ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Une remarque sur l'existence d'une solution périodique d'une équation différo-différentielle au deuxième membre croissant

par Z. Mikołajska (Kraków)

J'ai communiqué à la conférence sur les Oscillations non linéaires à Berlin un théorème sur l'existence des solutions périodiques d'une équation différo-différentielle à paramètre retardé. Dans la note présente nous allons démontrer un théorème plus général et plus commode pour les applications.

§ 1. Envisageons une équation différo-différentielle suivante

$$x^{\cdot\cdot}(t) = f\big(t, x(t), x^{\cdot}(t), x\big(t-\Delta(t)\big), x^{\cdot}\big(t-\Delta(t)\big)\big) \tag{1.1}$$

avec le deuxième membre $f(t, x, y, u, v)$ défini pour $t \geqslant 0, x, y, u, v$ arbitraires continu par rapport à (t, x, y, u, v). Admettons les hypothèses suivantes

Hypothèse A. *La fonction $\Delta(t)$ est continue pour $t \geqslant 0$ et périodique avec la période $T > 0$,*

$$\Delta(t) \geqslant 0, \quad \Delta(0) = \Delta(T) = 0. \tag{1.2}$$

Hypothèse B. *$f(t, x, y, u, v)$ est continue par rapport à (t, x, y, u, v) et périodique avec la période T par rapport à t,*

$$f(t+T, x, y, u, v) = f(t, x, y, u, v), \tag{1.3}$$

la fonction $f(t, x, y, u, v)$ est croissante

$$f(t, x, y, u, v) < f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) \quad \text{pour} \quad (x, y, u, v) < (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) \tag{1.4}$$

c'est-à-dire pour $(x, y, u, v) \neq (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})$, $x \leqslant \bar{x}$, $y \leqslant \bar{y}$, $u \leqslant \bar{u}$, $v \leqslant \bar{v}$. Pour chaque condition initiale (x_0, y_0) la solution de (1.1) $x(t; x_0, y_0)$ telle que

$$x(0; x_0, y_0) = x_0, \quad x^{\cdot}(0; x_0, y_0) = y_0 \tag{1.5}$$

est défini dans tout intervalle $0 \leqslant t \leqslant T$.

LEMME 1. *Les hypothèses* A *et* B *étant supposées pour chaque* x_0 *il existe un* $y(x_0)$ *telle que*

$$x(T;\, x_0,\, y(x_0)) = x(0;\, x_0,\, y(x_0)) = x_0\,. \tag{1.6}$$

Démonstration. Envisageons une solution $x(t)$ (quelconque) de l'équation (1.1). Supposons qu'elle ne satisfait pas à la condition (1.6),

$$x(0) = x_0\,, \qquad x^{\cdot}(0) = y_0$$

et que par exemple

$$x(T) > x(0) = x_0\,. \tag{1.7}$$

En vertu de (1.2) et de la croissance de la fonction f chaque solution $x(t;\, \xi_0,\, \eta_0)$ de (1.1) telle que $y_0 \leqslant \eta_0$, $x_0 \leqslant \xi_0$ satisfait à l'inégalité

$$x^{\cdot}(t;\, x_0,\, y_0) \leqslant x^{\cdot}(t;\, \xi_0,\, \eta_0) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,. \tag{1.8}$$

Envisageons une solution $x(t;\, \xi_0,\, \mu_0)$ telle que

$$\mu_0 < \eta_0\,. \tag{1.9}$$

En vertu de (1.9) et la croissance de f par rapport à (x, y, u, v) on obtient des inégalitées

$$\begin{gathered} x^{\cdot\cdot}(t;\, \xi_0,\, \mu_0) < x^{\cdot\cdot}(t;\, \xi_0,\, \eta_0)\,, \qquad x^{\cdot}(t;\, \xi_0,\, \mu_0) < x^{\cdot}(t;\, \xi_0,\, \eta_0)\,, \\ x(t;\, \xi_0,\, \mu_0) < x(t;\, \xi_0,\, \eta_0) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Posons

$$\max_{t\in[0,T]} |x^{\cdot\cdot}(t;\, \xi_0,\, \eta_0)| = m(\xi_0,\, \eta_0)\,.$$

