

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ ПО ТИХОНОВУ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. Б. ГЛАСКО

Москва, СССР

Введение

Современный уровень развития вычислительной техники доставляет широкие возможности для математического моделирования физических состояний и процессов, роль которого в познании природы хорошо известна. В тех случаях, когда речь идет о разработке модели источника процесса или состояния по некоторым характеристикам порождаемых им физических полей — мы имеем дело с обратными задачами. К числу последних относится широкий круг задач, связанных с изучением недр земли по косвенным наблюдениям на ее поверхности, а также — множество задач управления физическими, например, тепловыми процессами в целях получения априорно заданных их результатов.

Обратные задачи принадлежат классу некорректных, и основой для их решения служит интенсивно развивающаяся теория регуляризации [1].

В дальнейшем мы рассмотрим ряд задач из упомянутых выше областей, устойчивые алгоритмы решения которых основываются на концепциях теории регуляризации.

Предварительно формулируем 3 фундаментальных результата этой теории принадлежащих А. Н. Тихонову, на которые будем опираться при построении алгоритмов.

1. В 1943 г. А. Н. Тихонов [2] впервые обратил внимание (в частности — внимание геофизиков) на то, что известная функциональная теорема о гомеоморфизме отображений имеет непосредственное от-

ношение к постановке обратных задач. Именно, обратная задача, формулируемая в терминах операторного уравнения:

$$(1) \quad Az = u,$$

где $Z \ni z$ — компакт в некотором метрическом пространстве, $u \in AZ$ множества отображений Z с помощью непрерывного оператора A в случае взаимной однозначности отображения корректно поставлена по Адамару.

Тем самым, было дано математическое обоснование методу подбора, широко применяемому в геофизике. Впоследствии соответствующие представления систематически развивались в работах М. М. Лаврентьева, и на них основано понятие корректной по Тихонову [3] или, иначе, „условно-корректной” постановки обратной задачи.

В § 2 (п. 4) мы рассмотрим (достаточно редкий) пример совершенно естественной постановки такого рода.

2. В 1963 г. А. Н. Тихоновым [4] было сформулировано весьма общее фундаментальное понятие регуляризующего алгоритма — РА (или оператора Р.О.). В условиях единственности решения \bar{z} задачи (1) при некотором $u = \bar{u}$, и для множества приближенных значений $u = \tilde{u}$: $\varrho(\bar{u}, \tilde{u}) \leq \delta$ — оператор $R_\delta(\tilde{u}, A)$ называется регуляризующим, если (а) $z_\delta = R_\delta(\tilde{u}, A)$ существует при любом \tilde{u} , по крайней мере, для всех достаточно малых δ и (б) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varrho(z_\delta, \bar{z}) = 0$.

Последнее требование называется также принципом регуляризации, поскольку оно не вытекает из прямого обращения оператора A . На этот результат, как на наиболее общий, мы будем опираться преимущественно.⁽¹⁾

3. Третий результат — введение А. Н. Тихоновым [4], [1] сглаживающего параметрического функционала:

$$(2) \quad F_\alpha(z) = \varrho_U^2(Az, \tilde{u}) + \alpha \Omega(z)$$

где $\Omega(z)$ — стабилизатор (регуляризатор), определяемый требованием: неравенство $\Omega(z) \leq C$ — выделяет компакт в Z . Известно [1], что существует $\alpha = \alpha(\delta)$ такое, что решение задачи: $\inf F_\alpha(z)$ — удовлетворяет

⁽¹⁾ Заметим, что в задачах типа управлений, где по определению заданная \bar{u} — ожидаемый эффект и \bar{z} обычно не существует — условие (б) можно заменить требованием:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varrho_U(Az_\delta, \tilde{u}) = 0$$

при $z_\delta \in \hat{Z}$ — множества „реализуемых” элементов.

