ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

Les propriétés des solutions non négatives de l'équation linéaire normale parabolique

par W. BODANKO (Częstochowa)

Introduction. Considérons l'équation

$$F(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u'_{x_i} + c(x,t)u - u'_t = 0 \tag{1}$$

dont les coefficients sont définis dans une couche $H = E_n \times (0, T)$.

Nous supposons que la forme $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j$ est définie positive pour $(x,t) \in H$.

D. Widder [8] a démontré que le problème de Cauchy pour l'équation

$$u'_t = u''_{xx}$$

admet dans la classe des fonctions non négatives une solution univoque.

J. Serrin [7] a étendu ce résultat à l'équation

$$u'_t = a(x)u''_{xx} + b(x)u'_x + c(x)u\ .$$

A. Friedman [2] a démontré ce théorème pour l'équation (1) dans le cas où:

1) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j \geqslant \mu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ pour $(x,t) \in H$ et $\mu = \text{const} > 0$.

2) Les fonctions a_{ij}, $(a_{ij})''_{x_i x_j}$, b_i, $(b_i)'_{x_i}$, c sont continues, bornées et satisfont à la condition de Hölder dans $\bar{H}$.

Enfin, sous les hypothèses de Friedman, M. Krzyżański [6] a obtenu des nouveaux théorèmes.

Dans la note présente nous démontrons que ses résultats sont vrais sous des hypothèses plus faibles.

§ 1. Définitions et théorèmes auxiliaires.

DÉFINITION 1. Une fonction $w(x,t)$, localement intégrable dans $\bar{H}$, s'appelle *dérivée généralisée* par rapport à x_i de la fonction $u(x,t)$ localement intégrable dans $\bar{H}$, si l'on a l'égalité

$$\int_{H}\left(w\Phi+u\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dx\,dt=0$$

pour chaque fonction $\Phi(x,t)$ de la classe C^1 dans $\bar{H}$, s'annulant en dehors d'un cylindre $D\subset\bar{H}$.

DÉFINITION 2. Nous disons que les coefficients de l'équation (1), satisfont à la condition (W) si:

a) Les fonctions a_{ij}, b_i, sont continues et bornées dans $\bar{H}$.

b) La fonction $c(x,t)$ est continue dans $\bar{H}$, localement hölderienne par rapport à x et satisfait à l'inégalité

$$-M\leqslant c(x,t)\leqslant N(r^2+1)\qquad\text{pour}\qquad(x,t)\in H\,.$$

c) $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\geqslant\bar{\mu}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ pour $(x,t)\in H$ et $\bar{\mu}=\text{const}>0$ et pour tout vecteur $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

d)
$$|a_{ij}(x',t')-a_{ij}(x,t)|\leqslant K(|x'-x|^{\lambda}+|t'-t|^{\lambda}),$$
$$|b_i(x',t)-b_i(x,t)|\leqslant K(|x'-x|^{\lambda})\,,$$

$K>0$, $0<\lambda\leqslant 1$, $i,j=1,\dots,n$, $|x|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$.

DÉFINITION 3. Nous disons que la fonction $f(x,t)$ est *régulière* dans $\bar{H}$ si elle admet des dérivées $f'_{x_i}, f''_{x_ix_j}, f'_t$ $(i,j=1,\dots,n)$ continues dans H et si elle est continue dans $\bar{H}$.

D'après [3] et [5] on peut démontrer que si les coefficients de l'équation (1) satisfont à la condition (W), il existe une solution fondamentale $U(x,t,y,s)$ de l'équation (1) déterminée dans le domaine

$$S(W)=\{x,y\in E_n\,,\ 0\leqslant s<t\leqslant T\,,\ t-s<T(W)\}\,,$$

la constante $T(W)$ dépendant de a_{ij}, b_i, c.

