ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1965)

Su alcuni teoremi di inclusione

di C. MIRANDA (Napoli)

Alcuni anni orsono E. Gagliardo [2] e L. Nirenberg [7] pervennero indipendentemente l'uno dall'altro ad alcuni teoremi di inclusione che costituiscono un notevole complemento dei classici teoremi di Sobolev [8]. Più precisamente il risultato ottenuto dai predetti autori consiste nel fatto che se una funzione u, definita in un aperto di R^n, per il quale è soddisfatta la proprietà di cono, ed ivi dotata di derivate r-esime sommabili con esponente p, ha essa stessa un esponente di sommabilità maggiore di quello indicato dal teorema di Sobolev una proprietà analoga vale per l'esponente di sommabilità delle derivate di u di ordine minore di r.

In questo lavoro mi propongo di stabilire delle limitazioni per le derivate prime della u in funzione delle norme in L^p delle derivate r-esime e di un coefficiente di Hölder locale della u. Segue da tali limitazioni che, in opportune ipotesi per l'esponente della predetta condizione di Hölder, l'esponente di sommabilità delle derivate prime risulta maggiore di quello indicato dai teoremi di Gagliardo e Nirenberg. Combinando poi questi ultimi teoremi con i risultari della presente nota sarebbe immediato stabilire proprietà analoghe per le derivate di ordine intermedio fra 1 e r, ma di ciò non ci occuperemo, salvo che in un caso particolare.

Il metodo seguito si basa su procedimenti analoghi a quelli adoperati da E. Gagliardo nel lavoro già citato e nel precedente lavoro [1]. I risultati principali sono quelli riassunti nei teoremi III e IV; da essi seguono poi i teoremi di inclusione VI e VII che concludono il presente lavoro.

1. Notazioni e risultati. Sia Ω un aperto limitato di R^n dotato della proprietà di cono. Per ogni funzione $u \in C^{(r)}(\Omega)$ porremo:

$$|u|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad |D^r u|_p = \sup_{|\varrho|=r} |D^\varrho u|_p,$$

avendo indicato con ϱ un qualunque sistema di indici non negativi $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ed essendo:

$$|\varrho| = i_1 + i_2 + \ldots + i_n, \qquad D^\varrho = \frac{\partial^{|\varrho|}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}.$$

Indicheremo con $\Gamma^{r,p}$ il sottoinsieme di $C^{(r)}(\Omega)$ costituito dalle funzioni u per le quali risulta finita la norma

$$|||u|||_{r,p} = |u|_p + |D^r u|_p$$

e con $H^{r,p}$ il completamento di $\Gamma^{r,p}$ rispetto a tale norma.

Se poi $0 \leqslant a \leqslant 1$ diremo $C^{(0,a)}$ lo spazio delle funzioni definite in Ω che in ogni parallelepipedo contenuto in Ω soddisfano ad una condizione di Hölder di esponente a con un coefficiente di Hölder $[u]_a$ indipendente dal parallelepipedo considerato. In altre parole se $u \in C^{(0,a)}$ si ha:

$$|u(x') - u(x'')| \leqslant [u]_a |x' - x''|^a$$

per ogni coppia di punti x', x'' appartenenti ad un parallelepipedo contenuto in Ω.

Diremo infine $C^{(r,a)}$ lo spazio delle funzioni definite in Ω e tali che le loro derivate di ordine r appartengano a $C^{(0,a)}$; per tali funzioni porremo:

$$[D^r u]_a = \sup_{|\varrho| = r} [D^\varrho u]_a .$$

Se poi il simbolo $[u]_a$ deve intendersi riferito non ad Ω ma ad un suo sottoinsieme aperto Δ lo indicheremo con $[u]_a^\Delta$ e così per $[D^r u]_a$.