принципу регуляризации, и таким образом, любой алгоритм решения этой задачи является регуляризирующим оператором. Как показано, в частности, в предшествующей публикации [5] — он обладает свойством практической универсальности. В настоящее время на его основе разработаны программы, успешно используемые в ряде областей геофизики. Некоторые применения общего РА будут рассмотрены в §§ 3, 4.

§ 1. Задача о продолжении потенциального поля и квазиоптимальное приближение

1. Одним из методов определения положения источников аномалии в гравиметрии основан на продолжении гравитационных полей в сторону источников.

В слое $h_0 > \zeta > 0$ (при направлении оси ζ вглубь земли), не содержащем источников, поле подчиняется условиям: $\Delta u = 0$, $u|_{\zeta=0} = \tilde{u}(x)$, $x \in R_2$. Если на плоскости $\zeta = 0$ выделить прямоугольник Π , на границе которого Γ производная поля по направлению нормали близка к нулю, то постановка задачи может быть дополнена аппроксимирующим условием: $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0$ — и замыкается естественным требованием: $u|_{\zeta \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$.

Интересующей нас величиной служит $z \equiv u(h, x)$ ($h < h_0$), и оператор соответствия (1) определяется пересчетом $u(h, x)$ на уровень $\zeta = 0$, т.е. решением некоторой корректной краевой задачи для уравнения Лапласа. Очевидно, что обратная задача некорректна, хотя бы из-за отсутствия решения при $u = \tilde{u}(x)$ — не являющейся значением гармонической при $z = 0$ функции. ⁽²⁾

Представим искомую z в виде ряда Фурье: $z = \sum_n z_n \psi_n(x)$ ⁽³⁾ — по собственным функциям оператора Δ_x : $\Delta_x \psi_n = -\lambda_n \psi_n$, предполагая ψ_n , имеющие очевидные аналитические представления, нормированными. Соответствующее разложение значений оператора A получим, решая методом Фурье краевую задачу, связанную с пересчетом поля на нулевой уровень: $u(x, \zeta) = \sum_n z_n e^{-\sqrt{\lambda_n}(-h+\zeta)} \psi_n(x)$ и значит,

$$u(x, 0) \equiv Az = \sum_n z_n e^{-\sqrt{\lambda_n}h} \psi_n(x).$$

⁽²⁾ Заметим, что рассматриваемая задача близка к задаче Адамара, к которой мы вернемся позже, а последняя неустойчива и в случае существования решения. Впрочем, единственность обеих задач (при точном задании $u = \tilde{u}(x)$) хорошо известна.

⁽³⁾ Здесь $n = (n_1, n_2)$ — мультииндекс.

Сопоставляя коэффициенты последнего ряда с \tilde{u}_n — коэффициентами Фурье для $\tilde{u}(x) \in L_2(\Pi)$ — получим: $z_n = \tilde{u}_n e^{\sqrt{\lambda_n} h}$. Очевидно, что Фурье-представление z с такими коэффициентами является просто расходящимся рядом, в чем и проявляется некорректность постановки обратной задачи. Оказывается, что прямое обращение оператора A (в данном случае — с помощью метода Фурье) не определяет какого-либо алгоритма ее решения.

2. Будем искать приближение к решению в виде: $\sum_n \gamma_n \tilde{u}_n e^{\sqrt{\lambda_n} h} \psi_n(x)$, где γ_n — некоторые „сглаживающие” множители. Для поиска γ_n воспользуемся конструкцией сглаживающего функционала Тихонова. Введем функционал $\Omega_0(z) = \int_{\Pi} (Vz)^2 d\sigma$.⁽⁴⁾ Оценку отклонения Az от \tilde{u} произведем в Гильбертовой норме. Тогда

$$\rho_U^2(Az, \tilde{u}) \equiv \|Az - \tilde{u}\|_{\tilde{u}}^2 = \|Az - \tilde{u}\|_{l_2}^2 \equiv \sum_n (z_n e^{-\sqrt{\lambda_n} h} - \tilde{u}_n)^2.$$

