ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1965)

Une idée concernant la majoration numérique de la solution du problème de Neumann relatif à l'équation de la chaleur

par G. ADLER (Budapest)

Dans ce travail nous allons présenter une méthode pour la majoration a priori de la solution du second problème aux limites relatif à l'équation de la chaleur.

La méthode utilisée ne convient actuellement que pour le traitement du problème à 1-dimension, cependant elle s'applique aussi au cas d'une frontière variable.

§ 1. Définitions. Soit $\bar{D}$ un domaine fermé du plan (x, t), limité par les droites $t = 0$, $t = T$ (>0) et par les courbes continues Σ_1, Σ_2 données par les équations

$$\Sigma_1\colon\ x = \xi_1(t), \qquad \Sigma_2\colon\ x = \xi_2(t),$$

où

$$\xi_1(t) < \xi_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Introduisons les notations:

$$l(t) = \xi_2(t) - \xi_1(t), \qquad L = \max_{\substack{0 \leqslant t \leqslant T \\ i=1,2}} |\xi_i(t)|.$$

Soit S la partie de la frontière de $\bar{D}$ composée de Σ_1, Σ_2 et du segment $\{\xi_1(0) \leqslant x \leqslant \xi_2(0),\ t = 0\}$. Posons $D = \bar{D} - S$.

Dans cette note nous allons considérer l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = p(x)\frac{\partial u}{\partial t} - f(x, t), \tag{1}$$

dont les coefficients satisfont aux conditions suivantes [1]:

---

[1] On dira qu'une fonction $g(x)$ (dépendant de la seule variable x) est définie (resp. possède des certaines propriétés) sur un ensemble E de l'espace cartésien (x, t), si elle est définie (resp. si elle possède les propriétés en question) pour les abscisses x de tous les points $(x, t) \in E$.

1° $k(x)$ est continue dans $\bar{D}$ et admet une seconde dérivée continue dans D, de plus

$$k(x) \geqslant k > 0 \quad (k = \text{const.});$$

2° $p(x)$ est continue dans $\bar{D}$ et admet une première dérivée dans D de plus

$$p(x) \geqslant p > 0 \quad (p = \text{const.});$$

3° $f(x, t)$ admet une première dérivée par rapport à x dans D.

Les lemmes du § 2 se référeront à l'équation un peu plus générale

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x)u = \frac{\partial u}{\partial t} + d(x, t) \tag{2}$$

de type parabolique, avec des coefficients bornés et

$$a(x) \geqslant a > 0 \quad (a = \text{const.}).$$

Si l'on dit que $u(x, t)$ satisfait à l'équation (1) ou (2) dans D, on sous-entend que toutes ses dérivées qui figurent dans ces équations, existent et sont continues dans D.

Nous introduisons les notations suivantes pour la fonction $u(x, t)$ définie et continue dans $\bar{D}$ et y admettant une dérivée continue par rapport à x:

$$\max_{\bar{D}} |u| = m, \quad \max_{S} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = M, \quad \max_{\bar{D}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = \bar{M},$$

et posons

$$Q = \int_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} p(x)u(x, 0)\,dx, \quad F(t) = \int_0^t \int_{\xi_1(\tau)}^{\xi_2(\tau)} |f(x, \tau)|\,dx\,d\tau.$$

§ 2. Lemmes. Les idées de la démonstration des lemmes suivants sont connues (voir p.e. [1]). Nous ne citons ces lemmes que pour être complet.