Come già si è detto nell'introduzione, scopo di questo lavoro è di stabilire delle limitazioni per le derivate prime di una funzione u che per ipotesi appartenga ad $H^{r,p} \cap C^{(0,a)}$ con $r \geqslant 2$. Il caso più semplice, nel quale è possibile rispondere a questa questione in base a limitazioni già note, è quello in cui risulta:

$$\frac{1}{p} < \frac{r-1}{n}. \tag{1.1}$$

Cominciamo col ricordare (vedi Gagliardo [1]) che un aperto limitato Ω dotato della proprietà di cono può essere ricoperto da un numero finito di suoi sottoinsiemi aperti $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(l)}$, ciascuno dei quali $\Omega^{(i)}$ sia l'unione di un insieme di parallelepipedi $\Pi^{(i)}$ ottenibili l'uno dall'altro a mezzo di traslazioni. Detto allora Π uno qualunque dei parallelepipedi $\Pi^{(i)}$ ricordiamo [1] che esiste una costante K per la quale si ha per $0 < k + \mu \leqslant m + \beta$:

$$[D^k u]_\mu^\pi \leqslant K\left[([D^m u]_\beta^\pi)^{(k+\mu-a)/(m+\beta-a)}([u]_a^\pi)^{(m+\beta-k-\mu)/(m+\beta-a)} + [u]_a^\pi\right]. \tag{1.2}$$

[1] Tale formula è la generalizzazione di altre stabilite, da Miranda nel n. 33 di [5] e da Nirenberg [7], in condizioni più particolari. Detta generalizzazione non presenta alcuna difficoltà.

Inoltre se m è l'intero positivo per cui riesce:

$$\frac{r-m-1}{n} \leqslant \frac{1}{p} < \frac{r-m}{n},$$

detto x_0 un qualunque punto di Π si ha, per un noto teorema di Sobolev (vedi Sobolev [8] e anche Gagliardo [1], Nirenberg [7], Miranda [6]) applicato ad $u(x)-u(x_0)$:

$$[D^m u]_\beta^\pi \leqslant K'\big[|D^r u|_p + [u]_\alpha\big] \tag{1.3}$$

con

$$\beta = r - m - \frac{n}{p}$$

e K' dipendente da Ω e p, e anche da β se $p > 1$. Scrivendo allora la (1.2) con $k = m$ e $\mu \leqslant \beta$ e valendosi della (1.3) si ha:

$$[D^m u]_\mu^\pi \leqslant K''\big[|D^r u|_p^{(m+\mu-\alpha)/(m+\beta-\alpha)}[u]_\alpha^{(\beta-\mu)/(m+\beta-\alpha)} + [u]_\alpha\big]\,.$$

Tale formula sussiste poi anche per qualunque parallelepipedo $\Pi \subset \Omega$, come subito si riconosce tenendo presente che un tale Π può essere ricoperto da un numero finito di parallelepipedi $\Pi^{(i)}$. Possiamo dunque concludere col seguente teorema:

TEOREMA I. *Se r, m, α, p, β_0 sono numeri reali, dei quali i primi due interi, verificanti le limitazioni*:

$$r \geqslant 2\,, \qquad m \geqslant 1\,, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\,, \qquad p \geqslant 1\,,$$

$$0 < \beta_0 \leqslant \beta = r - m - \frac{n}{p} \leqslant 1$$

esiste una costante K, dipendente solo da Ω, r, β_0, tale che per ogni funzione $u \in H^{r,p} \cap C^{(0,\alpha)}$ risulta:

$$[D^m u]_\mu \leqslant K\big[|D^r u|_p^\sigma [u]_\alpha^{1-\sigma} + [u]_\alpha\big] \tag{1.4}$$

con $\mu \leqslant \beta$ e

$$\sigma = \frac{m+\mu-\alpha}{m+\beta-\alpha}\,. \tag{1.5}$$

Se $p = 1$ si può anche assumere $\beta = 0$.

Valendosi poi della (1.2) con $k = m-1$ e $\mu = 1$ si ha analogamente che:

TEOREMA II. *Nelle stesse ipotesi del teorema* I *sussiste una limitazione del tipo*:

$$\sup_{|\varrho|=m}\ \sup_{x\in\Omega} |D^\varrho u(x)| \leqslant K\big[|D^r u|_p^\sigma [u]_\alpha^{1-\sigma} + [u]_\alpha\big] \tag{1.6}$$

con K dipendente solo da Ω, r, β_0 e con

$$\sigma = \frac{m-\alpha}{m+\beta-\alpha}. \tag{1.7}$$

Se è $p = 1$ si può anche assumere $\beta_0 = 0$.

È infine ovvio che, se interessano delle limitazioni per le derivate di ordine minore di r, in particolare per le derivate prime, combinando la (1.2) con la (1.4) o con la (1.6) si ottiene agevolmente il risultato desiderato.