On a

$$x^{\cdot\cdot}(t;\, \xi_0,\, \mu_0) < m(\xi_0,\, \eta_0)$$

et par suite

$$x^{\cdot}(t;\, \xi_0,\, \mu_0) < m(\xi_0,\, \eta_0)t + \mu_0 \leqslant m(\xi_0,\, \eta_0)T + \mu_0$$

pour

$$\mu_0 < -m(\xi_0,\, \eta_0)T \tag{1.11}$$

on a donc

$$x^{\cdot}(t;\, \xi_0,\, \mu_0) < 0 \qquad \text{dans tout intérvalle } [0,\, T]$$

et par suite

$$x(T;\, \xi_0,\, \mu_0) < x(0;\, \xi_0,\, \mu_0) \tag{1.12}$$

(pour μ_0 satisfaisant à (1.11)). De l'inégalité (1.8) il vient que

$$x(T;\, \xi_0,\, \eta_0) - x(0;\, \xi_0,\, \eta_0) > x(T;\, x_0,\, y_0) - x(0;\, x_0,\, y_0)$$

d'où en vertu de (1.7) on obtient

$$x(T;\, \xi_0,\, \eta_0) - x(0;\, \xi_0,\, \eta_0) > 0\,. \tag{1.13}$$

Des inégalitées (1.13) et (1.12) en vertu de la continuité de $A(y) = x(T;\xi_0,y)-x(0;\xi_0,y)$, on obtient l'existence d'un $y(\xi_0)$ satisfaisant à la condition (1.6) pour $\xi_0 \geqslant x_0$.

x_0 étant quelconque il existe un $y(\xi_0)$ en question pour chaque ξ_0. On vérifie facilement que $y(\xi_0)$ est continue.

§ 2. HYPOTHÈSES K. 1° *Il existe une fonction périodique $\varphi(t)$ avec la période T satisfaisante aux conditions suivantes:*

$$\varphi^{\cdot\cdot}(t) > f\big(t,\varphi(t),\varphi^{\cdot}(t),u,v\big) \quad pour \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.1}$$

$$u \leqslant x\big(t-\Delta(t);\ \varphi_0,\ M+\mu_0\big), \qquad v \leqslant x^{\cdot}\big(t-\Delta(t);\ \varphi_0,\ M+\mu_0\big)$$

où des constantes φ_0, M et μ_0 sont défini d'une manière suivante:

$$\varphi_0 = \varphi(0), \qquad M = \max_{[0,T]}|\varphi^{\cdot}(t)|,$$
$$\mu_0 = \max_{[0,T]}\Big|\int_0^t f\Big(s,\varphi(s),\varphi^{\cdot}(s),\varphi\big(s-\Delta(s)\big),\varphi^{\cdot}\big(s-\Delta(s)\big)\Big)\Big|\,ds. \tag{2.2}$$

2° *Il existe une fonction $\psi(t)$ périodique avec la période T telle que*

$$\varphi(t) < \psi(t), \tag{2.3}$$

$$\psi^{\cdot\cdot}(t) < f\big(t,\psi(t),\psi^{\cdot}(t),u,v\big) \quad pour \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.4}$$

$$u \geqslant x\big(t-\Delta(t),\varphi_0,M_1+\mu_1\big), \qquad v \geqslant x^{\cdot}\big(t-\Delta(t),\varphi_0,M_1+\mu_1\big)$$

où les constantes M_1 et μ_1 sont défini d'une manière suivant

$$M_1 = \min_{[0,T]}\psi^{\cdot}(t),$$
$$\mu_1 = \min_{[0,T]}\Big\{-\Big|\int_0^t f\Big(s,\psi(s),\psi^{\cdot}(s),\ \psi\big(s-\Delta(s)\big),\psi^{\cdot}\big(s-\Delta(s)\big)\Big)\Big|ds\Big\}.$$