LEMME 1 (principe du maximum). *Soit $u(x, t)$ une solution dans D de l'équation* (2), *continue dans $\bar{D}$. Supposons $c(x) \leqslant 0$ et $d(x, t) \leqslant 0$ dans D. Alors $u(x, t)$ (supposée non-identiquement constante) ne peut pas admettre un minimum négatif dans D* (plus précisément: si $u(x, t)$ atteint dans D le minimum de ces valeurs prises dans $\bar{D}$, alors ce minimum est non-négatif); *il s'en suit:*

$$\min_{\bar{D}} u(x, t) \geqslant \min\{\min_{S} u(x, t);\ 0\}.$$

LEMME 2. *Soit $u(x, t)$ une solution dans D de l'équation* (2), *continue dans $\bar{D}$. Supposons $c(x) \leqslant 0$ dans D. Alors*

$$\max_{\bar{D}} |u(x, t)| \leqslant \max_{S} |u(x, t)| + e^{2\lambda L} \sup_{D} |d(x, t)|,$$

où λ est un nombre positif tel que

$$(*) \qquad \inf_D [a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x)] = 1 .$$

Démonstration. Nous effectuerons la démonstration en 4 pas: 1° Supposons que

$$\gamma = \sup_D d(x, t) \geqslant 0 .$$

La fonction

$$v \equiv u - \gamma e^{\lambda L} e^{\lambda x}$$

satisfait à l'équation

$$(2') \qquad a(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial v}{\partial x} + c(x)v$$
$$= \frac{\partial v}{\partial t} + d(x, t) - \gamma e^{\lambda L}[a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x)]e^{\lambda x} .$$

En vertu de la condition $(*)$ on a:

$$d(x, t) - \gamma e^{\lambda L}[a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x)]e^{\lambda x} \leqslant d(x, t) - \gamma e^{\lambda L}\cdot 1 \cdot e^{-\lambda L} \leqslant 0 ,$$

donc on peut appliquer le lemme 1 à l'équation (2'), et il en résulte:

$$u(x, t) \geqslant u(x, t) - \gamma e^{\lambda L} e^{\lambda x} \geqslant \min\{\min_S [u(x, t) - \gamma e^{\lambda L} e^{\lambda x}; 0]\}$$
$$\geqslant -\max_S |u(x, t)| - \gamma e^{2\lambda L} .$$

2° Supposons que

$$\delta \equiv \inf_D d(x, t) \leqslant 0 .$$

En appliquant le résultat obtenu dans 1° à la fonction $-u(x, t)$ on obtient:

$$-u \geqslant -\max_S |u| - \delta e^{2\lambda L}, \qquad u \leqslant \max_S |u| + \delta e^{2\lambda L} .$$

3° Supposons que

$$\gamma \equiv \sup_D d(x, t) \leqslant 0 .$$

Dans ce cas on a, selon le lemme 1,

$$u \geqslant -\max_S |u| .$$

4° Supposons que

$$\delta \equiv \inf_D d(x, t) \geqslant 0 .$$

En appliquant le résultat du 3° à la fonction $-u(x, t)$, il vient

$$-u \geqslant -\max_S |u|, \qquad u \leqslant \max_S |u| .$$

Nous distinguons trois cas:

a) $$\inf_D d(x,t) \geqslant 0\,,$$

b) $$\sup_D d(x,t) \leqslant 0\,,$$

c) $$\sup_D d(x,t) > 0\,, \qquad \inf_D d(x,t) < 0\,.$$

Nous obtenons l'inégalité à démontrer
dans le cas a) de 1° et 4°;
dans le cas b) de 2° et 3°;
dans le cas c) de 1° et 2°.

Lemme 3. *Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation* (2) *dans D, continue dans $\bar{D}$. Supposons $\varkappa \equiv \sup_D c(x) > 0$. Alors*

$$\max_{\bar{D}} |u(x,t)| \leqslant [\max_S |u(x,t)| + e^{2\lambda L} \sup_D |d(x,t)|] e^{\varkappa T}\,,$$

où λ est un nombre positif tel que

$$\inf_D [a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x) - \varkappa] = 1\,.$$

Démonstration. La fonction

$$v(x,t) \equiv u(x,t) e^{-\varkappa t}$$

satisfait à l'équation

$$a(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial v}{\partial x} + [c(x) - \varkappa]v = \frac{\partial v}{\partial t} + d(x,t)e^{-\varkappa t}\,.$$

Ici le coefficient $c(x) - \varkappa$ est non-positif, ainsi, il découle du lemme 2, que

$$\begin{aligned}\max_{\bar{D}} |v(x,t)| &= \max_{\bar{D}} |u(x,t)e^{-\varkappa t}| \\ &\leqslant \max_S |u(x,t)e^{-\varkappa t}| + e^{2\lambda L} \sup_D |d(x,t)e^{-\varkappa t}| \\ &\leqslant \max_S |u(x,t)| + e^{2\lambda L} \sup_D |d(x,t)|\,.\end{aligned}$$

Ainsi le lemme 3 est établi.

