwyczajnych*, Wiad. Mat. 44 (1937), p. 15.

[2] M. Švec, *Sur une propriété des intégrales de l'équation* $y^{(n)}+Q(x)y=0$, $n=3, 4$, Чехословацкий математический журнал, 7 (82) (1957), p. 456-458.

[3] В. А. Кондратьев, *О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвёртого порядка*, Труды Моск. матем. общества 8 (1959), p. 260.

[4] R. L. Potter, *On self-adjoint differential equations of second order*, Pacific J. Math. 3 (1953), p. 473.

[5] E. Hille, *Non-oscillation theorems*, Trans. Amer. Math. Soc. 64, (2) (1948), p. 245-252.

Reçu par la Rédaction le 12. 4. 1965