LEMME 1. *Si les coefficients de l'équation* (1) *satisfont à la condition* (W) *et si la fonction* $u(x,t)$ *est une solution non négative et régulière dans* $\bar{H}$, *de l'équation* (1), *alors*

$$(2)\qquad \int_{E_n}U(x,t,y,s)u(y,s)dy\leqslant u(x,t)\quad\textit{pour}\quad t-s<T(W)\,,\ 0<t<T\,.$$

Démonstration. Soit $R > 0$ et $\gamma(x)$ une fonction telle que

a) $$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad |x| \leqslant R\,, \\ 0 & \text{pour} \quad |x| \geqslant R+1\,, \end{cases}$$

b) $\gamma(x)$ est une fonction continue et $0 \leqslant \gamma(x) \leqslant 1$ dans E_n.

La fonction

$$w(x,t) = \int_{E_n} U(x,t,y,s)u(y,s)\gamma(y)dy\,, \qquad t-s < T(W),$$

est la solution de l'équation (1) et

1) $\lim\limits_{t\to s} w(x,t) = u(x,s)\gamma(x) \leqslant u(x,s)$ pour $x \in E_n$,

2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x,t) = 0$ uniformémént pour $t \in \langle 0, T\rangle$.

Introduisons une fonction $H(x,t)$ de classe C^2 dans $\bar{H}$, jouissant des propriétés suivantes [4]:

a) $H(x,t) \geqslant 1$ pour $(x,t) \in H$,

b) $F(H)/H < 0$.

La fonction $v(x,t) = \big(u(x,t) - w(x,t)\big)/H(x,t)$ est une solution de l'équation

(3) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)v''_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i(x,t)v'_{x_i} + \bar{c}(x,t)v - v'_t = 0,$$

où $\bar{c} = F(H)/H < 0$ et $v(x,s) \geqslant 0$.

Soit $(\bar{x},\bar{t})$ un point quelconque de

$$W_s = \{x \in E_n,\ 0 < t-s < T(W)\,,\ 0 < t < T\}$$

et $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire.

Nous choisissons un nombre $\bar{R} > 0$ de façon que l'on ait $w(x,t) < \varepsilon$ pour $|x| > \bar{R}$, et $|\bar{x}| < \bar{R}$.

D'après le principe de l'extrémum on a

$$v(\bar{x},\bar{t}) \geqslant -\varepsilon\,.$$

Le nombre ε étant arbitraire, on a $v(\bar{x},\bar{t}) \geqslant 0$.

Nous avons ainsi démontré que

$$\int_{|x|\leqslant R} U(x,t,y,s)u(y,s)dy \leqslant u(x,t) \qquad \text{pour} \qquad t-s < T(W)\,,\ 0 < t < T\,.$$

Si $R \to \infty$ on a (2).

LEMME 2. *Nous supposons que les coefficients de l'équation* (1) *satisfont à la condition* (W). *Alors pour chaque* $\varepsilon > 0$ *on peut choisir des nombres positifs* $\alpha(\varepsilon)$ *et* $\beta(\varepsilon)$ *tels que*

(4) $$\alpha(\varepsilon)\exp\{-\beta(\varepsilon)|x-y|^2\} \leqslant U(x,t,y,s) \qquad \textit{pour} \qquad \varepsilon \leqslant t-s < T(W)\,.$$

Démonstration. Soit $\bar{U}(x, t, y, s)$ une solution fondamentale de l'équation

$$(5) \qquad \bar{F}(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) u'_{x_i} + (-M) u - u'_t = 0 .$$

Introduisons la fonction [1]

$$V(x, t, y, s) = \exp\left\{- \frac{\mu_0 |x-y|^2 - \nu_0}{t-s-\varepsilon/2}\right\},$$

(y, s) étant un point arbitraire de H.

On peut choisir les nombres μ_0 et ν_0 de sorte que l'on ait

$$(6) \qquad \bar{F}(V) \geqslant 0$$

pour $(x, t) \in H_s = \{x \in E_n,\ \varepsilon/2 < t-s < T(W),\ 0 < t \leqslant T\}$.

