ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1968)

Charakterisierung des Flächeninhalts mit Hilfe der Funktionalgleichungen

von M. KUCHARZEWSKI (Katowice)

Es sei V_n ein n-dimensional Riemannscher Raum mit dem metrischen Tensor

$$g_{ik}(x^l)\,, \qquad i,k,l = 1,2,\dots,n\,.$$

Wir werden voraussetzen, daß die quadratische Form $g_{ik}\xi^i\xi^k$ positiv definit ist, d.h., daß V_n gewöhnlich ist.

In diesem Raume sei eine p-dimensionale Fläche V_p durch die Gleichungen

$$x^i = x^i(u^a)\,, \qquad a = 1,2,\dots,p\,,\ 1 \leqslant p \leqslant n\,,$$

definiert, wo $x^i(u^a)$ von der Regularitätsklasse C^1 in einem gemeinsamen Gebiete D_0 und die Vektoren

$$x_a = (x_a^i) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}\right) \tag{1}$$

linear unabhängig sind.

Bezeichnen wir mit D ein beschränktes Gebiet, das im D_0 enthalten ist. Der p-dimensionale Flacheninhalt μ des durch D bestimmtem Flächnestücks von V_p bestimmt die Formel

$$\mu(D) = \int_D \sqrt{a}\,du^1\dots du^p\,, \tag{2}$$

wo $a = |a_{\alpha\beta}|$ die Determinante des metrischen Tensors $a_{\alpha\beta}$ vom V_p ist. $a_{\alpha\beta}$ hat folgende Form

$$a_{\alpha\beta} = g_{ik}x_\alpha^i x_\beta^k\,, \qquad \alpha,\beta = 1,2,\dots,p\,. \tag{3}$$

Wird das skalare Produkt der Vektoren y, z in V_n mit (y,z) bezeichnet, so kann $a_{\alpha\beta}$ folgendermaßen

$$a_{\alpha\beta} = (x_\alpha, x_\beta) \tag{4}$$

dargestellt werden.

In dieser Note möchte ich zeigen, daß der Flächeninhalt μ durch gewisse Bedingungen (1°-4°) charakterisiert werden kann. Diese Bedingungen stammen im wesentlichen von L. Bieberbach [1], S. 50, und treten auch im Lehrbuch von D. Laugwitz [3], S. 27, § 3.8, auf. Hier werden sie aber etwas verallgemeinert. Und zwar betrachten L. Bieberbach und D. Laugwitz nur den 2-dimensionalen Flächeninhalt im 3-dimensionalen Euklidischen Raume. Die hier angebenen Bedingungen 1°-4° charakterisieren den p-dimensionalen Flächeninhalt $1 \leqslant p \leqslant n$ im n-dimensionalen Riemannschen Raum V_n.

Die hier dargestellte Methode kann zur axiomatischen Einführuhg des Flächeninhalts ausgenutzt werden. Ich glaube, sie ist interessant, weil sie gewisse wesentliche und trotzdem bisher nicht genügend ausgenutzte Eigenschaften des Flächeninhalts zeigt.

§ 1. In diesem Paragraphen gebe ich die oben erwähnten Bedingungen an. Zuerst aber erkläre ich die in diesen Bedingungen auftretenden Begriffe der zulässigen Koordinaten im V_n und der zulässigen Parameter auf der Fläche V_p.

DEFINITION 1. $x^{i'}$ heißen *zulässige Koordinaten* in dem Gebiete G des Raumes V_n, wenn sie durch die Funktionen

$$x^{i'} = x^{i'}(x^k)\,, \qquad (x^k) \in G \tag{1.1}$$

der Klasse C^1 mit nichtverschwindender Determinante

$$|A_k^{i'}| = |x_k^{i'}| = \left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right| \neq 0 \tag{1.2}$$

der ursprünglichen Koordinaten x^k ausgedrückt werden können.