Più riposto è il risultato analogo nel caso che sia:

$$\frac{r-1}{n} \leqslant \frac{1}{p}. \tag{1.8}$$

In tal caso alla questione che ci siamo proposti si può dare la risposta contenuta nel teorema seguente:

TEOREMA III. *Sia $r \geqslant 2$ un numero intero e siano α, p, a, numeri reali soddisfacenti la* (1.8) *e le limitazioni*:

$$0 \leqslant \alpha < 1, \quad p \geqslant 1, \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{r-1} \leqslant a \leqslant 1. \tag{1.10}$$

Detta h la massima radice dell'equazione:

$$\frac{2-\alpha}{h(1-\alpha)+\alpha} - \frac{1-\alpha}{h} - \frac{1}{n} - a\left(\frac{1}{p} - \frac{r-1}{n}\right) = 0 \tag{1.11}$$

e posto:

$$\sigma = \frac{a[h(1-\alpha)+\alpha]}{a[h(1-\alpha)+\alpha]+h-\alpha}, \tag{1.12}$$

esiste una costante H dipendente solo da Ω, r, p, tale che per ogni funzione $u \in H^{r,p} \cap C^{(0,\alpha)}$ riesce:

$$|Du|_h \leqslant H\left[|D^r u|_p^\sigma [u]_\alpha^{1-\sigma} + [u]_\alpha\right]. \tag{1.13}$$

Rimandando la dimostrazione di questo teorema al n. 4, cominciamo con l'osservare che nel caso $r = 2$ esso assume una forma più semplica dovuta al fatto che, essendo necessariamente per la (1.10): $a = 1$, la (1.11) si riduce ad un'equazione di primo grado in h. Essendo inoltre lecito in questo caso prescindere dall'ipotesi (1.8), si ha così il teorema:

TEOREMA IV. *Se α e p verificano le* (1.9), *posto*:

$$h = \frac{p(2-\alpha)-\alpha}{1-\alpha}, \tag{1.14}$$

$$\sigma = p/h, \tag{1.15}$$

esiste una costante H, dipendente solo da Ω e p, tale che per ogni funzione $u \in H^{2,p} \cap C^{(0,\alpha)}$ riesce:

$$|Du|_h \leqslant H\big[|D^2u|_p^\sigma[u]_\alpha^{1-\sigma} + [u]_\alpha\big]. \tag{1.16}$$

Vedremo in seguito, nel n. 4, che la dimostrazione del teorema III si riconduce immediatamente a quella del teorema IV, che sarà svolta nel n. 3, dopo aver stabilito nel n. 2 alcuni lemmi preliminari. Vogliamo ora, invece, discutere il risultato enunciato nel teorema III per $r > 2$.

Indicato con $\varphi(h, a, \alpha)$ il primo membro della (1.11) osserviamo intanto che si ha:

$$\lim_{h\to 0^+} \varphi(h, a, \alpha) = -\infty, \qquad \lim_{h\to\infty} \varphi(h, a, \alpha) < 0 .$$

La prima di tali formule è infatti evidente, mentre la seconda segue dalla (1.1). D'altra parte si ha facilmente:

$$\varphi(2, a, \alpha) > 0 ,$$

onde segue che la (1.11) ha due radici positive. Se h è, per detta equazione, la più grande delle due radici, si ha anzi:

$$h > 2 . \tag{1.17}$$

Consideriamo ora tale massima radice come funzioni di a e α:

$$h = h(a, \alpha) ,$$

e cerchiamo di stabilire come conviene assumere a per ottenere per h il più grande valore possibile.

Osserviamo che, poichè la φ come funzione di h ammette un solo punto di massimo relativo nell'intervallo $(0, +\infty)$, si ha ovviamente per $h = h(a, \alpha)$:

$$\varphi_h(h, a, \alpha) < 0 . \tag{1.18}$$

D'altra parte è anche:

$$\varphi_a(h, a, \alpha) = \frac{1}{h} - \left(\frac{1}{p} - \frac{r-1}{n}\right)$$

e quindi, posto:

$$\frac{1}{h_0} = \frac{1}{p} - \frac{r-1}{n} ,$$

si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial a} \lesseqgtr 0 \qquad \text{per} \qquad h \gtreqless h_0 .$$

Osserviamo che, in forza delle (1.17) (1.18), si ha $\partial h/\partial \alpha > 0$ e inoltre:

$$h(a, 0) = \frac{nh_0(1+a)}{h_0 + na}, \qquad \lim_{\alpha\to 1} h(a, \alpha) = +\infty .$$