En effet,

$$\bar{F}(V) = \frac{V}{(t-s-\varepsilon/2)^2}\Big\{4\mu_0^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\mu_0(t-s-\varepsilon/2) \sum_{i=1}^{n} a_{ii} -$$

$$- 2\mu_0(t-s-\varepsilon/2) \sum_{i=1}^{n} b_i(x_i - y_i) - M(t-s-\varepsilon/2)^2 - \mu_0|x-y|^2 + \nu_0\Big\}.$$

D'après la condition (W) il existe des nombres $\bar{A}, \bar{B}$ tels que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \leqslant \bar{A}, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i(x_i - y_i) \leqslant \bar{B}(1 + |x-y|^2).$$

Ensuite

$$\bar{F}(V) \geqslant \frac{V}{(t-s-\varepsilon/2)^2}\{[4\bar{\mu}\mu_0^2 - (2\bar{B}T+1)\mu_0]|x-y|^2 - 2\mu_0 T(\bar{A}+\bar{B}) - MT^2 + \nu_0\}.$$

Pour μ_0 et ν_0 assez grand on a (6).

Les constantes μ_0 et ν_0 dépendent des coefficients de l'équation (1) et de T. Choisissons $R > \sqrt{\nu_0/\mu_0}$ et posons

$$\lambda(y, s) = \min \bar{U}(x, t, y, s) \quad \text{pour} \quad (x, t) \in H_s \text{ et } |x-y| < R .$$

Pour chaque $a > 0$ il existe un $\bar{M} > 0$ tel que

$$\bar{U}(x, t, y, s) \geqslant \bar{M}(t-s)^{-n/2} \quad \text{si } |x-y|^2 < a(t-s)$$

(voir [3], p. 83). Comme on a, pour $a > 0$ assez grand,

$$\{(x, t)\colon (x, t) \in H_s,\ |x-y| < R\} \subset \{(x, t)\colon |x-y|^2 \leqslant a(t-s)\}$$

il existe un nombre positif $\bar{\lambda}$ tel que

$$\lambda(y, s) \geqslant \bar{\lambda} \quad \text{pour} \quad (y, s) \in H \text{ et } s + \varepsilon/2 \leqslant T .$$

La fonction

$$Z(x,t) = \frac{\bar{\lambda}}{\exp\{2\nu_0/\varepsilon\}} V(x,t,y,s) - \bar{U}(x,t,y,s)$$

satisfait à la condition $\bar{F}(u) \geqslant 0$ pour $x \in E_n$, $t-s-\varepsilon/2 \geqslant \varepsilon/2$ et $Z(x,t) \leqslant 0$ sur la surface latérale et sur la base du cylindre

$$D = \Big\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \leqslant R^2,\ t-s-\frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{\varepsilon}{2},\ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\}.$$

D'après le principe de l'extrémum

$$Z(x,t) \leqslant 0 \quad \text{dans} \quad D.$$

Ensuite on a $\lim\limits_{(x,t)\to(x,s+\varepsilon/2)} Z(x,t) \leqslant 0$ pour $|x-y| \geqslant R$, donc [4] $Z(x,t) \leqslant 0$ pour $|x-y| \geqslant R$ et $t-s-\varepsilon/2 \geqslant 0$ et enfin $Z(x,t) \leqslant 0$ si $x \in E_n$, $t-s \geqslant \varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Par conséquent

$$\bar{U}(x,t,y,s) \geqslant \frac{\bar{\lambda}}{\exp\{2\nu_0/\varepsilon\}} \exp\Big\{-\frac{\nu_0|x-y|^2-\nu_0}{t-s-\varepsilon/2}\Big\} \geqslant a(\varepsilon)\exp\{-\beta(\varepsilon)|x-y|^2\}$$

où

$$a(\varepsilon) = \frac{\bar{\lambda}}{\exp\{2\nu_0/\varepsilon\}} \exp\Big\{\frac{\nu_0}{T}\Big\}, \qquad \beta(\varepsilon) = \frac{2\mu_0}{\varepsilon}.$$

Puisque $c(x,t) \geqslant -M$, il en résulte ([5], p. 9) $U(x,t,y,s) \geqslant \bar{U}(x,t,y,s)$.

D'après les lemmes 1 et 2 nous avons évidemment:

LEMME 3. *Si les coefficients de l'équation* (1) *satisfont à la condition* (W) *et si la fonction* $u(x,t)$ *est une solution, non négative et régulière dans* $\bar{H}$, *de l'équation* (1), *alors pour chaque* $h \in (0,T)$ *il existe un* $a = a(h) > 0$ *tel que*

$$\int_0^h \int_{E_n} u(x,t)\exp(-ax^2)\,dx\,dt < \infty \tag{7}$$

et la fonction $f(t) = \int_{E_n} u(x,t)\exp(-ax^2)\,dx$ *est continue dans* $\langle 0,h\rangle$.