DEFINITION 2. Die Parameter $\bar{u}^a$ auf der Fläche V_p sind in dem Gebiete $D \subset D_0$ zulässig, wenn sie folgende Relationen

$$\bar{u}^a = \varphi^a(u^\beta) \qquad (u^\beta) \in D \tag{1.3}$$

erfüllen, wo φ^a der Klasse C^1 im D sind und die Jacobische Determinante J dieser Funktionen im D von Null verschieden ist

$$J = |B_\beta^a| = \left|\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^\beta}\right| \neq 0\,. \tag{1.4}$$

Der durch die Formel (2) bestimmte Flächeninhalt μ erfüllt offensichtlich folgende Bedingungen:

1° μ ist ein additives Funktional, das von den Funktionen x^i, ihren ersten Ableitungen x_a^i, von dem metrischen Tensor g_{ik} des Raumes V_n und von den Parametern u^a auf der Fläche V_p abhängt, d.h. der Flächeninhalt hat die Form

$$\mu(D) = \int_D F(x^i, x_a^i, g_{ik}, u^a)\, du^1 \ldots du^p\,,$$

wo F eine stetige Funktion hinsichtlich aller ihren Veränderlichen ist.

2° μ is von der Wahl der zulässigen Koordinaten $x^{i'}$ im V_n unabhängig.

3° μ ist von der Wahl der zulässigen Parameter $\bar{u}^\alpha$ auf der Fläche V_p unabhängig.

4° Im n-dimensionalen Euklidischen Raume E_n ist der Flächeninhalt μ des p-dimensionalen Würfels Q mit der Seitenlänge 1 gleich 1

$$\mu(Q) = 1 \, .$$

Im weiteren zeige ich, daß die Bedingungen 1°-4° den durch die Formel (2) bestimmten Flächeninhalt vollständig charakterisieren, d.h. beweise ich folgenden Satz:

SATZ 1.1. *Der einzige p-dimensionale Flächeninhalt, der die Bedingungen* 1°-4° *erfüllt, hat die Form* (2).

§ 2. Den Satz 1.1 beweise ich mit Hilfe der Funktionalgleichungen. Darum formen wir die Bedingungen etwas um. Insbesondere ersetzen wir 2° und 3° durch entsprechende Funktionalgleichungen.

Aus 1° und 2° ergibt sich, dass F folgende Funktionalgleichung

$$F(x^{i'}, x_\alpha^{i'}, g_{i'k'}, u^\alpha) = F(x^i, x_\alpha^i, g_{ik}, u^\alpha) \tag{2.1}$$

für beliebige Koordinatentransformation

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i) \tag{2.2}$$

der Klasse C^1 mit nichtverschwindender Determinante

$$|A_k^{i'}| = \left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right| \neq 0$$

erfüllt. Im (2.1) sind $x^{i'}$, $x_\alpha^{i'}$ und $g_{i'k'}$ durch Ausdrücke $x^{i'}(x^i)$, $A_i^{i'} x_\alpha^i$, $A_{i'}^i A_{k'}^k g_{ik}$ zu ersetzen.

Aus 1°, 3° und aus dem Transformationsgesetz für Integrale erhält man nachstehende Funktionalgleichung:

$$F(x^i, x_{\bar{\alpha}}^i, g_{ik}, \bar{u}^\alpha)\,|J| = F(x^i, x_\alpha^i, g_{ik}, u^\alpha) \, . \tag{2.4}$$

Diese soll für beliebige Parametertransformation

$$\bar{u}^\alpha = \varphi^\alpha(u^\beta) \tag{2.5}$$

der Klasse C^1 mit nichtverschwindender Determinante

$$J = |\beta_\beta^{\bar{\alpha}}| = \left|\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\right| \neq 0$$

erfüllt werden. Im (2.4) sind $x_{\bar{\alpha}}^i$, $\bar{u}^\alpha$ gemäß den nachstehenden Formeln

$$x_{\bar{\alpha}}^i = x_\beta^i \beta_{\bar{\alpha}}^\beta \, , \qquad \bar{u}^\alpha = \varphi^\alpha(u^\beta) \tag{2.6}$$

zu ersetzen.

