ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVI (1985)

О компактификации пространства Минковского и комплексном анализе в трубе будущего

В. С. Владимиров, А. Г. Сергеев (Москва)

Franciszek Leja in memoriam

Резюмэ. Изучается топология конформной компактификации пространства Минковского. Доказывается, что граница трубы будущего голоморфно нераспрямляема вдоль комплексных световых лучей. Изучаются многообразия пика и внутренние функции в трубе будущего.

Трубой будущего называется неограниченная область в C^4, имеющая вид $\tau^+ = \{\zeta \in C^4\colon (\operatorname{Im}\zeta_0)^2 > (\operatorname{Im}\zeta_1)^2 + (\operatorname{Im}\zeta_2)^2 + (\operatorname{Im}\zeta_3)^2,\ \operatorname{Im}\zeta_0 > 0\}$. Иными словами, труба будущего является трубчатой областью над световым конусом будущего $V^+ = \{\eta \in \boldsymbol{R}^4\colon \eta_0^2 > \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2,\ \eta_0 > 0\}$. Область τ^+ играет важную роль в математической физике, являясь естественной областью определения голоморфных релятивистских полей ([6]). С другой стороны, область τ^+ биголоморфно эквивалента обобщенному единичному кругу τ_0 (τ_0 есть множество комплексных 2×2-матриц W, для которых $WW^* < I$), который представляет собой наиболее простой пример (наряду с шаром и поликругом) ограниченных комплексно-однородных областей ([16]). Поэтому изучение комплексного анализа в трубе будущего приобретает особый смысл, имея в виду его приложения (см. [6], [7], [10], [13], [15]).

Труба будущего занимает выделенное положение и с точки зрения ее комплексной геометрии. Действительно, к модельным примерам областей голоморфности причисляют обычно шар (модельный пример строго псевдовыпуклых областей), шар „с уплощениями" (модельный пример слабо псевдовыпуклых областей), поликруг (модельный пример аналитических полиэдров). Перечисленные области различаются комплексной геометрией их границ — форма Леви шара невырождена, граница второй области состоит из точек конечного типа, форма Леви поликруга вырождается на гладкой части границы.

Все эти области объединяются единым классом псевдовыпуклых полиэдров и комплексный анализ в них изучен достаточно подробно (см., например, [1], [4], [11], [12], [14]). Форма Леви трубы будущего вырождается всюду на гладкой части границы τ^+, поскольку через каждую точку $\partial\tau^+$ проходит комплексная полупрямая (комплексный световой луч), целиком лежащая на $\partial\tau^+$. С этой точки зрения, труба будущего близка к поликругу. Однако имеется и принципиальное отличие — границу трубы будущего нельзя голоморфно распрямить вдоль указанных комплексных полупрямых. Иными словами, область τ^+ не является, даже локально, псевдовыпуклым полиэдром. Этот факт доказывается в § 2 нашей работы (краткое доказательство в случае C^3 приведено в [13]).

В § 1 изучается остов трубы будущего, совпадающий с пространством Минковского. Мы показываем, что естественная компактификация этого пространства, определяемая как прообраз унитарной группы $U(2)$ при эквивалентности $\tau^+ \to \tau_0$, совпадает с используемой в теории поля конформной компактификацией пространства Минковского [9], [10], [15], и подробно исследуем топологию этого пространства. В § 3 приводится несколько утверждений о граничных свойствах голоморфных функций в области τ^+ (точки и множества пика, интерполяционные множества, внутренние функции), которые показывают, что во многих отношениях область τ^+ подобна поликругу.

Основные обозначения. Точки трубы будущего τ^+ обозначаются через $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$; $z = (z_0, z_1, z_2, z_3) = (z_0, \mathbf{z})$. Лоренцево скалярное произведение в τ^+ задается формулой: $z\cdot\zeta = z_0\zeta_0 - z_1\zeta_1 - z_2\zeta_2 - z_3\zeta_3$, $z\cdot z = z^2$, $z, \zeta \in \tau^+$. Евклидово скалярное произведение обозначается соответственно через (z, ζ) и $|z|^2$. Эти обозначения сохраняют смысл и для точек $x, \xi, \ldots,$ пространства Минковского M. Световой конус в пространстве M (с вершиной в начале координат) обозначается через $V = \{x\colon x^2 > 0\}$, световые конуса будущего и прошлого — через $V^+ = \{x \in V\colon x_0 > 0\}$, $V^- = \{x \in V\colon x_0 < 0\}$.

§ 1. Компактификация пространства Минковского.

1° *Биголоморфное отображение трубы будущего τ^+ на обобщенный единичный круг τ_0* являтся композицией двух отображений. Первое — *реализация трубы будущего в виде обобщенной верхней полуплоскости Зигеля* — задается формулой

$$z \to \tilde{z} = \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{3} z_k \sigma_k, \tag{1.1}$$

где $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ — точка трубы будущего τ^+, σ_0 — единичная 2×2-матрица, σ_i, $i = 1, 2, 3$ — матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование (1.1) биголоморфно отображает трубу будущего τ^+ на верхнюю полуплоскость Зигеля H, состоящую из комплексных 2×2-матриц $\tilde{z}$ с положительно определенной мнимой частью $\operatorname{Im}\tilde{z} = 1/2i(\tilde{z}-\tilde{z}^*)$. Обратное к (1.1) преобразование задается формулой

$$\tilde{z}\to z = \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{Sp}\tilde{z}, \tfrac{1}{2}\operatorname{Sp}(\tilde{z}\sigma_1), \tfrac{1}{2}\operatorname{Sp}(\tilde{z}\sigma_2), \tfrac{1}{2}\operatorname{Sp}(\tilde{z}\sigma_3)\right).$$

Преобразование (1.1) обладает свойствами:

$$\det\tilde{z} = z^2, \qquad \det(\operatorname{Im}\tilde{z}) = y^2. \tag{1.2}$$

Продолжая преобразование (1.1) на остов трубы будущего, совпадающий с пространством Минковского M, получим взаимнооднозначное отображение пространства M на пространство эрмитовых 2×2-матриц.