THÉORÈME 1 [1]. *Des hypothèses* A, B *et* K *étant supposèes il existe une solution périodique de l'équation* (1.1) *avec la période T.*

Démonstration. Pour démontrer notre théorème il suffit de prouver que la fonction

$$F(\xi) = x^{\cdot}\big(T;\xi,y(\xi)\big)-y(\xi)$$

(où $y(\xi)$ est la fonction definie dans le lemme 1) admet des valeurs négatives et positives. Les fonctions $y(\xi)$ et par conséquent $F(\xi)$ étant continues il existe un ξ_0 telle que

$$F(\xi_0) = 0$$

[1] Nous donnerons dans le théorème 2 un exemple d'une fonction $f(t,x,y,u,v)$ satisfaisante aux hypothèses K.

c'est-à-dire

$$x^{\cdot}\big(T;\, \xi_0,\, y(\xi_0)\big) = y(\xi_0) = x^{\cdot}\big(0;\, \xi_0,\, y(\xi_0)\big)\,.$$

Nous allons démontrer que

$$y(\varphi_0) > \varphi_0^{\cdot} = \varphi^{\cdot}(0) > x^{\cdot}\big(T;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) \tag{3.1}$$

et

$$y(\psi_0) < \psi_0^{\cdot} = \psi^{\cdot}(0) < x^{\cdot}\big(T;\, \psi_0,\, y(\psi_0)\big)\,, \tag{3.2}$$

d'où l'on obtient l'existence de ξ_0 en question.

Envisageons $x^{\cdot\cdot}\big(t; \varphi_0, y(\varphi_0)\big)$. Supposons que $y(\varphi_0) \leqslant \varphi_0^{\cdot}$. On a donc pour $t = 0$

$$x^{\cdot\cdot}\big(0;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) = f\big(0,\, \varphi_0,\, y(\varphi_0),\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) < f(0,\, \varphi_0,\, \varphi^{\cdot},\, \varphi_0,\, \varphi^{\cdot}) \leqslant \varphi^{\cdot\cdot}(0)$$

d'où pour $\delta > 0$ suffisamment petit

$$\begin{aligned} \varphi_0^{\cdot}(t) &> x^{\cdot}\big(t;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \delta\,, \\ \varphi(t) &> x\big(t;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta \end{aligned} \tag{3.3}$$

et par suite

$$\begin{aligned} & x^{\cdot\cdot}\big(t;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) \\ & = f\Big(t,\, x\big(t; \varphi_0, y(\varphi_0)\big),\, x^{\cdot}\big(t; \varphi_0, y(\varphi_0)\big),\, x\big(t-\Delta(t)\,; \varphi_0, y(\varphi_0)\big),\, x^{\cdot}\big(t-\Delta(t); \varphi_0, y(\varphi_0)\big)\Big) \\ & < f\Big(t,\, \varphi(t),\, \varphi^{\cdot}(t),\, \varphi\big(t-\Delta(t)\big),\, \varphi^{\cdot}\big(t-\Delta(t)\big)\Big) \leqslant \varphi^{\cdot\cdot}(t) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta \end{aligned}$$

d'où il vient que les inégalitées (3.3) sont satisfaites dans tout intérvalle $[0,\, T]$ et par suite

$$\varphi_0 = \varphi(0) = \varphi(T) > x\big(T;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big)$$

qu'est incompatible avec la définition de $y(\varphi_0)$. Nous avons ainsi démontré que

$$y(\varphi_0) > \varphi_0^{\cdot} = \varphi^{\cdot}(0)\,, \tag{3.4}$$

d'où nous obtenons dans un intervalle suffisamment petit les inégalitées

$$\begin{aligned} \varphi^{\cdot}(t) &< x^{\cdot}\big(t;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \delta\,, \\ \varphi(t) &< x\big(t;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) \qquad \text{pour} \quad 0 < t \leqslant \delta\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Il est évident que dans le prémier point t_0, $t_0 \in (0,\, T]$ dans lequel $x\big(t_0; \varphi_0, y(\varphi_0)\big) = \varphi(t_0)$ on a

$$x^{\cdot}\big(t_0;\, \varphi_0,\, y(\varphi_0)\big) \leqslant \varphi^{\cdot}(t_0)\,. \tag{3.6}$$