Schließlich kann die Bedingung 4° in forlgender Form dargestellt werden. Bezeichnen wir mit E_n den n-dimensionalen Euklidischen Raum. Der metrische Tensor von E_n hat also die Form

$$g_{ik} = \delta_{ik} .$$

Im E_n sei eine p-dimensionale Hyperebene H_p durch die Gleichungen

$$H_p: \quad x^i = v^i_a u^a + r^i_0$$

definiert, wo die Vektoren $v_a(v^i_a)$, $a = 1, 2, \ldots, p$ orthonormal sind, d.h. gemäß der am Anfang eingeführten Bezeichnungen gilt

$$(v_a, v_\beta) = \delta_{ik} v^i_a v^k_\beta = \delta_{a\beta} .$$

Dann bestimmen die Ungleichungen

$$Q: \quad 0 \leqslant u^a \leqslant 1$$

einem p-dimensionalen Würfel Q auf H_p mit der Seitenlänge 1. 4° ist mit

$$\mu(Q) = \int_Q F(x^i, v^i_a, \delta_{ik}, u^a) du^1 \ldots du^p = 1 \tag{2.7}$$

äquivalent.

§ 3. Der Beweis des Satzes 1.1 wird auf folgenden Hilfssatz gestützt, den wir ohne igrendwelche Regularitätsvoraussetzungen über die Funktion F beweisen.

HILFSSATZ 3.1. *Allgemeine Lösung der Funktionalgleichungen* (2.1) *und* (2.4) *hat die Form*

$$F(x^i, x^i_a, g_{ik}, u^a) = c\sqrt{a} , \quad a = |a_{a\beta}| ,$$

wo $a_{a\beta}$ *in* (3) *definiert sind.*

Beweis. Setz man in (2.1) $x^{i'} = x^i + c^i$ ein, so ergibt sich

$$F(x^i + c^i, x^i_a, g_{ik}, u^a) = F(x^i, x^i_a, g_{ik}, u^a) . \tag{3.1}$$

Für $c^i = -x^i$ folgt daraus

$$F(0, x^i_a, g_{ik}, u^a) = F(x^i, x^i_a, q_{ik}, u^a) ,$$

d.h. die Funktion F hängt von den Veränderlichen x^i nicht ab. Sie hat also die Form

$$F(x^i, x^i_a, g_{ik}, u^a) = \widetilde{F}(x^i_a, g_{ik}, u^a) , \tag{3.2}$$

wo $\widetilde{F}$ durch nachstehende Relation

$$\widetilde{F}(x^i_a, g_{ik}, u^a) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(0, x^i_a, g_{ik}, u^a)$$

definiert ist. Setzt man jetzt in (2.4) $\bar{u}^a = u^a + \gamma^a$ und für F, die soeben bestimmte Funktion $\tilde{F}$ ein, so erhalten wir, ganz analog wie vorher, daß $\tilde{F}$ auch von u^a nicht abhängt. Mit Hilfe einer entsprechend definierten Funktion f kann sie folgendermaßen dargestellt werden

$$\tilde{F}(x_a^i, g_{ik}, u^a) = f(x_a^i, g_{ik}) \,. \tag{3.3}$$

Alle weiteren Betrachtungen werden wir in einem festen Punkt x durchführen. Da aber die Funktion F wegen (3.2) und (3.3) von den Koordinaten des Punktes $x(x^i)$ und von den Parametern u^a nicht abhängt, werden diese für beliebige Punkte der Mannigfaltigkeit V_p gelten.

Wegen (3.2) und (3.3) nimmt die Gleichung (2.1) folgende Gestalt

$$f(A_i^{i'} x_a^i, g_{ik} A_{i'}^i A_{k'}^k) = f(x_a^i, g_{ik}) \tag{3.4}$$

an. (3.4) soll für beliebige nichtsinguläre Matrizen $A = \|A_k^{i'}\|$ erfüllt werden. Wir setzen in (3.4) für A eine Matrix ein, die auf folgende Weise gebildet ist.