Ne segue che, se è $h_0 < n$ ossia:

$$\frac{1}{p} > \frac{r}{n}, \tag{1.19}$$

riesce $h(a, \alpha) > h_0$ qualunque siano a ed α e quindi $\partial h/\partial a < 0$. Se invece è $h_0 \geqslant n$ ossia:

$$\frac{r-1}{n} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{r}{n}, \tag{1.20}$$

si ha:

$$h(a, \alpha) \gtreqless h_0 \quad \text{per} \quad a \lesseqgtr \alpha_0 ,$$

essendo:

$$\alpha_0 = \frac{h_0(h_0 - n)}{h_0^2 - h_0 - n} \tag{1.21}$$

e risultando: $0 \leqslant \alpha_0 < 1$.

Riassumendo queste considerazioni possiamo enunciare il

TEOREMA V. *Nelle ipotesi del teorema* III *con* $r > 2$ *e se inoltre è verificata la* (1.19), *la massima radice* h *della* (1.11) *è funzione decrescente di* a. *Nell'ipotesi* (1.20) *la* h *è invece funzione crescente di* a *per* $a < \alpha_0$ *e funzione decrescente di* a *per* $a > \alpha_0$, *essendo* α_0 *dato dalla* (1.21). *Infine per* $a = \alpha_0$ *si ha per qualunque valore di* a: $h = h_0$.

Osserviamo ora che da questo risultato segue un teorema di inclusione di $H^{r,p} \cap C^{(0,\alpha)}$ in $H^{1,h}$. Si ha però che solo se si suppone:

$$r - \frac{n}{p} < \alpha < 1 \tag{1.22}$$

tale teorema può dire qualcosa di nuovo nei confronti del teorema di Sobolev. Infatti, se è: $r - \dfrac{n}{p} \geqslant 1$, si ha per il teorema di Sobolev $H^{r,p} \subset C^{(0,\beta)}$ con qualunque $\beta < 1$ e quindi l'ipotesi $u \in H^{r,p} \cap C^{(0,\alpha)}$ non può dare nulla di nuovo nei confronti del predetto teorema. Analoga osservazione vale anche nel caso $\alpha < r - \dfrac{n}{p} < 1$, perchè in tale ipotesi si ha $H^{r,p} \subset C^{(0,\beta)}$ con $\beta = r - \dfrac{n}{p} > \alpha$.

Invece, se è soddisfatta la condizione (1.22), dal teorema III si trae un teorema di inclusione che non è contenuto nè in quello di Sobolev nè in quello di Gagliardo Nirenberg e che vogliamo esplicitamente enunciare tenendo conto anche del teorema V:

TEOREMA VI. *Nelle ipotesi del teorema* III *e se inoltre sussiste la* (1.22), *detta* h *la massima radice dell'equazione*:

$$\frac{2-\alpha}{h(1-\alpha)+\alpha} - \frac{1}{r-1}\left(\frac{r-2}{h} + \frac{1}{p}\right) = 0 , \tag{1.23}$$

sussiste la relazione d'inclusione:

$$H^{r,p} \cap C^{(0,a)} \subset H^{1,h}\,.$$

Per ogni funzione $u \in H^{r,p} \cap C^{(0,a)}$ *sussiste la limitazione* (1.13) *con* H *dipendente solo da* Ω, r, p, *e con*

$$\sigma = \frac{h(1-a)+a}{h(1-a)+a+(h-a)(r-1)}\,. \tag{1.24}$$

Si ha anche che:

TEOREMA VII. *Nelle ipotesi del teorema precedente e se è* $q < h$ *l'inclusione di* $H^{r,p} \cap C^{(0,a)}$ *in* $H^{1,q}$ *è completamente continua.*

Ciò segue dal fatto che per un teorema di V. I. Kondrashov ([3], [4]) risulta completamente continua l'inclusione di $H^{r,p}$ in H^{1,h_0} (vedi anche Gagliardo [1]) e dopo ciò, essendo come si è visto a proposito del teoremi: $h > h_0$, la limitazione (1.13) è notoriamente sufficiente per provare l'asserto.