Démontrons que

$$y(\varphi_0) < M + \mu_0\,. \tag{3.7}$$

Envisageons une solution de l'équation (1.1) $x(t;\varphi_0,\eta)$ telle que

$$\eta \geqslant M+\mu_0 \tag{3.8}$$

et par suite en vertu de (3.7) et (3.4) on a $\eta > \varphi_0^{\cdot}$ d'où l'on obtient pour des t suffisamment petits

$$\begin{aligned} x^{\cdot}(t;\varphi_0,\eta) &> \varphi^{\cdot}(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \delta, \\ x(t;\varphi_0,\eta) &> \varphi(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0,\delta] \end{aligned} \tag{3.9}$$

et par suite dans l'intervalle $[0,\delta]$ on a

$$\begin{aligned} x^{\cdot\cdot}(t;\varphi_0,\eta) &= f\big(t, x(t;\varphi_0,\eta), x^{\cdot}(t;\varphi_0,\eta), x\big(t-\Delta(t);\varphi_0,\eta\big), x^{\cdot}\big(t-\Delta(t);\varphi_0,\eta\big)\big) \\ &> f\big(t,\varphi,\varphi^{\cdot}(t),\varphi\big(t-\Delta(t)\big),\varphi^{\cdot}\big(t-\Delta(t)\big)\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{\cdot}(t;\varphi_0,\eta) &> \eta + \int_0^t f\big(s,\varphi(s),\varphi^{\cdot}(s),\varphi\big(s-\Delta(s)\big),\varphi^{\cdot}\big(s-\Delta(s)\big)\big)\,ds \\ &\geqslant M+\mu_0+\int_0^t f\big(s,\varphi(s),\varphi^{\cdot}(s),\varphi\big(s-\Delta(s)\big),\varphi^{\cdot}\big(s-\Delta(s)\big)\big)\,ds \\ &\geqslant M+\mu_0-\max_{[0,T]}\Big|\int_0^t f(\varphi)\,ds\Big| > M > \varphi^{\cdot}(t) \quad \text{dans} \quad [0,\delta] \end{aligned}$$

et par suite les inégalitées (3.9) sont valables dans un intervalle plus large. Ainsi nous obtenons les inégalitées (3.9) dans tout intervalle $[0,T]$, incompatibles pour $\eta = y(\varphi_0)$ avec la définition de $y(\varphi_0)$. L'inégalité (3.7) se trouve ainsi démontré.

En vertu de (3.6) et (3.7) nous obtenons pour le point t_0

$$\begin{aligned} &x^{\cdot\cdot}\big(t_0;\varphi_0,y(\varphi_0)\big) \\ &= f\big(t_0,\varphi(t_0),x^{\cdot}\big(t_0;\varphi_0,y(\varphi_0)\big), x\big(t_0-\Delta(t_0);\varphi_0,y(\varphi_0)\big), x^{\cdot}\big(t_0-\Delta(t_0)\big);\varphi_0,y(\varphi_0)\big) \\ &\leqslant f\big(t_0,\varphi(t_0),\varphi^{\cdot}(t_0), x\big(t_0-\Delta(t_0);\varphi_0,y(\varphi_0)\big), x^{\cdot}\big(t_0-\Delta(t_0);\varphi_0,y(\varphi_0)\big)\big) < \varphi^{\cdot\cdot}(t_0) \end{aligned}$$