Der Voraussetzung nach sind die Vektoren $x_a = (x_a^i)$ linear unabhänging. Ergänzen wir diese mit den Vektoren x_ϱ^i, $\varrho = p+1, \ldots, n$ so, daß alle Vektoren x_a^i, x_ϱ^i linear unabhängig sind. Diesen Vektoren ordnen wir mit der Methode von E. Schmidt [2], S. 210, § 6, das System der Vektoren

$$z_a^i \,, \; z_\varrho^i \tag{3.5}$$

die hinsichtlich der durch den Tensor g_{ki} bestimmten Metrik orthonormal sind. Die Vektoren (3.5) nehmen wir als Spalten der Matrix $A^{-1} = \|A_{k'}^i\|$ an. Wir haben also

$$A_{a'}^i = z_a^i \,, \; A_{\varrho'}^i = z_\varrho^i \tag{3.6}$$

Da (3.6) orthonormal sind, gilt die Relation

$$g_{ik} z_l^i z_m^k = g_{ik} A_{l'}^i A_{m'}^k = (z_l, z_m) = \delta_{lm} \,, \qquad l, m = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{3.7}$$

Die Vektoren z_l^i haben folgende Gestalt

$$z_1^i = \frac{x_1^i}{\sqrt{\Gamma_1}} \,, \qquad z_2^i = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & x_1^i \\ (x_2, x_1) & x_2^i \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}} \,, \qquad \ldots \,, \tag{3.8}$$

$$z_l^i = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \ldots & (x_1, x_{l-1}) & x_1^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_l, x_1) & \ldots & (x_l, x_{l-1}) & x_l^i \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{l-1} \Gamma_l}} \,,$$

$$\Gamma_l = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \ldots & (x_1, x_l) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_l, x_1) & \ldots & (x_l, x_l) \end{vmatrix} \,, \qquad l = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Daraus folgt, daß die Elemente $A_k^{l'} = y_k^l$ der Matrix A, die zur A^{-1} invers ist durch nachstehende Formeln

$$(3.9) \qquad y_i^1 = \frac{g_{ik}x_1^k}{\sqrt{\Gamma_1}}, \qquad y_i^2 = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & g_{ik}x_1^k \\ (x_2, x_1) & g_{ik}x_1^k \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}, \qquad \ldots,$$

$$y_i^l = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \ldots & (x_1, x_{l-1}) & g_{ik}x_1^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_l, x_1) & \ldots & (x_l, x_{l-1}) & g_{ik}x_l^k \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{l-1}\Gamma_l}}$$

dargestellt sind.

Jetzt bestimmen wir die in (3.4) auftretenden Produkte

$$(3.10) \qquad Ax_a = \|A_i^{l'} x_a^i\| = \|y_i^l x_a^i\| .$$

Für $a < l$ sind diese gleich Null

$$(3.11) \qquad A_i^{l'} x_a^i = y_i^l x_a^i = 0 , \qquad a < l ,$$

weil $y_i^l x_a^i$ wegen (3.9) einer Determinante gleich ist, in der zwei Spalten identisch sind.

Es genügt also nur $y_i^l x_a^i$ für $1 \leqslant l \leqslant a$ zu bestimmen. Aus (3.9) erhalten wir

$$(3.12) \qquad y_i^l x_a^i = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \ldots & (x_1, x_{l-1}) & (x_1, x_a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_l, x_1) & \ldots & (x_l, x_{l-1}) & (x_l, x_a) \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{l-1}\Gamma_l}},$$

$$1 \leqslant l \leqslant a , \quad a = 1, 2, \ldots, p .$$

Nach Einsetzen (3.7), (3.11) und (3.12) in (3.4) nimmt diese Gleichung folgende Gestalt

$$(3.13) \qquad f(x_a^i, g_{ik}) = f(y_i^l x_a^i, \delta_{ik})$$

an. (3.13) bedeutet, daß f nur von den Produkten $y_i^l x_a^i$ $(1 \leqslant l \leqslant a \leqslant p)$ abhängen kann. Sie hat also die Form

$$(3.14) \qquad f(x_a^i, g_{ik}) = \varphi(y_i^l x_a^i) , \qquad 1 \leqslant l \leqslant a \leqslant p ,$$

wo φ eine entsprechend definierte Funktion ist.