Les résultats du paragraphe présent obtenus jusqu'ici peuvent être résumés comme suit:

Lemme 4. *Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation* (2) *dans D, continue dans $\bar{D}$. Alors*

$$\max_{\bar{D}} |u(x,t)| \leqslant [\max_S |u(x,t)| + A] e^{\varkappa T}\,,$$

où

$$\varkappa = \max[\sup_D c(x);\, 0]\,, \qquad A = e^{2\lambda L} \sup_D |d(x,t)|\,,$$

et λ est un nombre positif tel que

$$\inf_D [a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x) - \varkappa] = 1 .$$

LEMME 5. *Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation* (1), *admettant la dérivée $\partial u/\partial x$ continue dans $\bar{D}$ et admettant les dérivées $\partial^3 u/\partial x^3$, $\partial^2 u/\partial x \partial t$, $\partial^2 u/\partial t \partial x$ continues dans D. Alors*

$$\max_{\bar{D}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \left[\max_S \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + A\right] e^{\varkappa T},$$

où

$$\varkappa = \max\left[\sup_D \left(\frac{k'(x)}{p(x)}\right)' ; 0\right], \qquad A = e^{2\lambda L} \sup_D \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x,t)}{p(x)}\right)\right|,$$

et λ est un nombre positif tel que

$$\inf_D \left[\frac{k(x)}{p(x)}\lambda^2 + \left(\left(\frac{k(x)}{p(x)}\right)' + \frac{k'(x)}{p(x)}\right)\lambda + \left(\frac{k'(x)}{p(x)}\right)' - \varkappa\right] = 1 .$$

Démonstration. En dérivant l'équation (1) par rapport à x, on vérifie que $\partial u/\partial x$ satisfait dans D à l'équation

$$\frac{k(x)}{p(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left[\left(\frac{k(x)}{p(x)}\right)' + \frac{k'(x)}{p(x)}\right] \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{k'(x)}{p(x)}\right)' \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x,t)}{p(x)}\right).$$

En appliquant le lemme 4 à la fonction $\partial u/\partial x$ et à l'équation ci-dessus, l'assertion est immédiate.

La quantité $\bar{M}$ peut donc être majorée, en vertu du lemme 5, par une expression de la forme

$$\bar{M} \leqslant \alpha M + \beta ,$$

où α et β sont deux constantes explicitement déterminées, indépendantes de $u(x,t)$ et ne dépendant que de la forme du domaine D et des coefficients de l'équation (1).

§ 3. Théorèmes. Nous distinguerons deux cas essentiellement différents: les cas des domaines "croissants" respectivement "décroissants" par rapport à la variable x:

$$\xi_1(t') \geqslant \xi_1(t''), \qquad \xi_2(t') \leqslant \xi_2(t''), \qquad t' < t'',$$

respectivement

$$\xi_1(t') \leqslant \xi_1(t''), \qquad \xi_2(t') \geqslant \xi_2(t''), \qquad t' < t''.$$

Les autres cas peuvent être traités sur le modèle de ces deux cas principaux.