Второе отображение — *реализация верхней полуплоскости Зигеля в виде обобщенного единичного круга* — задается преобразованием Кэли

$$\tilde{z}\to Z = (I-i\tilde{z})^{-1}(I+i\tilde{z}), \tag{1.3}$$

которое биголоморфно отображает верхнюю полуплоскость H на обобщенный единичный круг $\tau_0 = \{Z\colon ZZ^* < I\}$. Обратное преобразование Кэли имеет вид

$$Z\to\tilde{z} = i(I-Z)(I+Z)^{-1}.$$

Сквозное преобразование

$$z\to\tilde{z}\to Z \tag{1.4}$$

биголоморфно отображает трубу будущего на обобщенный единичный круг и задается формулой

$$z\to Z = \frac{1}{\Delta(z)}\begin{pmatrix} 1+z^2+2iz_3 & 2(iz_1+z_2) \\ 2(iz_1-z_2) & 1+z^2-2iz_3 \end{pmatrix},$$

где $\Delta(z) = \det(I-i\tilde{z}) = 1-z^2-2iz_0 = -(z+\mathbf{i})^2$, $\mathbf{i} = (i, 0, 0, 0)$. При этом

$$\det Z = \frac{(z-\mathbf{i})^2}{(z+\mathbf{i})^2}, \quad \det(I+Z) = -\frac{4}{(z+\mathbf{i})^2}, \quad \det(I-ZZ^*) = \frac{16y^2}{|(z+\mathbf{i})^2|^2}.$$

Продолжение преобразования (1.4) на пространство Минковского M задает диффеоморфизм пространства M в остов $U = \{Z: ZZ^* = I\}$ обобщенного единичного круга τ_0, совпадающий с группой унитарных 2×2-матриц:

$$x \to X = \frac{1}{\Delta(x)}\begin{pmatrix} 1+x^2+2ix_3 & 2(ix_1+x_2) \\ 2(ix_1-x_2) & 1+x^2-2ix_3 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

$$\Delta(x) = 1-x^2-2ix_0 = -(x+i)^2.$$

Образ отображения (1.5) совпадает с множеством $U \setminus U_0$, где

$$U_0 = \{X \in U: \det(I+X) = 0\}.$$

Определим *компактификацию* $\boldsymbol{M}$ *пространства Минковского* M таким образом, чтобы отображение (1.5) продолжалось до гомеоморфизма пространства $\boldsymbol{M}$ на остов U обобщенного единичного круга. Иначе говоря, дополним пространство M „бесконечно удаленными" точками, соответствующими точкам множества U_0 и наделим полученное пространство $\boldsymbol{M}$ топологией, индуцированной из U отображением (1.5). Ниже мы покажем, что таким образом определенная компактификация пространства Минковского совпадает с конформной компактификацией M.

2° Исследуем предварительно *топологию множеств* U и U_0. Параметризуем группу $U = U(2)$ следующим образом

$$U \ni X = e^{i\varphi/2}u: \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ u \in SU(2).$$

Каждая матрица $X \in U$ однозначно задается парой (φ, u), если отождествить пары $(0, u)$ и $(2\pi, -u)$ для любого $u \in SU(2)$. Элементы группы $SU(2)$ имеют вид

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}: \ |\alpha|^2+|\beta|^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) \in \boldsymbol{C}^2, \ \alpha = s_0+is_1, \ \beta = s_2+is_3,$$

поэтому топологически $SU(2)$ есть трехмерная сфера S^3. Группа U есть цилиндр $S^3\times[0, 2\pi]$, у которого верхнее и нижнее основания отождествлены с помощью антиподального отображения:

$$S^3 \to S^3: \ s = (s_0, s_1, s_2, s_3) \mapsto -s = (-s_0, -s_1, -s_2, -s_3).$$

Так как это отображение не меняет ориентации пространства переменных $s \in \boldsymbol{R}^4$, то группа $U(2)$ топологически есть тор $S^3\times S^1$.

Множество U_0 в выбранной параметризации состоит из тех $X \in U$, для которых $\det(I+e^{i\varphi/2}u) = 0$, что равносильно

$$U_0 = \{(\varphi, u) \in U\colon \ \operatorname{Re} a + \cos\tfrac{1}{2}\varphi = 0\}.$$

Сечение U_0 при фиксированном φ есть сфера $\{(s_1, s_2, s_3)\colon \ s_1^2+s_2^2+s_3^2 = \sin^2\frac{1}{2}\varphi\}$ радиуса $\sin\frac{1}{2}\varphi$. Поэтому U_0 топологически есть тор $S^2\times S^1$, один из экваторов которого (отвечающий $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$) стянут в точку. Эта точка отвечает матрице $X = -I$.

3° Изучим теперь *бесконечно удаленные точки* $\boldsymbol{M}$. Для этого рассмотрим пределы всевозможных прямых пространства Минковского M в $\boldsymbol{M}$. Пределы по всем временным прямым: $x_0 = x_0^0+t$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$, при фиксированном $x^0 = (x_0^0, \boldsymbol{x}^0)$ и $t\to\pm\infty$ совпадают и отвечают матрице $X = -I$. Для доказательства достаточно перейти к пределу в представлении (1.5). Обозначим бесконечно удаленную точку $\boldsymbol{M}$, отвечающую матрице $X = -I$, через I_0. Тогда пределы по всем пространственным прямым: $x_0 = x_0^0$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0+at$, при фиксированных x^0 и $a = (a_1, a_2, a_3)$, $|a| = 1$, и $t\to\infty$ совпадают и равны I_0. Это также вытекает из представления 1.5). Рассмотрим наконец пределы световых прямых: $\boldsymbol{x} = ax_0$, $|a| = 1$, при $x_0\to\pm\infty$. Из представления (1.5) вытекает, что пределы световой прямой $\boldsymbol{x} = ax_0$ при $x_0\to\pm\infty$ совпадают и отвечают матрице

$$X = \begin{pmatrix} -a_3 & -a_1+ia_2 \\ -a_1-ia_2 & a_3 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Таким образом, бесконечно удаленные точки, отвечающие световым прямым, проходящим через нуль, параметризуются точками двумерной сферы S_0^2. Вообще, справедливо