С другой стороны, по формуле Грина, в силу принятых граничных условий на Γ

$$\Omega_0(z) = - \int_{\Pi} z \Delta z d\sigma \equiv \sum_n \lambda_n z_n^2.$$

Соответственно, задача (2): $\inf F_a(z)$ — приводит к условиям:

$$\frac{\partial F_a(z)}{\partial z_n} \equiv 2(z_n e^{-\sqrt{\lambda_n} h} - \tilde{u}_n) e^{-\sqrt{\lambda_n} h} + 2a \lambda_n z_n = 0,$$

откуда имеем:

$$(3) \quad z_n = \gamma_n \tilde{u}_n e^{\sqrt{\lambda_n} h}, \quad \gamma_n = (1 + a \lambda_n e^{2\sqrt{\lambda_n} h})^{-1}, \quad z_a(x) = \sum_n \gamma_n \tilde{u}_n e^{\sqrt{\lambda_n} h} \psi_n(x).$$

Полученный ряд, очевидно, сходится при любых $a > 0$, т.е. при любом согласовании $a = a(\delta)$ выполнено условие (а), определяющее регуляризирующий оператор. При $a = 0$ ряд расходится и, следовательно, сходится неравномерно по a в области $a \geq 0$, чем мы воспользуемся ниже при конкретизации регуляризирующего оператора.

Проведенная выкладка не является обоснованием полученного представления, как Р.О. Однако, прямая оценка отклонения $z_a(x)$ от

⁽⁴⁾ Заметим, что такой $\Omega_0(z)$ не является, как нетрудно убедиться, стабилизатором на множестве непрерывных $z(x)$; однако, в данном случае сглаживающий функционал Тихонова используется в чисто эвристических целях.

$\bar{z}(x)$ (а также их производных) в равномерной метрике [6] (для задачи Адамара [7]) приводит к справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Существует семейство функций $\alpha = \alpha(\delta)$ таких, что для любого целого k ($k \geq 0$)*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \max |z_{\alpha(\delta)}^{(k)}(x) - \bar{z}^{(k)}(x)| = 0.$$

Таким образом, по определению, формула (3) определяет семейство регуляризирующих по Тихонову операторов: $z_{\alpha(\delta)}(x) \equiv R_{\delta}^{\Phi}(\tilde{u})$ и притом, сколь угодно высокого порядка [1].

3. Остановимся на вопросе о выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$, соответствующем принципу регуляризации. Если известна мера погрешности δ , то выбор по оценке невязки: $\|Az - \tilde{u}\|^2 \leq \delta^2$, [1], определяет один из регуляризирующих операторов семейства (3).

Однако, в задачах моделирования реальных процессов мы часто не располагаем ни точной оценкой погрешности входных данных, ни тем более, погрешности задания оператора, где превалирующую роль играет приближенный по отношению к реальной ситуации характер модели. С другой стороны, при решении обратных задач заметнее влияние на результат оказывают погрешности округлений, не учитываемые обычно исходной постановкой задачи.

Поэтому хорошо изученный принцип невязки, „обобщенной невязки” и т.д. бывает целесообразно заменить некоторым внутренним критерием, не связанным с неперменным заданием меры погрешности данных измерений, но учитывающим ее косвенно, наряду с другими компонентами.

К числу таких критериев относится „квазиоптимальный” [8], и рассмотренная выше задача удобна для анализа его особенностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *квазиоптимальной нормой* для оператора $R_{\delta}^{\Phi}(\tilde{u})$ величину

$$\mu(\alpha) = \left\| \alpha \frac{\partial z_{\alpha}}{\partial \alpha} \right\|_{L_2}.$$

Заметим, что в более общем случае квазиоптимальная норма определяется аналогично, с точностью до метрики пространства, зависящей от конкретной задачи [8]–[9]. Характерные свойства $\mu(\alpha)$ изучены экспериментально на ЭВМ в широком круге задач и пред-

ставляются графиком на рис. 1, где показано также поведение $\bar{\mu}(\alpha)$, отвечающей отсутствию каких бы то ни было погрешностей. При этом $\mu(\alpha)$ сближается с $\bar{\mu}(\alpha)$ с уменьшением погрешности, а соответствующее