THÉORÈME 1. *Supposons que*

1° *la fonction* $u(x, t)$

(i) *satisfasse à l'équation* (1) *dans* D,

(ii) *admette la dérivée* $\partial u/\partial x$ *continue dans* $\bar{D}$,

(iii) *admette les dérivées* $\partial^3 u/\partial x^3$, $\partial^2 u/\partial x\partial t$, $\partial^2 u/\partial t\partial x$ *continues dans* D;

2°
$$\xi_1(t') \leqslant \xi_1(t''), \qquad \xi_2(t') \geqslant \xi_2(t'') \qquad pour \quad t' < t''.$$

Alors

$$m \leqslant \max\left\{(aM+\beta)l(0); \frac{M}{l(T)}\left[2T\frac{\max\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} k(x)}{\min\limits_{\bar{D}} p(x)} + \tfrac{1}{2}al(0)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{l(T)}\left[\frac{Q+F(T)}{\min\limits_{\bar{D}} p(x)} + \tfrac{1}{2}\beta l(0)^2\right]\right\}^{(2)}.$$

Démonstration. Soit (x^*, t^*) un point du domaine $\bar{D}$ où la fonction $|u(x, t)|$ prend le maximum de ses valeurs prises dans $\bar{D}$:

$$|u(x^*, t^*)| = m, \qquad (x^*, t^*) \in \bar{D}.$$

Si la fonction $z(x) \equiv u(x, t^*)$ s'annule dans l'intervalle $\xi_1(t^*) \leqslant x \leqslant \xi_2(t^*)$, alors la majoration suivante est évidente:

$$m \leqslant \bar{M}l(t^*) \leqslant (aM+\beta)l(0). \tag{3}$$

Si la fonction $z(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle en question, alors supposons-là positive sans restriction de la généralité.

Étant donné que $u(x, t^*)$ est supposée positive, on aura

$$m = u(x^*, t^*) \qquad [= \max_{\xi_1(t^*)\leqslant x\leqslant\xi_2(t^*)} u(x, t^*)],$$

et $u(x, t^*)$ peut être minorée de la façon suivante:

$$u(x, t^*) \geqslant m - |x-x^*|\bar{M} \qquad [\xi_1(t^*) \leqslant x \leqslant \xi_2(t^*)].$$

On en obtient, par un calcul élémentaire,

$$\int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} u(x, t^*)dx \geqslant l(t^*)m - \tfrac{1}{2}\bar{M}\{[x^*-\xi_1(t^*)]^2 + [\xi_2(t^*)-x^*]^2\} \tag{4}$$
$$\geqslant ml(t^*) - \tfrac{1}{2}\bar{M}l(t^*)^2 \geqslant ml(T) - \tfrac{1}{2}\bar{M}l(0)^2.$$

---

(2) Ici a et β sont les deux constantes introduites à la fin du § 2.

Intégrons l'équation (1) par rapport à x de $\xi_1(t)$ à $\xi_2(t)$ en tenant t fixe:

$$\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] dx = \left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi_1(t)}^{x=\xi_2(t)} = \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} p(x)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx - \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,.$$

En intégrant cette équation par rapport à t entre les limites $t = 0$ et $t = t^*$, nous obtenons (³):

$$(5)\qquad \int_0^{t^*} \left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi_1(t)}^{x=\xi_2(t)} dt$$

$$= \int_0^{t^*} \left\{\left[\int_{\xi_1(t)}^{\xi_1(t^*)} + \int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} + \int_{\xi_2(t^*)}^{\xi_2(t)}\right] p(x)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\right\} dt - \int_0^{t^*}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \int_{\xi_1(0)}^{\xi_1(t^*)} p(x)\left[u\left(x,\xi_1^{-1}(x)\right) - u(x,0)\right] dx + \int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} p(x)\left[u(x,t^*) - u(x,0)\right] dx +$$

$$+ \int_{\xi_2(t^*)}^{\xi_2(0)} p(x)\left[u\left(x,\xi_2^{-1}(x)\right) - u(x,0)\right] dx - \int_0^{t^*}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,dt$$

$$= -Q - \int_0^{t^*}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,dt + \int_{\xi_1(0)}^{\xi_1(t^*)} p(x)\,u\left(x,\xi_1^{-1}(x)\right) dx +$$

$$+ \int_{\xi_2(t^*)}^{\xi_2(0)} p(x)\,u\left(x,\xi_2^{-1}(x)\right) dx + \int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} p(x)\,u(x,t^*)\,dx\,.$$