§ 2. Théorème fondamental.

THÉORÈME I. *Nous supposons que*

1) *Les coefficients de l'équation* (1) *satisfont à la condition* (W).

2) *Il existe des dérivées généralisées* $(a_{ij})''_{x_ix_j}$, $(a_{ij})'_{x_j}$, $(b_i)'_{x_i}$ *et*

$$\begin{aligned} &|(a_{ij})''_{x_ix_j}| \leqslant M(r^2+1), \\ &|(a_{ij})'_{x_j}| \leqslant M(r^2+1)^{1/2}, \\ &|(b_i)'_{x_i}| \leqslant M(r^2+1), \quad r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned} \tag{8}$$

presque partout dans H *pour* $i, j = 1, \ldots, n$.

3) *La fonction* $u(x, t)$ *est une solution, non négative et régulière dans* $\bar{H}$, *de l'équation* (1) *et* $u(x, 0) = 0$ *dans* E_n.

Alors $u(x, t) = 0$ *pour* $(x, t) \in H$.

Démonstration. Choisissons $h \in (0, T)$ arbitraire. Nous démontrerons que $u(x, t) = 0$ dans $H_1 = E_n \times (0, h)$.

Multiplions l'équalité $F(u) = 0$ par une fonction $\varphi(x, t)$ de classe C^2 dans $\bar{H}_1$, s'annulant en dehors d'un cylindre $D \subset \bar{H}_1$. La classe des fonctions ayant les propriétés ci-dessus sera désignée par $\mathring{C}_2(H_1)$. Nous intégrons cette expression et nous profitons des égalités:

$$\int_{H_1} a_{ij} u''_{x_i x_j} \varphi \, dx\, dt = \int_{H_1} (a_{ij})''_{x_i x_j} u\varphi \, dx\, dt + \int_{H_1} (a_{ij})'_{x_j} u\varphi_{x_i} \, dx\, dt + \\ + \int_{H_1} (a_{ij})'_{x_i} u\varphi'_{x_j} \, dx\, dt + \int_{H_1} a_{ij} u\varphi''_{x_i x_j} \, dx\, dt\,,$$

$$\int_{H_1} b_i u'_{x_i} \varphi \, dx\, dt = -\int_{H_1} (b_i)'_{x_i} u\varphi \, dx\, dt - \int_{H_1} b_i u\varphi'_{x_i} \, dx\, dt\,,$$

$$\int_{H_1} u_t \varphi \, dx\, dt = -\int_{H_1} u\varphi'_t \, dx\, dt + \int_{E_n} u(x, h)\varphi(x, h)\, dx\,.$$

Alors nous avons l'égalité

$$\int_{H_1} u\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\varphi''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \varphi'_{x_i} + \bar{c} + \varphi'_t\Big] dx\, dt - \int_{E_n} u(x, h)\varphi(x, h)\, dx = 0 \tag{9}$$

où

$$\bar{b}_i = -b_i + 2\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})'_{x_j}\,, \qquad \bar{c} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} (b_i)'_{x_i} + c$$

pour $\varphi(x, t) \in \mathring{C}_2(H_1)$.

Soit $\gamma_R(x)$ une famille de fonctions jouissant des propriétés suivantes:

a) $$\gamma_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad |x| \leqslant R\,, \\ 0 & \text{pour} \quad |x| \geqslant R+1\,. \end{cases}$$

b) Les fonctions $\gamma_R(x)$ sont de classe C^2 dans E_n.

c) $$|\gamma_R(x)| + \sum_{i=1}^{n} \left|(\gamma_R(x))'_{x_i}\right| + \sum_{i,j=i}^{n} \left|(\gamma_R(x))''_{x_i x_j}\right| \leqslant K\,,$$

la constante K ne dépendant pas de R.

Posons $\varphi(x, t) = \gamma_R(x)\exp\big(-\alpha(r^2+1)e^{\beta t}\big)$. La fonction $\varphi(x, t) \in \mathring{C}_2(H_1)$ pour α et β arbitraires.