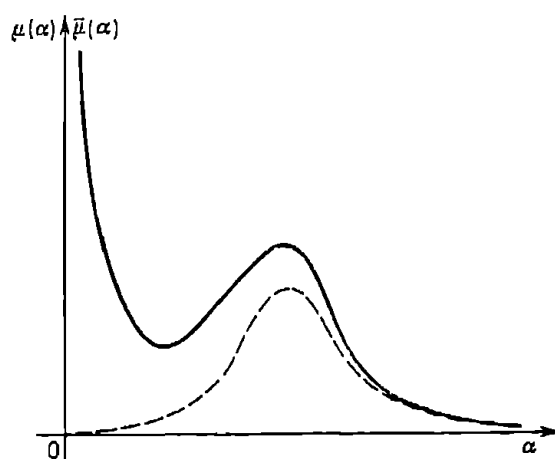


Рис. 1. Поведение квазиоптимальных норм: — $\mu(\alpha)$; — — — $\bar{\mu}(\alpha)$

приближение к решению задачи сближается с точным. Если считать это закономерностью, то квазиоптимальный критерий можно сформулировать следующим образом:

$$(4) \quad \alpha(\delta) \equiv \alpha_{\text{к.о.}}^{\delta}: \quad \mu(\alpha_{\text{к.о.}}^{\delta}) = \inf_{0 \leq \alpha \leq \alpha_0} \mu(\alpha).$$

Выбираемое таким образом приближение зависит косвенно от погрешности входных данных, но также — от погрешности округлений при вычислениях по данной совокупности частных алгоритмов на данной ЭВМ, соответственно — от погрешности оператора. Если предположить, что указанные погрешности имеют статистическую природу на ансамбле заданий, методов и инструментов, то ясно, что и критерий имеет статистический характер, что отмечалось в [8].

Перейдем к вопросам точного обоснования критерия. Если ограничиться влиянием погрешности входных данных, то проведенный в [10] анализ решения вырожденной системы линейных алгебраических уравнений с помощью алгоритма „упрощенной регуляризации” (см. п. 6) приводит к выводу, что, по крайней мере, в такой ситуации отмеченные выше свойства к.о.-приближения закономерны.

Рассматриваемая здесь задача позволяет учесть также и погрешность округлений, перенося оценку ее с функции $\tilde{u}(x)$ на коэффициенты Фурье, но уже в рамках некоторой статистической модели. Прежде всего нетрудно получить следующие аналитические оценки: $\mu^2(\alpha) =$

$= a^2 \sum_n \gamma_n^4 \lambda_n^2 \mu_n^{-6} \tilde{u}_n^2$ (аналогично для $\bar{\mu}^2(a)$ — через \bar{u}_n); $(\mu(a) - \bar{\mu}(a))^2 \leq \leq a^2 \sum_n \gamma_n^4 \lambda_n^2 \mu_n^{-6} \Delta u_n^2$ ($\Delta u_n = \tilde{u}_n - \bar{u}_n$), где μ_n суть собственные значения оператора A : $\mu_n = e^{-\sqrt{\lambda_n} n}$, поскольку $A \psi_n(x) \equiv e^{-\sqrt{\lambda_n} n} \psi_n(x)$.⁽⁵⁾ Отсюда можно заключить, что (а) $\mu(a), \bar{\mu}(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$ (и притом монотонно); (б) $\bar{\mu}(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$; (в) для $\forall a_1 > 0 \max_{a \geq a_1} |\mu(a) - \bar{\mu}(a)| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ ($|\Delta u_n| \leq \delta$). Следовательно, в силу очевидной непрерывности $\mu(a)$ и $\bar{\mu}(a)$, по крайней мере, при достаточно малых δ существует α_0 , отвечающее максимуму $\mu(a), \bar{\mu}(a)$ (крайнему правому, если их несколько).