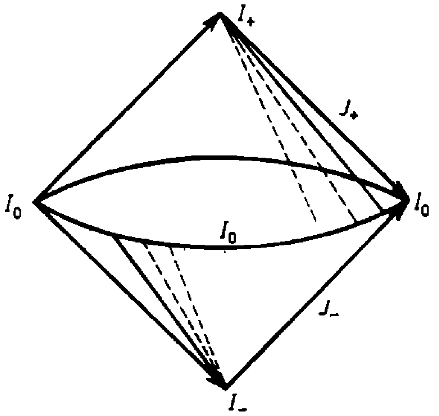

Рис. 1. Конформная компактификация $\boldsymbol{M}$ [9]. Вершины I_+, I_- конусов J_+, J_- и экватор I_0 отождествлены между собой и стянуты в точку I_0. Конуса J_+, J_- отождествлены по противоположным образующим и задают световую бесконечность J

Предложение 1. (i) *Пределы в M всех несветовых прямых совпадают между собой и равны пространственно-временной бесконечности I_0.*

(ii) *Пределы в M световых прямых: $x_0 = t$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + at$, с направляющим вектором $a = (a_1, a_2, a_3)$, $|a| = 1$, пересекающих гиперплоскость $\{x_0 = 0\}$ в точках $x^0 = (0, \boldsymbol{x}^0)$ с $(\boldsymbol{x}^0, a) + s = 0$, $-\infty < s < \infty$, при $t \to \pm\infty$ и фиксированных a и s совпадают между собой и отвечают матрице*

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{s+ia_3}{-s-i} & \dfrac{ia_1+a_2}{-s-i} \\[2ex] \dfrac{ia_1-a_2}{-s-i} & \dfrac{s-ia_3}{-s-i} \end{pmatrix} \in U_0. \tag{1.7}$$

Множество точек M, отвечающих матрицам вида (1.7), называется световой бесконечностью и обозначается через J.

Доказательство. Любая прямая в M, за исключением пространственных и временных прямых, рассмотренных выше, может быть задана единственным образом в виде: $x_0 = t$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + at$, где $|a| \neq 0$, $x^0 = (0, \boldsymbol{x}^0)$ — точка пересечения прямой с гиперплоскостью $\{x_0 = 0\}$. Точкам $x = x(t)$ такой прямой отвечает в силу (1.5) матрица $X(t)$, которая при $t \to \pm\infty$ эквивалентна матрице

$$\frac{1}{2t\big((\boldsymbol{x}^0, a) - i\big) - t^2(1-|a|^2)} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 2t\big(-(\boldsymbol{x}^0, a) + ia_3\big) + t^2(1-|a|^2) & t(ia_1+a_2) \\ t(ia_1-a_2) & 2t\big(-(\boldsymbol{x}^0, a) - ia_3\big) + t^2(1-|a|^2) \end{pmatrix}.$$

При $|a| \neq 1$ (несветовая прямая) предел последней матрицы при $t \to \pm\infty$ равен $-I$. Если же $|a| = 1$ (световая прямая), предел этой матрицы при $t \to \pm\infty$ равен матрице (1.7). Предложение доказано.

Из предложения 1 вытекает, что множество бесконечно удаленных точек M можно параметризовать парами (s, a), где $s \in \boldsymbol{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$, $a \in S^2$, и все точки вида $(\pm\infty, a)$ отождествлены между собой. Для того, чтобы перейти от этой параметризации к стандартной параметризации U_0, определенной в п. 2°, достаточно положить $e^{i\varphi} = (s-i)/(s+i)$. Тогда представление (1.7) перейдет в стандартное представление матриц $X \in U_0$ в виде $X = e^{i\varphi/2}u$, $\operatorname{Re} a + \cos\frac{1}{2}\varphi = 0$.

4° Исследуем *топологию пространства M в окрестности бесконечно удаленных точек.* Рассмотрим сначала *пространственно-временную бесконечность I_0.* Введем множества

$$\overset{t}{U_r} = \overset{+}{U}{}^t_r \cup \overline{U}{}^t_r, \qquad r \in \boldsymbol{R},$$

где

$$\overset{+}{U}{}^t_r = \{x\colon (x_0 - r)^2 > |\boldsymbol{x}|^2,\ x_0 > r\},$$

$$\overline{U}{}^t_r = \{x\colon (x_0 + r)^2 > |\boldsymbol{x}|^2,\ x_0 < -r\}.$$

Иначе говоря, $\overset{+}{U}{}^t_r$ является внутренностью светового конуса будущего с вершиной в точке $(r, 0, 0, 0)$, $\overline{U}{}^t_r$ — внутренностью светового конуса прошлого с вершиной в точке $(-r, 0, 0, 0)$. Аналогично, обо-