Nous mettons cette fonction dans (9) et nous obtenons

$$(10)\quad \int_0^h \int_{|x|\leqslant R} u \exp\left(-a(r^2+1)e^{\beta t}\right)\Big[4a^2e^{2\beta t}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j -$$

$$-2ae^{\beta t}\sum_{i=1}^n a_{ii} - 2ae^{\beta t}\sum_{i=1}^n \bar b_i x_i + \bar c - a\beta(r^2+1)e^{\beta t}\Big]dx\,dt +$$

$$+\int_0^h \int_{|x|\geqslant R} u \exp\left(-a(r^2+1)e^{\beta t}\right)\Big[4a^2e^{2\beta t}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\gamma_R x_ix_j -$$

$$-2ae^{\beta t}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(x_i(\gamma_R)'_{x_j} + x_j(\gamma_R)'_{x_i}\right) - 2ae^{\beta t}\sum_{i=1}^n a_{ii}\gamma_R +$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\gamma_R)''_{x_ix_j} - 2ae^{\beta t}\sum_{i=1}^n \bar b_i x_i\gamma_R + \sum_{i=1}^n \bar b_i(\gamma_R)'_{x_i} + \bar c\gamma_R - a\beta(r^2+1)e^{\beta t}\Big]dx\,dt -$$

$$-\int_{E_n} u(x,h)\exp\left(-a(r^2+1)e^{\beta h}\right)\gamma_R(x)\,dx = 0\,.$$

D'après le lemme 3 on peut choisir $\bar a > 1$ tel que la deuxième intégrale converge vers zéro pour $R\to\infty$. L'égalité (10) admet la forme

$$(11)\quad \int_{H_1} u\exp\left(-a(r^2+1)e^{\beta t}\right)\Big[4\bar a^2 e_{2\beta t}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j - 2ae^{\beta t}\sum_{i=1}^n a_{ii} -$$

$$-2\bar a e^{\beta t}\sum_{i=1}^n \bar b_i x_i + \bar c - \bar a\beta(r^2+1)e^{\beta t}\Big]dx\,dt - \int_{E_n} u(x,t)\exp\left(-\bar a(r^2+1)e^{\beta h}\right)dx = 0$$

pour $\beta \geqslant 0$ arbitraire.

La condition (W) et (8) donnent

$$(12)\quad 4\bar a^2 e^{2\beta t}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j - 2\bar a e^{\beta t}\sum_{i=1}^n a_{ii} - 2\bar a e^{\beta t}\sum_{i=1}^n \bar b_i x_i + \bar c - \bar a\beta(r^2+1)e^{\beta t}$$

$$\leqslant 4\bar a^2\overline{\overline{M}}(r^2+1)e^{2\beta t} - \bar a\beta(r^2+1)e^{\beta t} \leqslant -1$$

où $\beta = 4\bar a e\overline{\overline{M}}+1$ et $t\leqslant 1/\beta$. La constante $\overline{\overline{M}}$ dépend des coefficients de l'équation (1).

En tenant compte de (11) et (12) nous avons:

$$u(x,t) = 0 \qquad \text{dans} \qquad H_1 = E_n\times\langle 0, 1/\beta\rangle\,.$$

On divise le domaine H_1 en domaines partiels par les plans $t = m/\beta$ $(m = 1, \ldots, r)$ et on établit de proche en proche l'égalité $u(x,t) = 0$ dans ces domaines.

§ 3. Propriétés des solutions non négatives. Nous supposons que les coefficients de l'équation (1) satisfont à la condition (W).

LEMME 4. *Pour chaque $a \geqslant 0$ on peut choisir $T_1 = T_1(a)$ de sorte que l'on ait*

$$(13)\qquad \begin{aligned} 0 &\leqslant U(x,t,y,s)\exp(ay^2)\\ &\leqslant \bar{M}(t-s)^{-n/2}\exp\left(\frac{D|x|^2}{t-s}\right)\exp\left\{\frac{-\frac{1}{8}|x|^2-\frac{1}{32}|y|^2}{t-s}\right\}\end{aligned}$$

où $t-s < T_1$.