et par suite

$$x^{\cdot}\big(t;\varphi_0,y(\varphi_0)\big)-x^{\cdot}\big(t_0;\varphi_0,y(\varphi_0)\big) < \varphi^{\cdot}(t)-\varphi^{\cdot}(t_0) \quad \text{pour} \quad t_0 < t \leqslant t_0+\delta_0,$$

d'où

$$\begin{aligned} x^{\cdot}\big(t;\varphi_0,y(\varphi_0)\big) &< \varphi^{\cdot}(t) \quad \text{pour} \quad t_0 < t \leqslant t_0+\delta_0, \\ x\big(t;\varphi_0,y(\varphi_0)\big) &< \varphi(t) \quad \text{pour} \quad t_0 < t \leqslant t_0+\delta_0 \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} &x^{\cdot\cdot}\big(t;\varphi_0,y(\varphi_0)\big) \\ &= f\big(t,x\big(t;\varphi_0,y(\varphi_0)\big),x^{\cdot}\big(t;\varphi_0,y(\varphi_0)\big),x\big(t-\Delta(t);\varphi_0,y(\varphi_0)\big),x^{\cdot}\big(t-\Delta(t);\varphi_0,y(\varphi_0)\big)\big) \\ &\leqslant f\big(t,\varphi(t),\varphi(t),x\big(t-\Delta(t);\varphi_0,y(\varphi_0)\big),x^{\cdot}\big(t-\Delta(t);\varphi_0,y(\varphi_0)\big)\big) < \varphi^{\cdot\cdot}(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

dans tout intervalle dans lequele $x(t) < \varphi(t)$, $x^{\cdot}(t) < \varphi^{\cdot}(t)$ et par suite (3.10) est valable dans tout intervalle $t_0 \leqslant t \leqslant T$, ce qui et impossible pour $t_0 < T$, car nous avons

$$x\big(T; \varphi_0, y(\varphi_0)\big) = \varphi(T) = \varphi_0 = x\big(0; \varphi_0, y(\varphi_0)\big) .$$

Ainsi nous avons démontré que $t_0 = T$ c'est-à-dire que

$$x\big(t; \varphi_0, y(\varphi_0)\big) > \varphi(t) \quad \text{pour} \quad 0 < t < T ,$$

et par suite vu (3.4)

$$x^{\cdot}\big(T; \varphi_0, y(\varphi_0)\big) \leqslant \varphi^{\cdot}(T) = \varphi^{\cdot}(0) = \varphi_0^{\cdot} < y(\varphi_0)$$

c'est-à-dire l'inégalité (3.1). D'une façon analogue on démontre (3.2) que termine la démonstration du théorème 1.

§ 4. Comme un exemple de l'application du théorème 1 envisageon, le théorème suivantes:

Hypothèses H. *Il existe un* $r > 0$ *telle que*

(4.1) $$f(t, r, 0, u, v) > 0 \quad \textit{pour } u, v \textit{ quelconques},$$

(4.2) $$f(t, -r, 0, u, v) < 0 \quad \textit{pour chaque } (u, v).$$

Théorème 2. *Les hypothèses* A, B, H *étant supposées il existe une solution périodique de l'équation* (1.1) *avec la période* T *et on a*

$$-r < x(t) < r .$$

Démonstration. Il suffit de prouver que les hypothèses H impliquent les hypothèses K.

Posons

$$\varphi(t) = -r, \quad \psi(t) = r \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

on a

(4.3) $$-r < r .$$

En vertu de (4.1) et (4.2) on a

$$\varphi^{\cdot\cdot}(t) = 0 > f(t, -r, 0, u, v) = f\big(t, \varphi(t), \varphi^{\cdot}(t), u, v\big) ,$$

$$\psi^{\cdot\cdot}(t) = 0 < f(t, r, 0, u, v) = f\big(t, \psi(t), \psi^{\cdot}(t), u, v\big) .$$

Le théorème 2 est donc un cas particulier du théorème 1.

Reçu par la Rédaction le 4. 1. 1965