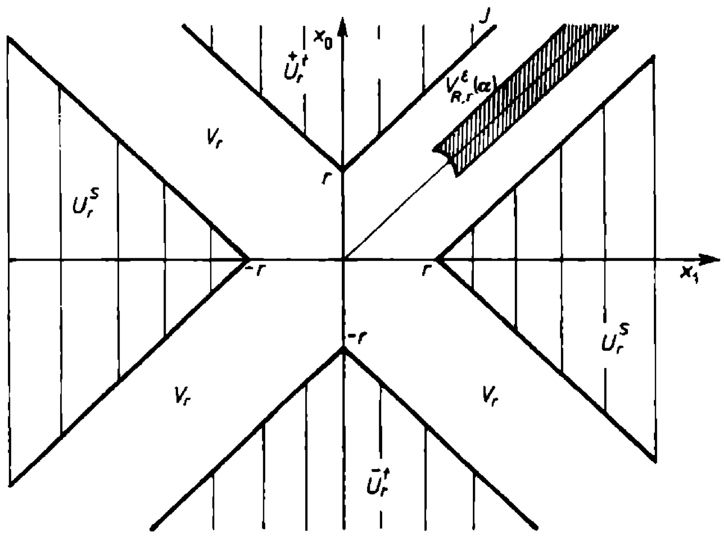

Рис. 2. Сечение множеств U_r и V_r плоскостью $x_2 = x_3 = 0$

значим через U^s_r дополнение к множеству $\overset{+}{U}{}^t_{-r} \cup \overline{U}{}^t_{-r}$. Иначе говоря, множество U^s_r образовано вращением конуса $\{(x_0, x_1, 0, 0)\colon (x_1 - r)^2 > x_0^2,\ x_1 > r\}$ вокруг оси $\{x_0\}$ в $\boldsymbol{M}$. Обозначим через U_r множество $U_r = U^t_r \cup U^s_r$ и через V_r дополнение к множеству $\overline{U}_r$ в пространстве $\boldsymbol{M}$. Множество V_r заметается световыми прямыми: $\boldsymbol{x} = \alpha(x_0 - s)$, $|\alpha| = 1$, $|s| < r$ $(r > 0)$.

Предложение 2. *Замыкания $\overline{U}_r$ множеств U_r в топологии $\boldsymbol{M}$ образуют при $r \to +\infty$ фундаментальную систему окрестностей точки $I_0 \in \boldsymbol{M}$.*

Доказательство. Замыкание множества U_r, по определению, образовано выбрасыванием из $\boldsymbol{M}$ световых прямых: $\boldsymbol{x} = \alpha(x_0 - s)$, $|\alpha| = 1$, $|s| < r$, $r > 0$, включая их пределы в $\boldsymbol{M}$. Матрица $X(x)$, являющаяся образом такой световой прямой при отображении (1.5), эквивалентна при $|x_0|\to\infty$ матрице (1.7), расстояние от которой до матрицы $-I$ равно (в обычной матричной норме) $2/\sqrt{s^2+1}>2/\sqrt{r^2+1}$. Отсюда следует, что множества $\overline{U}_r$ являются окрестностями точки I_0. Аналогично доказывается, что система окрестностей $\{\overline{U}_r\}$ является фундаментальной. Покажем, например, что окрестность $\overset{+}{U}{}^t_r$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом r (остальные случаи рассматриваются аналогично). Окрестность $\overset{+}{U}{}^t_r$ заметается световыми прямыми: $x=a(x_0-s)$, $|a|=1$, $x_0>s>r$. Матрица $X(x)$ при $x_0\to\infty$ эквивалентна матрице (1.7), расстояние от которой до $-I$ не превосходит $2/\sqrt{r^2+1}$, откуда вытекает требуемый результат. Предложение доказано.

Можно было точно также определить базис окрестностей $\{U_r(x)\}$ точки I_0, центрированный относительно произвольной точки $x\in M$. Очевидно, что все такие базисы эквивалентны.

Изучим теперь топологию M в окрестности точек *световой бесконечности* J. Рассмотрим для определенности точку $(0, a^0)\in J$, отвечающую матрице X^0 вида (1.6) с $a=a^0$. Также, как в предложении 2, доказывается что замыкания $\overline{V}_r$ множеств V_r в топологии M образуют при $r\to+0$ фундаментальную систему окрестностей бесконечно удаленной сферы $S_0^2\subset J$. Обозначим через $V_r^\varepsilon(a^0)$ подмножество V_r, заметаемое световыми прямыми $x=a(x_0-s)$ с $|a-a^0|<\varepsilon$, $|s|<r$, и через $V_{R,r}^\varepsilon(a^0)$ — пересечение $V_r^\varepsilon(a^0)$ с множеством $\{|x|>R\}$, $R>0$.

Предложение 3. *Замыкания $\overline{V_{R,r}^\varepsilon(a^0)}$ множеств $V_{R,r}^\varepsilon(a^0)$ в топологии M образуют при $R\to+\infty$, $r\to+0$, $\varepsilon\to0$, фундаментальную систему окрестностей точки $(0, a^0)\in J$.*

Доказательство. Множество $\overline{V_r^\varepsilon(a^0)}$ по определению, образовано выбрасыванием из M световых прямых (включая их пределы в M): $x=a(x_0-s)$, у которых либо $|s|>r$, либо $|a-a^0|>\varepsilon$. Матрица $X(x)$, являющаяся образом такой световой прямой при отображении (1.5), эквивалентна при $|x_0|\to\infty$ матрице (1.7), расстояние от которой до матрицы X^0 равно $(\sqrt{2}/\sqrt{s^2+1})\sqrt{2s^2+|a-a^0|^2}$, что при $|s|>r$ больше $2r/\sqrt{r^2+1}$, а при $|a-a^0|>\varepsilon$ больше $\sqrt{2}\varepsilon$. Отсюда следует, что множества $\overline{V_{R,r}^\varepsilon(a^0)}$ являются окрестностями точки $(0, a^0)$. Фундаментальность системы $\{\overline{V_{R,r}^\varepsilon(a^0)}\}$ следует из того, что для любой световой прямой $x=a(x_0-s)$ с $|a-a^0|<\varepsilon$, $|s|<r$, расстояние от предела $X(x)$ при $|x_0|\to\infty$ до матрицы X^0 не превосходит $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2r^2+\varepsilon^2}$.

Предложения 1, 2 и 3 показывают, что *компактификация $\mathbf{M}$ пространства Минковского M, определенная в п. 1° с помощью отображения* (1.5), *совпадает с конформной компактификацией M, построенной в* [8]–[10], [15].