Ensuite

$$(14)\qquad \lim_{|y|\to\infty} U(x,t,y,s)\exp(ay^2) = 0$$

uniformément pour $|x| \leqslant K$ et $t-s \leqslant T_1$.

Démonstration. Il existe des nombres $\bar{M} > 0$ et $A > 0$ tels que l'on a

$$\begin{aligned} &U(x,t,y,s)\\ &\leqslant \bar{M}(t-s)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{A}{4}(|x|^2+|y|^2)\operatorname{ctg}A(t-s)+\frac{A}{2}|x|\,|y|\sin^{-1}A(t-s)\right\}\end{aligned}$$

où $t-s < T(W)$ ([5], p. 8).

Puisque

$$\lim_{t-s\to 0} A(t-s)\sin^{-1}A(t-s) = 1\,,\quad \lim_{t-s\to 0} A(t-s)\operatorname{ctg}A(t-s) = 1\,,$$

on a

$$\begin{aligned} &U(x,t,y,s)\exp(ay^2)\\ &\qquad\leqslant \bar{M}(t-s)^{-n/2}\exp\left\{\frac{-\frac{1}{8}|x|^2+|x|\,|y|}{t-s}+|y|^2\left(a-\frac{1}{8(t-s)}\right)\right\}\end{aligned}$$

pour $t-s \leqslant T_1' \leqslant T(W)$.

Soit T_1 un nombre tel que

$$a-\tfrac{1}{16}(t-s) \leqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad t-s \leqslant T_1\,.$$

Ensuite on a $|x|\,|y| \leqslant 2|x|\,|y| \leqslant |y|^2/D + D|x|^2$ pour $D > 0$, donc pour $1/D < 1/32$ nous obtenons (13), d'où résulte directement (14).

En appliquant les lemmes 3 et 4 on peut démontrer [6]:

LEMME 5. *Choisissons $h \in (0, T)$. Si la fonction $u(x,t)$ est une solution, non négative et régulière dans $\bar{H}$ de l'équation* (1), *alors la fonction*

$$w(x,t) = \int_{E_n} U(x,t,y,s)u(y,s)\,dy$$

est continue pour $t-s < T_1$, $0 \leqslant s < t \leqslant T$ et satisfait à la condition

$$(15)\qquad \lim_{t\to s+} w(x,t) = u(x,s)\,.$$

La constante T_1 dépend de h.

THÉORÈME II. *Nous supposons qu'une fonction $u(x, t)$ est une solution, non négative et régulière dans $\bar{H}$, de l'équation* (1) *et que les hypothèses du Théorème* I *sont vérifiées. Soit $h \in (0, T)$.*

Alors il existe un $T_1 = T_1(h)$ tel que

$$u(x, t) = \int_{E_n} U(x, t, y, s) u(y, s) dy \quad \textit{pour} \quad t-s \leqslant T_1, \ 0 \leqslant s < t \leqslant h. \tag{17}$$

Démonstration. Soit $a > 0$ un nombre tel que l'on ait

$$\int_{E_n} u(y, t) \exp(-ay^2) dy < E = \text{const} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant h$$

et $\{R_n\}$ une suite de nombres tels que $R_{n+1} > R_n + 1$.

Désignons par $\omega_n(x)$ une suite de fonctions jouissant des propriétés suivantes:

a) $$\omega_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad |x| \leqslant R_n, \\ 0 & \text{pour} \quad |x| \geqslant R_n + 1, \end{cases}$$

b) $0 \leqslant \omega_n \leqslant 1$ et ω_n sont continues dans E_n.

Les fonctions $u_n(x, t) = \int_{E_n} U(x, t, y, s) u(y, s) \omega_n(y) dy$ forment une suite croissante et sont des solutions, non négatives et régulières, de l'équation (1).

Ensuite

$$0 \leqslant w(x, t) - u_n(x, t) \leqslant \int_{|y| \geqslant R_n} U(x, t, y, s) u(y, s) dy$$

donc $u_n(x, t) \underset{n \to \infty}{\to} w(x, t)$ pour $x \in E_n$, $t - s < T(W)$.