2. Lemmi preliminari.

Cominciamo col dimostrare il seguente

LEMMA 2.1. *Esistono due costanti* γ_1 *e* γ_2 *tali che per qualsiasi funzione* $u(x)$ *definita nell'intervallo chiuso* $(0, l)$ *ed ivi di classe* $C^{(2)}$ *risulta*:

$$\max|u'| \leqslant \gamma_1[u]_a^{1-p\beta}\Big(\int_0^l |u''|^p dx\Big)^\beta + \gamma_2 l^{a-1}[u]_a \tag{2.1}$$

con

$$0 \leqslant a \leqslant 1, \qquad p \geqslant 1, \qquad \beta = \frac{1-a}{p(2-a)-1}\,.$$

Esiste anche una costante γ *tale che, se* u' *si annulla in almeno un punto di* $(0, l)$, *si ha*:

$$\max|u'| \leqslant \gamma[u]_a^{1-p\beta}\Big(\int_0^l |u''|^p dx\Big)^\beta. \tag{2.2}$$

Comunque si consideri un intervallo $I \equiv (a, a+\lambda)$ contenuto in $(0, l)$ si ha intanto, in forza di un lemma di Gagliardo ([2]):

$$\max_{x\in I}|u'(x)| \leqslant c_1\big(\max_{x\in I}|u(x)|\big)^{(p-1)/(2p-1)}\Big(\int_a^{a+\lambda} |u''|^p dx\Big)^{1/(2p-1)} + c_2\lambda^{-1}\max_{x\in I}|u(x)|\,. \tag{2.3}$$

([2]) La (2.3), che è evidente per $p = 1$, è stata dimostrata da Gagliardo (vedi Lemma [1.1] di [2]) supponendo $p > 1$ e con c_1 e c_2 dipendenti da p. Un semplice riesame della dimostrazione mostra però che la (2.3) sussiste per $p \geqslant 1$ con c_1 e c_2 non dipendenti da p.

Poichè nella (2.3) si può sostituire $u(x)$ con $u(x)-u(x_0)$, essendo x_0 un qualunque punto di I, si ha:

$$(2.4)\qquad \max_{x\in I}|u'(x)| \leqslant c_1(\lambda^\alpha[u]_\alpha^I)^{(p-1)/(2p-1)}\Big(\int_a^{a+\lambda}|u''|^p dx\Big)^{1/(2p-1)} + c_2\lambda^{\alpha-1}[u]_\alpha^I .$$

Poichè il punto di $(0, l)$ in cui $|u'(x)|$ assume il suo massimo valore può essere sempre considerato come appartenente ad un intervallo di ampiezza λ, qualunque sia $\lambda \leqslant l$, si trae dalla (2.4)

$$(2.5)\qquad \max_{x\in(0,l)}|u'(x)| \leqslant c_1(\lambda^\alpha[u]_\alpha)^{(p-1)/(2p-1)}\Big(\int_0^l|u''|^p dx\Big)^{1/(2p-1)} + c_2\lambda^{\alpha-1}[u]_\alpha ,$$

dove $[u]_\alpha$ è relativo all'intervallo $(0, l)$ e λ è un arbitrario numero di $(0, l)$. Ne segue che $|u'(x)|$ sarà maggiorato dal minimo valore assunto in $(0, l)$ dalla funzione di λ a secondo membro della (2.5).

Sussiste ora il seguente lemma elementare:

Lemma 2.2. *Se A, B, a, b sono numeri reali positivi, posto:*

$$\varphi(\lambda) = A\lambda^a + B\lambda^{-b} ,$$

si ha:

$$(2.6)\qquad \inf_{\lambda\in(0,l)}\varphi(\lambda) \leqslant A^{b/(a+b)}B^{a/(a+b)}\Big[\Big(\frac{b}{a}\Big)^{a/(a+b)} + \Big(\frac{a}{b}\Big)^{b/(a+b)}\Big] + l^{-b}B .$$

Valendosi allora della (2.6) per maggiorare il minimo del secondo membro della (2.5) si perviene facilmente ad una limitazione del tipo (2.1) con

$$\gamma_1 = c_1^\theta c_2^{1-\theta}\Big[\Big(\frac{\theta}{1-\theta}\Big)^{1-\theta} + \Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{\theta}\Big] , \qquad \gamma_2 = c_2 ,$$

avendo posto:

$$\theta = \frac{(2p-1)(1-\alpha)}{p(2-\alpha)-1} .$$

Poichè $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ ne segue che per $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $p \geqslant 1$ la γ_1 è una funzione limitata di α e p e di qui la prima parte del Lemma 2.1. Per dimostrare ora la (2.2) nell'ipotesi che u' si annulli in almeno un punto di $(0, l)$ ricordiamo ([3]) che in tale ipotesi si può, nella (2.3) scritta per $I \equiv (0, l)$, assumere $c_2 = 0$ con che si ha:

$$\max_{x\in(0,l)}|u'(x)| \leqslant c_1(l^\alpha[u]_\alpha)^{(p-1)/(2p-1)}\Big(\int_0^l|u''|^p dx\Big)^{1/(2p-1)} .$$