§ 2. Комплексная геометрия трубы будущего.

1° Граница $\partial\tau^+$ трубы будущего τ^+ состоит из объединения гладкой гиперповерхности $N = \{\zeta \in C^4\colon \eta^2 = 0,\ \eta_0 > 0\}$ и остова $M = \{\zeta \in \partial\tau^+\colon \eta_0 = 0\}$ – множества, на котором граница $\partial\tau^+$ вырождается. Через каждую точку $\zeta = \xi + i\eta$ поверхности N проходит комплексный световой луч, т.е. комплексная полупрямая $\lambda_\zeta = \{\xi + a\eta\colon a \in C,\ \operatorname{Im} a > 0\}$, целиком лежащая на границе τ^+.

Рассмотрим подробнее *комплексную геометрию поверхности* N. Обозначим через $r(\zeta) = -\eta^2$ определяющую функцию области τ^+: $\tau^+ = \{\zeta\colon r(\zeta) < 0,\ \eta_0 > 0\}$, $dr(\zeta) \neq 0$ на N. Тогда комплексное касательное пространство $T^c_\zeta N$ поверхности N в точке ζ состоит из векторов $Z = \sum_{i=0}^{3} Z_i \partial/\partial\zeta_i$, на которых обращается в нуль форма $\partial r(\zeta)$. Оно имеет комплексную размерность 3 и порождается векторами $Z^0 = \sum_{i=0}^{3} \eta_i \partial/\partial\zeta_i$, Z^{12}, Z^{13}, Z^{23}, где $Z^{jk} = \eta_j \partial/\partial\zeta_k - \eta_k \partial/\partial\zeta_j$. При этом вектор Z^0 направлен вдоль комплексного светового луча λ_ζ, а среди векторов Z^{jk} только два независимы (например, в точках ζ с $\eta_1 \neq 0$ можно взять Z^{12}, Z^{13}). Вектора $\operatorname{Re} Z^0$, $\operatorname{Im} Z^0$, $\operatorname{Re} Z^{jk}$, $\operatorname{Im} Z^{jk}$ и $T = \eta_0 \partial/\partial\xi_0 - \sum_{j=1}^{3} \eta_j \partial/\partial\xi_j$ порождают касательное пространство $T_\zeta N$ вещественной размерности 7 (форма $dr(\zeta)$ обращается в нуль на этих векторах). Форма Леви $\partial\bar\partial r(\zeta)$ поверхности N обращается в нуль на векторе Z^0 и положительна на векторах Z^{jk}, отличных от нуля (при $\eta_1 \neq 0$ форма Леви положительна на Z^{12}, Z^{13}).

2° В окрестности любой точки $\zeta \in N$ область τ^+ *устроена локально как произведение строго псевдовыпуклой области в C^3 на комплексную прямую.* Действительно, отображение φ: $(z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto (z_0, w_1, w_2, w_3)$, $w_j = z_j/y_0$, является локальным диффеоморфизмом (в окрестности точки ζ) области τ^+ на область $C^1 \times D$, где $D = \{w \in C^3\colon (\operatorname{Im} w_1)^2 + (\operatorname{Im} w_2)^2 + (\operatorname{Im} w_3)^2 < 1\}$ – строго псевдовыпуклая область в C^3.

Построенный локальный диффеоморфизм φ „распрямляет" N вдоль комплексных световых лучей, лежащих на N. Однако биголоморфного отображения с таким свойством не существует. Точнее, назовем гиперповерхность N *голоморфно распрямляемой вдоль комплексных световых лучей в точке* ζ, если найдется окрестность U точки ζ и биголоморфное отображение $\psi = (\psi_0, \psi')$ этой окрестности на открытое подмножество V в C^4, переводящее $N\cap U$ в $(C^1\times N')\cap V$, где N' — гиперповерхность в C^3 с невырожденной формой Леви. В противном случае поверхность N *голоморфно нераспрямляема в точке* ζ.

Предложение 4. *Поверхность N голоморфно нераспрямляема вдоль комплексных световых лучей в любой своей точке.*

Прежде чем переходить к доказательству предложения 4, сформулируем *необходимое условие голоморфной распрямляемости* [5]. Обозначим через N_ζ^0 нулевое подпространство формы Леви в $H_\zeta N = T_\zeta^c N\otimes_R C$ (пространство $H_\zeta N$ состоит из векторов $Z=\sum Z_i\partial/\partial\zeta_i+\sum \tilde{Z}_i-\partial/\partial\bar\zeta_i$, для которых $\partial r(Z)=\bar\partial r(Z)=0$). В нашем случае N_ζ^0 порождается векторами Z^0 и $\bar{Z}^0$. Допустим, что указанный выше „распрямляющий" биголоморфизм $\psi=(\psi_0,\psi')=(\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ существует. Тогда необходимо должны выполняться условия: $\partial r\in\{d\psi_1, d\psi_2, d\psi_3\}$ ($\{a_1,\dots,a_p\}$ — идеал, порожденный гладкими 1-формами $a_1,\dots,a_p$) и

$$\text{(2.1)}\quad \left\{Z=\sum Z_i\partial/\partial\zeta_i+\sum\tilde{Z}_i-\partial/\partial\bar\zeta_i\colon d\bar\varphi_j(Z)=d\psi_j(Z)=0,\ j=1,2,3\right\}\subset N_\zeta^0.$$

при $\zeta\in N\cap U$. Так как подпространство $H_\zeta^* C^4$, двойственное к N_ζ^0, порождается формами $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \bar\tau_{12}, \bar\tau_{13}, \bar\tau_{23}, \partial r, \bar\partial r$, где $\tau_{jk}=\eta_j d\zeta_k-\eta_k d\zeta_j$ — форма, двойственная к вектору Z^{jk}, то условие, двойственное к (2.1), будет иметь вид:

$$\text{(2.2)}\qquad \{d\psi_1, d\psi_2, d\psi_3\}\supset\{\tau_{12},\tau_{13},\tau_{23}\}\quad (\operatorname{mod} H_\zeta^* N)$$

для всех $\zeta\in N\cap U$.