Jetzt benutze ich die Gleichung (2.4), Wegen (3.14) hat diese folgende Gestalt

$$(3.15) \qquad \varphi(\bar{y}_i^l x_{\bar{a}}^i) |J| = \varphi(y_i^l x_a^i) .$$

Die Produkte $y_i^l x_a^i$ drücken sich auf Grund (3.12) durch die skalaren Produkte der Vektoren x_λ, d.h. durch $a_{\lambda\mu} = (x_\lambda, x_\mu)$, $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, p$ aus. Bei der Parametertransformation (2.4) auf der Fläche V_p gehen $a_{\lambda\mu}$ in $a_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}$

$$a_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} = a_{\lambda\mu} \beta_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \beta_{\bar{\nu}}^{\mu}$$

über. Daraus folgt, daß $a_{\bar\lambda\bar\mu}$ gleich, wie die Koeffizienten der quadratischen Form $a_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu$ bei linearen Substitutionen sich ändern. Da die Vektoren x_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, p$ linear unabhängig sind, sind alle Gramschen Determinanten Γ_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, p$ positiv. Die quadratische Form $a_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu$ ist also positiv definit. Man kann solche Parametertransformation finden, daß $\|a_{\bar\lambda\bar\mu}\|$ der Einheitsmatrix gleich ist

$$a_{\bar\lambda\bar\mu} = a_{\bar\lambda\bar\mu}\,.$$

Bei diesen Parametern sind folgende Relationen

$$\bar{y}^l_i x^i_{\bar a} = \begin{vmatrix} (x_{\bar 1}, x_{\bar 1}) & \ldots & (x_{\bar 1}, x_{\bar a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_{\bar l}, x_{\bar 1}) & \ldots & (x_{\bar l}, x_{\bar a}) \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_{\overline{l-1}}\Gamma_{\bar a}}} = \delta^l_a\,, \tag{3.16}$$

$$\delta_{\bar\lambda\bar\mu} = a_{\alpha\beta}B^\alpha_{\bar\lambda}B^\beta_{\bar\mu} \tag{3.17}$$

erfüllt.

Aus (3.17) erhält man weiter

$$1 = |\delta_{\bar\lambda\bar\mu}| = J^{-2}a\,,$$

wo $J = |B^{\bar\alpha}_\lambda|$ und $a = |a_{\alpha\beta}|$ ist. Daraus folgt

$$|J| = \sqrt{a}\,. \tag{3.18}$$

Setzen wir (3.16) und (3.18) in (3.15) ein, so ergibt sich

$$\varphi(y^l_i x^i_a) = \varphi(\delta^l_a)\sqrt{a}\,.$$

Die letzte Beziehung kann in der Form

$$\varphi(y^l_i x^i_a) = c\sqrt{a} \tag{3.19}$$

dargestellt werden, wo $c = \varphi(\delta^l_a)$ ist. Auf diese Weise ist der Hilfssatz 3.1 bewiesen.

§ 4. Erfüllt der p-dimensionale Flächeninhalt μ im V_n die Bedingungen 1°-4°, so muß die Funktion F den Funktionalgleichungen (2.1) und (2.4) genügen. Auf Grund des Hilfssatzes 3.1 hat sie die Form $F = c\sqrt{a}$. Aus der Bedingung (2.7) folgt weiter, daß $C = 1$ ist. μ hat also die Gestalt (2) und der Satz 1.1 ist vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. Bieberbach, *Differentialgeometrie*, Leipzig und Berlin 1932.

[2] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва 1964.

[3] D. Laugwitz, *Differentialgeometrie*, Stuttgart 1960.

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1967