Da tale formula segue subito la (2.2) se si suppone che sia:

$$(2.7)\qquad l^{1-\alpha} \leqslant ([u]_\alpha)^{p\beta}\Big(\int_0^l|u''|^p dx\Big)^{-\beta} ,$$

([3]) Vedi loco cit. in ([2]).

mentre nel caso che sussista la diseguaglianza opposta alla (2.7) la (2.2) può ottenersi dalla (2.1).

Dimostriamo ora che:

LEMMA 2.3. *Esiste una costante H tale che per ogni funzione $u(x)$ definita nell'intervallo $(0, l)$ ed ivi di classe $C^{(2)}$ risulta:*

$$\int_0^l |u'|^h dx \leqslant H\Big[l^a[u]_a^{h-p}\int_0^l |u''|^p dx + l^{ah-h+1}[u]_a^h\Big], \tag{2.8}$$

con $0 \leqslant a \leqslant 1$, $p \geqslant 1$ ed h dato dalla (1.14).

Esiste anche una costante H_1 tale che, se u' si annulla in almeno un punto di $(0, l)$ risulta:

$$\int_0^l |u'|^h dx \leqslant H_1 l^a[u]_a^{h-p}\int_0^l |u''|^p dx. \tag{2.9}$$

Supponiamo in primo luogo che $u'(x)$ si annulli in almeno un punto di $(0, l)$. Si può allora suddividere questo intervallo nella somma dell'insieme chiuso in cui $u' = 0$ e di un numero finito o di un'infinità numerabile di intervalli $\{\Delta_i\}$ in ciascuno dei quali la u' non cambia segno annullandosi solamente in uno o in entrambi gli estremi. Detta δ_i l'ampiezza di Δ_i si ha:

$$\int_{\Delta_i} |u'|\, dx \leqslant \delta_i^a[u]_a \leqslant l^a[u]_a$$

e quindi poichè $h > 1$:

$$\int_{\Delta_i} |u'|^h dx \leqslant l^a[u]_a \max_{x\in\Delta_i} |u'(x)|^{h-1}. \tag{2.10}$$

Tenendo conto della (2.2) e del fatto che $h-1 = \beta^{-1}$ si ha dopo ciò:

$$\int_{\Delta_i} |u'|^h dx \leqslant \gamma l^a[u]_a^{h-p}\int_{\Delta_i} |u''|^p dx$$

e sommando rispetto a i si ha la (2.9).

Se poi u' non è mai nulla in $(0, l)$ basta scrivere la (2.10) con $\Delta_i \equiv (0, l)$ e applicare la (2.1) per ottenere la (2.8).

3. Dimostrazione del teorema IV. Si è già ricordato nel n. 1 che un aperto limitato Ω dotato della proprietà di cono può essere ricoperto da un numero finito di suoi sottoinsiemi aperti $\Omega^{(i)}$ ciascuno dei quali è l'unione di un insieme di parallelepipedi $\Pi^{(i)}$ ottenibili l'uno dall'altro a mezzo di traslazioni. Per dimostrare il teorema IV potremo dunque limitarci a considerare il caso in cui Ω coincide con uno dei predetti insiemi $\Omega^{(i)}$. Non sarà inoltre limitativo supporre che i parallelepipedi $\Pi^{(i)}$ siano dei cubi di lato δ con gli spigoli paralleli agli assi coordinati, potendocisi sempre ricondurre a questo caso con un cambiamento di variabili. Sempre in conseguenza della supposta proprietà di cono per l'aperto Ω, si ha inoltre che l'intersezione ω_j di Ω con una generica parallela all'asse x_j è costituita da un unico segmento di lunghezza compresa fra δ e 2δ (4). Per dimostrare ora la (1.16) nell'ipotesi che sia $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ basta scrivere la (2.8) identificando x con x_j e $(0, l)$ con ω_j, indi integrare rispetto alle altre variabili nella proiezione Ω_j di Ω sull'iperpiano $x_j = 0$. Si ha così una diseguaglianza del tipo:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^h dx \leqslant H' \left[[u]_a^{h-p} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u^2}{\partial x_j^2} \right|^p dx + [u]_a^h \right],$$