Доказательство предложения 4. Допустим, что „распрямляющий" биголоморфизм ψ существует в окрестности U некоторой точки N. Тогда выполняется условие (2.2). Так как расслоение H^*N порождается формами ∂r, $\bar\partial r$ и формами, тождественно равными нулю на $N\cap U$, то условие (2.2) можно переписать в виде:

$$\{d\psi_1, d\psi_2, d\psi_3, \bar\partial r\}\supset\{\tau_{12},\tau_{13},\tau_{23},\partial r,\bar\partial r\}\ \big(\operatorname{mod} O(N)\big),$$

где через $O(N)$ обозначен идеал форм, тождественно равных нулю на $N\cap U$. Так как размерности обеих частей совпадают, они равны. Идеал в левой части d-замкнут ($\partial r\in\{d\psi_1, d\psi_2\, d\psi_3\}$), поэтому должен быть d-замкнут и идеал в правой части. Покажем, что это не так. Пусть, например, $\eta_1\ne 0$ в окрестности U. Достаточно показать, что $d\tau_{12}\wedge\wedge\tau_{12}\wedge\tau_{13}\wedge\partial r\wedge\bar\partial r\not\equiv 0$ на $N\cap U$. Имеем

$$\text{(2.3)}\qquad d\tau_{12}\wedge\tau_{12}\wedge\tau_{13}\wedge\partial r\wedge\bar\partial r=\tfrac{1}{2}\eta_0\eta_1\bar\tau_{12}\wedge\bar\partial r\wedge d\zeta_0\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\wedge d\zeta_3.$$

Форма $\tau_{12}\wedge\bar\partial r\neq 0$ в окрестности U, например, ее значение на паре векторов $Z=\eta_2\partial/\partial\zeta_1-\eta_1\partial/\partial\zeta_2$, $W=\eta_0\partial/\partial\zeta_0-\sum_{j=1}^{3}\eta_j\partial/\partial\zeta_j$ равно $-i(\eta_1^2+\eta_2^2)(\eta_0^2+\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)$. Поэтому форма (2.3) также не равна тождественно нулю на $N\cap U$. Предложение 4 доказано.

В работе [14] было введено понятие *строго псевдовыпуклого полиэдра*, которое объединяет строго псевдовыпуклые области (области типа шара), аналитические полиэдры (области типа поликруга) и всевозможные „промежуточные" области. Из предложения 4 вытекает, в частности, что *труба будущего не является даже локально строго псевдовыпуклым полиэдром*. Можно, однако, для каждой точки ξ остова M трубы будущего построить (см. [13]) строго псевдовыпуклый полиэдр D_ξ (являющийся прообразом шара в C^3 при голоморфном отображении $\tau^+\to C^3$), аппроксимирующий τ^+ с точностью до второго порядка в точках $\zeta=\xi+i\eta$, $\eta^2=0$. Последнее означает, что в таких точках ζ, $T_\zeta(\partial D_\xi)=T_\xi N$, $T_\zeta^c(\partial D_\xi)=T_\zeta^c N$ и формы Леви D_ξ и τ^+ совпадают.

§ 3. О граничных свойствах функций, голоморфных в трубе будущего.

1° Обозначим через $A_0(\tau^+)$ алгебру функций, голоморфных в области τ^+, непрерывных в замыкании $\tilde\tau^+=\bar\tau^+\cup\{\infty\}$ (относительно топологии, в которой базис окрестностей точки ∞ образуют внешности шаров: $\{|z|>R\}$) и равных нулю при $z=\infty$. *Граница Шилова S алгебры $A_0(\tau^+)$ совпадает с остовом $\tilde M=M\cup\{\infty\}$ области $\tilde\tau^+$*. Действительно, для этого достаточно показать, что точки M и только они являются точками пика алгебры $A_0(\tau^+)$. (Точка $\xi\in M$ есть *точка пика алгебры* $A_0(\tau^+)$, если существует *функция пика* $f\in A_0(\tau^+)$ такая, что $f(\xi)=1$ и $|f(z)|<1$ при $z\in\tilde\tau^+\setminus\{\xi\}$). Так как $S\subset\partial\tau^+$ и через каждую точку $\partial\tau^+$ проходит комплексный световой луч (комплексная полупрямая), целиком лежащий на $\partial\tau^+$ и пересекающий M по вещественному световому лучу, то $S\subset\tilde M$. Покажем, что любая точка $\xi\in M$ является точкой пика. Для этого рассмотрим ортогональное преобразование в пространстве переменных $(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, переводящее световой конус будущего внутрь октанта $\{y_0>0, y_1>0, y_2>0, y_3>0\}$. Комплексификация этого преобразования является комплексно-линейным преобразованием C^4, переводящим τ^+ внутрь области $D_+=\{\operatorname{Im}\zeta_i>0, i=0,1,2,3\}$ и сохраняющим остов M. Область D_+ биголоморфно эквивалентна поликругу и $A_0(D_+)\subset A_0(\tau^+)$ (образ τ^+ при указанном преобразовании обозначается той же буквой). Каждая точка $\xi\in M$ является точкой пика алгебры $A_0(D_+)$ (следовательно, и алгебры $A_0(\tau^+)$), искомая функция пика равна $(z_0-\xi_0+i)^{-1}\cdot\ldots\cdot(z_3-\xi_3+i)^{-1}$. Тем самым, остов $\tilde M$ совпадает с границей Шилова алгебры $A_0(\tau^+)$.