Нужно полагать, что погрешность задания и вычислений связаны, главным образом, с коэффициентами Фурье, поскольку все остальные величины в (3) вычисляются значительно точнее. Будем считать суммарную их погрешность случайной и подчиненной закону: $\Delta u_n = M \delta' \xi_n n^{-\nu}$, где ξ_n — случайная величина⁽⁶⁾, например, с равномерным распределением на $[-M \delta' n^{-\nu}, M \delta' n^{-\nu}]$, δ' — мера суммарной погрешности; M — несущественный нормировочный множитель; $0 \leq \nu \leq 2$. Здесь верхняя граница значений ν условна и соответствует случаю, когда $u_n = O(1/n^2)$, т.е. $\tilde{u}(x)$ непрерывна (например, при линейной интерполяции поточечных измерений), и погрешность вычислений коэффициентов пренебрежимо мала; напротив, нижняя граница соответствует тому, что из-за большой погрешности вычислений \tilde{u}_n , последние не убывают, так что машинное представление функции $\tilde{u}(x) \notin L_2$ (как и при всех $0 \leq \nu \leq 1/2$). Таким образом, принятая модель погрешности согласуется с реальной ситуацией.

Ее введение позволяет дать вероятностную минорантную оценку для $\mu^2(a)$ через величину максимального члена соответствующего ряда с номером, зависящим вследствие неравномерной сходимости на $[0, \infty)$ от a . Соответственно, устанавливаются следующие статистические свойства $\mu(a)$: (г) вероятность $P(\lim_{a \rightarrow 0} \mu(a) = \infty) = 1$ и отсюда (д) в рамках введенной модели погрешности существует $\alpha_{\kappa.o.}^\delta$.

Далее, в силу определения $\alpha_{\kappa.o.}^\delta$ и некоторых вероятностных оценок, связывающих $|z_{\alpha_{\kappa.o.}^\delta} - \bar{z}|$ и $\mu(\alpha_{\kappa.o.}^\delta)$ приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 2. Для $R_\delta^\phi(\tilde{u})$ в рамках принятой модели погрешности

$$(i) \quad P(\lim_{\delta' \rightarrow 0} \mu(\alpha_{\kappa.o.}^{\delta'}) = 0, \lim_{\delta' \rightarrow 0} \alpha_{\kappa.o.}^{\delta'} = 0) = 1;$$

⁽⁵⁾ Заметим, что $\gamma_n = (1 + a \lambda_n \mu_n^{-2})^{-1}$.

⁽⁶⁾ Закон распределения ξ_n не слишком существенен, поскольку основной используемый нами факт — то, что вероятность нулевой погрешности есть нуль.

$$(ii) \quad \max_x |z_{\text{к.о.}}^{a\delta'}(x) - \bar{z}(x)| \xrightarrow{\text{в.о.}} 0 \quad \text{при} \quad \delta' \rightarrow 0. \quad (7)$$

Таким образом, установлено, что $R_\delta^\phi(\tilde{u})$ при квазиоптимальном выборе $\alpha = \alpha(\delta)$ является стохастически регуляризующим по Тихонову алгоритмом.

Мы рассмотрели вопросы обоснования к.о.-приближения на конкретном примере. Аналогичный результат имеет место для более общих постановок задач [9], а именно: (а) для Р.О., построенного на спектральном разложении произвольного A из L_2 в L_2 , при условии, что его спектр убывает не медленнее, чем $n^{-\gamma}$ ($\gamma > 1$); (б) для Р.О., отвечающего регуляризованному преобразованию Фурье для интегральных уравнений типа свертки; (в) для общего Р.О. Тихонова (ii) с линейным оператором A при минимизации через уравнение Эйлера; (г) для общего Р.О. Тихонова применительно к задаче о минимизации выпуклого функционала $\tilde{f}(z): F_\alpha(z) = \tilde{f}(z) + \alpha Q(z)$; (д) для итерационных регуляризующих алгоритмов, где $\alpha = n$ (номер итерации) и $\mu(n) = n \|z_{n+1} - z_n\|$.