dalla quale, tenendo presente la (1.15), segue facilmente la (1.16). Se ora $u \in H^{2,p}$ è possibile per un teorema di Gagliardo (5) costruire una successione $\{u^{(m)}\}$ di funzioni di classe $C^\infty(R^n)$ tali da risultare:

$$\lim_{m\to\infty} |||u - u^{(m)}|||_{2,p} = 0$$

ed è anche facile verificare l'esistenza di una costante γ tale che, se $u \in H^{2,p} \cap C^{(0,a)}$, si ha:

$$[u^{(m)}]_a \leqslant \gamma [u]_a .$$

Dopo ciò, scrivendo la (1.16) con $u^{(m)}$ al posto di u e passando poi al limite per $m \to \infty$, si perviene ad una diseguaglianza dello stesso genere per la u.

4. Dimostrazione del teorema III. In questo numero valendoci del teorema di Gagliardo Nirenberg (6) e dei risultati del n. 3 vogliamo dimostrare il teorema III nel caso $r > 2$. Per quanto si è detto nel n. 3, anche qui sarà sufficiente di stabilire la validità del risultato per $u \in C^{(r)}(\Omega)$.

Supposto dunque che h sia radice della (1.11) e posto:

$$p_0 = h, \qquad s = \frac{h(1-a)+a}{2-a},$$

si ha:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{n} + a\left(\frac{1}{p} - \frac{r-1}{n}\right) + \frac{1-a}{p_0}.$$

(4) Quest'ultima circostanza dipende dal fatto che i parallelepipedi $\Pi^{(i)}$ possono sempre essere costruiti in modo che due di essi abbiano i centri a distanza minore di $\delta/2$; in proposito vedi il teorema [1.1] di [1].

(5) Vedi [1], teor. [2.1]. La dimostrazione di questo teorema è svolta da Gagliardo nell'ipotesi $u \in W_p^r$, ma è facile verificare che essa si adatta anche al caso $u \in H^{r,p}$.

(6) Per tale teorema rimandiamo alla formulazione datane in [6].

Per il teorema di Gagliardo Nirenberg applicato a ciascuna delle derivate prime di u esiste una costante K_0, dipendente solo da Ω, r, p (7), tale che per ogni a verificante la (1.10) riesce:

$$|D^2u|_s \leqslant K_0[|D^r u|_p^a |Du|_h^{1-a} + |Du|_h]. \tag{4.1}$$

D'altra porte, poichè

$$h = \frac{(2-a)s-a}{1-a},$$

si ha per il teorema IV:

$$|Du|_h \leqslant K_1 |D^2u|_s^{\sigma_1} [u]_a^{1-\sigma_1} + [u]_a, \tag{4.2}$$

con

$$\sigma_1 = \frac{h(1-a)+a}{h(2-a)}.$$

E dalle (4.1) e (4.2) segue facilmente la (1.13) con σ dato dalla (1.12).

(7) Per $a \to 1$ si ha $h \to +\infty$, ma, fissato p, rimane inferiormente limitata la quantità $\frac{1}{rp} + \frac{r-1}{rp_0}$ e ciò basta affinchè K_0 non dipenda da a. Il teorema è enunciato supponendo $a < 1$, perchè per $a = 1$ esso diventa banale.

Bibliografia

[1] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche di Mat. Napoli 7 (1958), p. 102-137.

[2] — *Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche di Mat. Napoli 8 (1959), p. 24-51.

[3] V. I. Kondrashov, *Alcune valutazioni per famiglie di funzioni verificanti disuguaglianze integrali*, Doklady Akad. Nauk SSSR 18 (1938), p. 235-240, in russo.

[4] — *Alcune proprietà delle funzioni in più variabili*, Doklady Akad. Nauk SSSR 48 (1945), p. 535-538, in russo.

[5] C. Miranda, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Ergeb. der Math. N. F. Heft 2.

[6] — *Su alcune disuguaglianze integrali*, Mem. Acc. Lincei 7 (1963), p. 1-14.

[7] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations* (*Lecture II*), Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 13 (1959), p. 123-131.

[8] S. L. Sobolev, *Alcune applicazioni dell'analisi funzionale alla fisica matematica*, Leningrad 1950, in russo.

Reçu par la Rédaction le 6. 12. 1963