2° Из совпадения остова $\check{M}$ с границей Шилова $A_0(\tau^+)$ следует, что *любое открытое подмножество M является множеством единственности для алгебры* $A_0(\tau^+)$ (последнее означает, что любая функция из $A_0(\tau^+)$, равная нулю на этом множестве, тождественно равна нулю). Это утверждение вытекает также из теоремы Н. Н. Боголюбова „об острие клина" ([6]). Поставим в связи с этим обратный вопрос — *какие компактные подмножества M являются нулевыми множествами алгебры* $A_0(\tau^+)$ (подмножество M называется *нулевым*, если существует функция из $A_0(\tau^+)$, равная нулю на этом множестве и отличная от нуля во всех остальных точках $\bar{\tau}^+$). Поставленный вопрос эквивалентен (см. [12]) описанию *множеств пика и интерполяционных множеств пика алгебры* $A_0(\tau^+)$. (Напомним, что компактное подмножество $K \subset M$ называется *множеством пика* $A_0(\tau^+)$, если существует функция $f \in A_0(\tau^+)$ такая, что $f \equiv 1$ на K и $|f| < 1$ во всех остальных точках $\bar{\tau}^+ \setminus K$. Множество K является *интерполяционным множеством пика*, если для любой функции $g \not\equiv 0$, непрерывной на K, найдется функция $f \in A_0(\tau^+)$ такая, что $f(\xi) = g(\xi)$ при $\xi \in K$ и $|f(z)| < \max_{\xi \in K} |g(\xi)|$ при $z \in \bar{\tau}^+ \setminus K$.)

Широкий класс интерполяционных множеств пика алгебры $A_0(\tau^+)$ описывается теоремой, аналогичной теореме Форелли для поликруга (см. [12], § 6.2). Будем говорить, что *компакт $K \subset M$ имеет ширину нуль относительно некоторого множества N единичных векторов в* $\boldsymbol{R}^4$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется счетный набор векторов $n_i \in N$ и открытых подмножеств e_i на вещественной прямой $\boldsymbol{R}$, такой, что K содержится в объединении полос $E_i = \{x \in M\colon (x, n_i) \in e_i\}$ и $\sum m(e_i) < \varepsilon$.

Теорема Форелли. *Пусть N — компактное множество единичных времениподобных векторов* (т.е. векторов, лежащих внутри светового конуса V). *Если компакт K имеет ширину нуль относительно множества N, то он является интерполяционным множеством пика алгебры* $A_0(\tau^+)$.

Теорема доказывается также, как в случае поликруга.

3° Рассмотрим теперь более узкую задачу об описании *интерполяционных многообразий алгебры* $A_0(\tau^+)$, т.е. гладких подмногообразий M, каждое компактное подмножество которых является интерполяционным.

Из теоремы Форелли можно вывести следующий результат. Пусть K — компакт на гладкой пространственноподобной гиперповерхности S. (Гиперповерхность S называется *пространственноподобной*, если нормаль к S в любой ее точке времениподобна.) Обозначим через $U(\xi, \delta)$ открытое подмножество M, определяемое неравенствами: $U(\xi, \delta) = \{x \in M\colon |x-\xi| < \sqrt{\delta},\ |(x-\xi, n_\xi)| < \delta\}$, где n_ξ — единичная нормаль к S в точке $\xi \in S$. Множество $U(\xi, \delta)$ приблизительно является цилиндром с высотой величины 2δ, параллельной n_ξ, и с шаром радиуса $\sqrt{\delta}$ в основании. Определим *меру* $m(K)$ *множества* K по аналогии с линейной мерой Хаусдорфа, используя покрытия стандартными „цилиндрами" $U(\xi, \delta)$. Именно, для каждого конечного покрытия K множествами $U_i = U(\xi_i, \delta_i)$ рассмотрим величину $\sum \delta_i$ и обозначим через $m(K)$ нижную грань таких сумм по всевозможным покрытиям $\{U_i\}$ указанного вида. Построенная мера $m(K)$ напоминает меру Дэви–Оксендала для строго псевдовыпуклых областей ([3]).

Предложение 5. *Пусть K — компакт на C^2 — гладкой пространственноподобной гиперповерхности S и $m(K) = 0$. Тогда K является интерполяционным множеством пика алгебры $A_0(\tau^+)$.*

Доказательство. Условие $m(K) = 0$ по определению означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие $\{U_i\}$, для которого $\sum \delta_i < \varepsilon$. Поэтому компакт K имеет ширину иуль относительно множества нормалей $N = \{n_\xi\colon \xi \in K\}$ к поверхности S в точках K. Тем самым предложение вытекает из теоремы Форелли.

Из предложения 5 следует, что C^2 *— гладкие кривые на S являются интерполяционными многообразиями.* Действительно, если такая кривая задается отображением $\gamma\colon \boldsymbol{R}^1 \to M$ и компакт K содержится в образе $\gamma(I)$ отрезка $I \subset \boldsymbol{R}^1$, то каждому разбиению I на отрезки длины $\sqrt{\delta}$ (для достаточно малого δ) можно сопоставить покрытие K множествами $U_i = U(\xi_i, \delta)$, $i = 1, \ldots, n$, где $n \leqslant C|I|\sqrt{\delta}$ (константа C не зависит от δ). Тогда $m(K) \leqslant C|I|\sqrt{\delta}$, откуда $m(K) = 0$.

По-видимому, доказанное утверждение справедливо и без предположения $m(K) = 0$. По крайней мере, это так в вещественно аналитическом случае ([1]). Именно, справедливо

Предложение 6. *Пусть S — вещественно аналитическое подмногообразие M.*

(i) *Если S — интерполяционное многообразие, оно не имеет времениподобных касательных векторов.*

(ii) *Если S пространственноподобно, оно является интерполяционным многообразием.*

Доказательство. (i) Пусть, напротив, $Z \in T_pS$ — времениподобный касательный вектор. Так как S — вещественно аналитическое интерполяционное многообразие, то существует функция f, голоморф-

---

([1]) Додавление при корректуре. Аналог предложения 6 дла гладких многообразий приводится в обзоре авторов: *Complex analysis in future tube*, Lect. Notes in Math. (1986).