Les intégrales qui figurent dans cette équation peuvent être majorées respectivement minorées de la manière suivante:

$$\int_0^{t^*} \left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi_1(t)}^{x=\xi_2(t)} dt \leqslant 2 \max_{\Sigma_1+\Sigma_2} k(x) M t^* \leqslant 2MT \max_{\Sigma_1+\Sigma_2} k(x)\,;$$

compte tenu de la positivité de $u(x,t)$ et de $p(x)$:

$$\int_{\xi_1(0)}^{\xi_1(t^*)} p(x)\,u\left(x,\xi_1^{-1}(x)\right) dx \geqslant 0\,, \qquad \int_{\xi_2(t^*)}^{\xi_2(0)} p(x)\,u\left(x,\xi_2^{-1}(x)\right) dx \geqslant 0\,;$$

(³) $t = \xi_i^{-1}(x)$ $(i = 1, 2)$ dénote l'inverse de la fonction $x = \xi_i(t)$. Pour obtenir une fonction univalente elle est définie par la relation

$$\xi_i^{-1}(x) = \min_{\xi_i(t)=x} t\,.$$

Il est facile à vérifier que le changement de l'ordre des intégrations par rapport à x et t est légitime.

en raison de la positivité de $p(x)$ et de (4):

$$\int\limits_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} p(x)u(x,t^*)dx \geqslant \min_{\bar{D}} p(x)[ml(T) - \tfrac{1}{2}\bar{M}l(0)^2]\,;$$

et finalement

$$F(t^*) \leqslant F(T)\,.$$

En substituant aux termes figurant dans (5) les bornes supérieures respectivement inférieures ci-dessus, l'inégalité à démontrer en découle.

Remarque. Si l'intervalle $\xi_1(t) \leqslant x \leqslant \xi_2(t)$ se contracte à un seul point pour $t \to T_0$, c'est-à-dire si

$$\lim_{T \to T_0 - 0} l(T) = 0\,,$$

alors la borne supérieure fournie par le théorème 1 tend vers l'infini pour $T \to T_0$. Nous montrerons que ce phénomène n'est pas une lacune de la méthode appliquée, mais est un caractéristique essentiel du problème.

Considérons la fonction

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{h(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-1+\tau)^2}{4(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+1-\tau)^2}{4(t-\tau)}}\right] d\tau\,.$$

Cette fonction satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

dans l'intérieur D du domaine $\bar{D}$ limité par l'axe x et par les droites $t = 1 - x$, $t = 1 + x$, dans des conditions assez faibles relatives à la fonction $h(\tau)$. Si $h(\tau) \to +\infty$ assez rapidement pour $\tau \to 1$, alors $u(x,t) \to +\infty$ pour $(x,t) \to (0,1)$, $(x,t) \in D$.

Étant donné que $u(x,t)$ est symétrique par rapport à l'axe t, on a

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \qquad (0 \leqslant t < 1)\,.$$

Il en découle l'existence d'un sous-domaine fermé $\bar{D}_\varepsilon$ de $\bar{D}$, contenant le segment $\{x = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, pour lequel

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \varepsilon, \qquad (x,t) \in [\bar{D}_\varepsilon - (x = 0, t = 1)]\,,$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitrairement petit. À l'encontre du fait que $|\partial u/\partial x|$ reste inférieure à une borne indépendante de T sur la frontière du domaine $\bar{D}_\varepsilon \times (0 \leqslant t \leqslant T)$ pour un $T < 1$ arbitraire, $u(x,t)$ ne reste pas bornée dans $\bar{D}_\varepsilon \times (0 \leqslant t \leqslant T)$ pour $T \to 1$.