D'après le théorème de Lebesgue la différence $F(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$ établit l'identité (9). De plus, la fonction $F(x, t)$ est continue, non négative et $F(x, 0) = 0$. Donc $F(x, t) = 0$.

THÉORÈME III. *Soient $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ des solutions, non négatives et régulières dans $\bar{H}$, de l'équation* (1), *$u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$ dans E_n et supposons vérifiées les hypothèses du théorème* I.

Alors

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) \qquad \textit{pour} \qquad (x, t) \in H.$$

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{t})$ un point arbitraire de H. Choisissons $T_1 = T_1(\bar{t})$ tel que

$$u_i(x, t) = \int_{E_n} U(x, t, y, s) u_i(y, s) dy \qquad \text{pour} \qquad t - s \leqslant T_1, \ 0 \leqslant s < t \leqslant \bar{t}.$$

Considérons la couche $H_2 = E_n \times \langle 0, T_2 \rangle$ où $T_2 = \min(\bar{t}, T_1)$.

Dans ce cas

$$u_1(x,t) = \int_{E_n} U(x,t,y,0)u_1(y,0)dy = \int_{E_n} U(x,t,y,0)u_2(y,0)dy = u_2(x,t)$$

c'est-à-dire $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ dans H_2.

La démonstration de l'égalité $u_1 = u_2$ dans les couches

$$H_{i+1} = E_n \times \langle T_i, T_{i+1} \rangle ,$$

où $T_{i+1} = \min(\bar{t}, T_1 + T_i)$ pour $i = 2, 3, \ldots$, est pareille.

Comme $(\bar{x}, \bar{t}) \in H_k$ pour un k convenable, on a $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

En appliquant le théorème II on peut démontrer, sous les hypothèses du théorème I, les théorèmes suivants [6]:

THÉORÈME IV. *Soit $u(x,t)$ une solution non négative et régulière dans $\bar{H}$ de l'équation* (1). *Alors $u(x,t)$ est de classe E_2* (voir [4]) *dans chaque couche $H' = E_n \times \langle h_1, h_2 \rangle$, $0 < h_1 < h_2 < T$.*

THÉORÈME V. *Soit $u(x,t)$ une solution, non négative et régulière dans $\bar{H}$, de l'équation* (1). *Alors il existe un $h \in (0, T)$, tel que*

$$u(x,t) = \int_{E_n} U(x,t,y,s)\,\varrho(dy) \quad \textit{pour} \quad x \in E_n\,,\ 0 < t < h\,,$$

$\varrho(\Gamma)$ étant une mesure non négative.

THÉORÈME VI. *Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation* (1) *non négative et de classe C^2 dans H. De plus*

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = 0 \quad \textit{pour} \quad x \neq \bar{y}\,.$$

Alors il existe un $h \in (0, T)$ et une constante $A \geqslant 0$ tels que

$$u(x,t) = A\,U(x,t,\bar{y},0) \quad \textit{pour} \quad x \in E_n\,,\ 0 < t < h\,.$$

Travaux cités

[1] P. Besala, *On a certain property of the fundamental solution of a linear parabolic equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. 11(4) (1963), p. 155-158.

[2] A. Friedman, *On the uniqueness of the Cauchy problem for parabolic equations*, Amer. Journ. Math. 81 (1959), p. 503-511.

[3] A. M. Ильин, A. C. Калашников, O. A. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка парадолического типа*, Усп. Мат. Наук 17(3) (1962), p. 3-146.

[4] M. Krzyżański, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7(3) (1959), p. 131-135.

[5] M. Krzyżański et A. Szybiak, *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire du type parabolique dont le dernier coefficient est non-borné*, Atti Acad. Naz. Lincei, ser. VIII, 27 (1-2, 3-4) (1959).

[6] — *Sur les solutions non négatives de l'équation linéaire normale parabolique*, Revue Roumaine Math. Pures et Appliquées 9(5) (1964), p. 193-408.

[7] J. Serrin, *A uniqueness theorem for the parabolic equation*, Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954), p. 344.

[8] D. Widder, *Positive temperatures on an infinite rod*, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1) (1944), p. 85-95.

Reçu par la Rédaction le 7. 6. 1966