ная в окрестности $\bar{\tau}^+$, которая равна нулю в $B \cap S$, где B — замкнутый шар с центром в точке p достаточно малого радиуса, и отлична от нуля всюду в $\bar{\tau}^+ \setminus B \cap S$. Предположим, что p — неособая точка аналитического множества $\{f = 0\}$ (это предположение несущественно, см. [12], теорема 6.3.4). Тогда $Zf = 0$ и $(iZ)f = 0$ (так как касательная плоскость $T_p\{f = 0\}$ инвариантна относительно умножения на i). Вектор iZ — касательный к $\{f = 0\}$ и направлен внутрь τ^+, поэтому множество $\{f = 0\}$ имеет непустое пересечение с τ^+, что противоречит определению f.

(ii) Достаточно показать, что многообразие S является *аналитически интерполяционным*, т.е. любую вещественно аналитическую функцию на S можно продолжить до функции, голоморфной в окрестности $\bar{\tau}^+$. Действительно, для того, чтобы доказать, что произвольный компакт $K \subset S$ является интерполяционным, достаточно проверить, что $\mu(K) = 0$ для любой меры μ на M, ортогональной $A_0(\tau^+)$ ([12], п. 6.1). Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что интеграл от непрерывной функции „срезки" χ компакта K по мере μ равен нулю. Последнее утверждение можно установить, приближая функцию χ вещественно аналитическими функциями на S, интегралы от которых по мере μ равны нулю ввиду аналитической интерполяционности S. (См. также [2].) Докажем теперь, что S — аналитическое интерполяционное многообразие. Пусть f — вещественно аналитическая функция на S. Рассмотрим, также как в [2], комплексификацию $\tilde{S}$ многообразия S и заметим, что ввиду пространственной подобности S существует окрестность W многообразия S в $\tilde{S}$ такая, что $W \cap \bar{\tau}^+ = S$. Пусть $\tilde{f}$ — голоморфная функция на W, продолжающая f. Так как W — комплексное подмногообразие в окрестности Ω области $\bar{\tau}^+$ (Ω можно считать псевдовыпуклой), то по теореме Картана функция $\tilde{f}$ продолжается до голоморфной функции в Ω. Предложение доказано.

4° *Внутренней функцией в области* τ^+ называется голоморфная ограниченная в τ^+ функция, предельные значения которой на M (которые существуют почти всюду на M по теореме Фату) почти всюду равны по модулю единице. Труба будущего, также как и поликруг, обладает большим запасом рациональных внутренних функций. Примерами таких функций могут служить функция

$$\frac{z\cdot q - a}{z\cdot q - \bar{a}}, \quad q \in V^+, \ \operatorname{Im} a > 0, \ a \in C,$$

и функции, получаемые из нее автоморфизмами τ^+. Аналогом *произведений Бляшке для трубы будущего* являются функции вида

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z\cdot q_k-a_k}{z\cdot q_k-\bar a_k}\cdot\frac{\bar a_k-i}{a_k-i}\left|\frac{a_k-i}{a_k+i}\right|\right]^{n_k},$$

где a_k — комплексные числа, $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $\operatorname{Im} a_k > 0$; $q_k \in V^+$, $q_k = (1, \mathbf{q}_k)$, n_k — целые положительные числа. Указанное *произведение Бляшке равномерно сходится на каждом компакте в τ^+ тогда и только тогда, когда выполняется условие* [8]

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k \frac{\operatorname{Im} a_k}{1+|a_k|^2} < \infty.$$

Это утверждение позволяет определить произведения Бляшке для обобщенного единичного круга, пользуясь эквивалентностью $\tau^+ \to \tau_0$ (см. [8]).

Литература

[1] E. Bedford, J. E. Fornaess, *A construction of peak functions on weakly pseudoconvex domains*, Ann. Math. 107 (1978), 555–568.

[2] D. Burns, Jr., E. L. Stout, *Extending functions from submanifolds of the boundary*, Duke Math. J. 43 (1976), 391–404.

[3] A. M. Davie, B. Øksendal, *Peak interpolation sets for some algebras of analytic functions*, Pacific J. Math. 41 (1972), 81–87.

[4] K. Diederich, J. E. Fornaess, *Pseudoconvex domains with real analytic boundaries*, Ann. Math. 107 (1978), 371–384.

[5] M. Freeman, *Local biholomorphic straightening of real submanifolds*, Ann. Math. 106 (1977), 319–352.

[6] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, М. Наука, 1964.

[7] —, *Голоморфные функции с положительной мнимой частью в трубе будущего*, Мат. сб. 93 (1974), 3–17; 104 (1977), 341–370.

[8] —, *Произведения Бляшке в „обобщенном единичном круге" и полная ортонормальная система в трубе будущего*, Труды МИАН 166 (1983), 44–51.

[9] Р. Пенроув, *Стуктура пространства-времени*, М. Мир, 1972.

[10] R. Penrose, *The complex geometry of the natural world*, Proc. of the ICM, Helsinki (1) 1978, 1980, 189–194.

[11] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of C^N*, N. Y., Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1980.

[12] У. Рудин, *Теория функций в поликруге*, М. Мир, 1974.

[13] А. Г. Сергеев, *Комплексная геометрия и интегральные представления в трубе будущего в C^3*, Теор. и мат. физика, 54 (1983), 99–110.

[14] А. Г. Сергеев, Г. М. Хенкин, *Равномерные оценки решений $\bar{\partial}$-уравнения в псевдовыпуклых полиэдрах*, Мат. сб. 112 (1980), 522–567.

[15] A. Uhlmann, *The closure of Minkowsky space*, Acta Phys. Polon. 24 (1963), 295.

[16] Л.-К. Хуа, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*, М. ИЛ, 1959.

Reçu par la Rédaction le 20.04.1984