THÉORÈME 2. *Supposons que*

1° *la condition* 1° *du Théorème* 1 *soit satisfaite;*

2° (i) $\xi_1(t') \geqslant \xi_1(t'')$, $\xi_2(t') \leqslant \xi_2(t'')$ *pour* $t' < t''$,

$$\text{(ii)} \qquad \frac{l(T)-l(0)}{l(0)} < \frac{\min\limits_{\overline{D}} p(x)}{\max\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} p(x)} \text{ (4)} .$$

Alors

$$m \leqslant \max\Big\{(aM+\beta)l(T);$$
$$\big(M[2T\max_{\Sigma_1+\Sigma_2} k(x) + \tfrac{1}{2}al(T)^2\min_{\overline{D}} p(x)] + Q + F(T) + \tfrac{1}{2}\beta l(T)^2 \min_{\overline{D}} p(x)\big) \times$$
$$\times \big(l(0)\min_{\overline{D}} p(x) - [l(T)-l(0)]\max_{\Sigma_1+\Sigma_2} p(x)\big)^{-1}\Big\} .$$

Démonstration. On peut entreprendre la démonstration analoguement à la démonstration du théorème précédent. Soit $(x^*, t^*) \in \overline{D}$ un point pour lequel on a

$$|u(x^*, t^*)| = m .$$

Si la fonction

$$z(x) = u(x, t^*)$$

s'annule dans l'intervalle $\xi_1(t^*) \leqslant x \leqslant \xi_2(t^*)$, alors on obtient l'inégalité analogue à (3):

$$\text{(3')} \qquad m \leqslant \overline{M}l(t^*) \leqslant (aM+\beta)l(T) .$$

Si elle ne s'annule pas, alors, en la supposant positive, on a l'inégalité suivante, analogue à (4):

$$\text{(4')} \qquad \int\limits_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} u(x, t^*)\,dx \geqslant ml(0) - \tfrac{1}{2}\overline{M}l(T)^2 .$$

---

(4) Si la condition 2° (ii) n'est pas réalisée, mais si l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$ peut être divisé par les points $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_s = T$ de telle façon que

$$\frac{l(T_{i+1}) - l(T_i)}{l(T_i)} < \frac{\min\limits_{\overline{D}_i} p(x)}{\max\limits_{\Sigma_{1i}+\Sigma_{2i}} p(x)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, s-1),$$

où

$$\overline{D}_i = \overline{D} \times (T_i \leqslant t \leqslant T_{i+1}) ,$$
$$\Sigma_{1i} = \Sigma_1 \times (T_i \leqslant t \leqslant T_{i+1}) ,$$
$$\Sigma_{2i} = \Sigma_2 \times (T_i \leqslant t \leqslant T_{i+1}) ,$$

alors la majoration de m peut être établie graduellement, en progressant de $\overline{D}_i$ à $\overline{D}_{i+1}$.

Dans ce cas la relation suivante, analogue à (5), est valable:

$$(5') \quad \int_0^{t^*} \left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi_1(t)}^{x=\xi_2(t)} dt = -Q - \int_0^{t^*}\int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} f(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_1(0)} p(x)u\big(x,\xi_1^{-1}(x)\big)dx - \int_{\xi_2(0)}^{\xi_2(t^*)} p(x)u\big(x,\xi_2^{-1}(x)\big)dx + \int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_2(t^*)} p(x)u(x,t^*)dx\,.$$

Dans cette égalité les deux intégrales, essentiellement différentes— par leur signe—des intégrales analogues figurant dans (5), peuvent se majorer comme suit:

$$\int_{\xi_1(t^*)}^{\xi_1(0)} p(x)u\big(x,\xi_1^{-1}(x)\big)dx \leqslant \max_{\Sigma_1} p(x)\,m[\xi_1(0)-\xi_1(t^*)]$$
$$\leqslant \max_{\Sigma_1} p(x)\,m[\xi_1(0)-\xi_1(T)]\,,$$

$$\int_{\xi_2(0)}^{\xi_2(t^*)} p(x)u\big(x,\xi_2^{-1}(x)\big)dx \leqslant \max_{\Sigma_2} p(x)\,m[\xi_2(T)-\xi_2(0)]\,.$$

En substituant aux termes dans (5′) les bornes établies ci-dessu respectivement sous (4′) et dans la démonstration du théorème précédent, il en découle l'assertion.

Travaux cités

[1] M. Krzyżański, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), p. 131-135.

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1962