Можно заметить, что использование к.о.-критерия делает явной общую особенность регуляризующих операторов: здесь как раз неустойчивость задачи позволяет выделить устойчивое приближение к точному решению. Возможной, но не всегда реальной и экономичной альтернативой Р.О., является гипер-точность расчета с использованием соответствующего стандартного математического обеспечения. Отметим, что повышение точности расчетов обычно не оправдано постановкой задачи, где входные данные обладают немалой погрешностью. Представляется, что ЭВМ, предназначенная для решения обратных задач при наличии регуляризующих алгоритмов, вообще говоря, должна обладать двумя качествами: (а) большая емкость оперативной памяти из-за сложной геометрии задач, (б) высокое быстродействие из-за сложной, часто, физики — но не обязательно математическое обеспечение, допускающее расчет с двойной и т.д. точностью.

4. Рассмотрим некоторые результаты решения на ЭВМ задачи п.1 с помощью рассмотренного Р.О.

На рис. 2 представлены линии уровня при продолжении поля в одном из платформенных районов [11]. По данным бурения аномалия вызывается телом повышенной плотности, верхняя кромка которого на глубине 1060м. Рис. 2 (а) дает картину поля на дневной поверхности; Рис. 2 (б) — на уровне 1000м. Видно, что характер поля воспроизводится, что и свидетельствует об устойчивом решении задачи.

(7) В (ii) имеется в виду „сходимость по вероятности”: соответствующая варианта меньше сколь угодно малой величины с вероятностью сколь угодно близкой к единице.

Рис. 2 (в) представляет поле на глубине 1200м. Его „распадение” означает, что этот уровень — в области источника аномалии, где принятая модель ($\Delta u = 0$) априори неверна. В результате граница расположения источника восстанавливается с точностью до $10^0/0$.

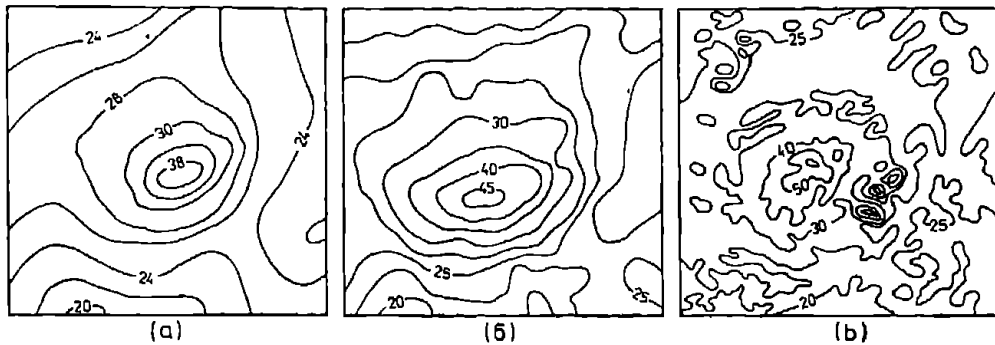


Рис. 2. Структура гравитационного поля на различных уровнях вглубь земли: (а) $z = 0$; (б) $z = 1000\text{м}$; (в) $z = 1200\text{м}$

5. Интересно, что с помощью аналогичного алгоритма можно решать классическую некорректную задачу Адамара для областей, допускающих разделение переменных. Соответствующий эксперимент был проведен в работе [7] для магнитоэстатической задачи в круговой области единичного радиуса, когда поле на границе порождается точечным источником в точке $(r = 0,5; \varphi = 0)$. В области $0,5 < r \leq 1$ потенциал поля описывается условиями: $\Delta u = 0$, $r \in (0,5; 1)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$; $u|_{r=1} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \tilde{v}(\varphi)$. Можно заметить, что собственные значения оператора $A: Au(r, \varphi) = \tilde{v}(\varphi)$ для $\forall r$ суть $\mu_n = n[r^{-n} - r^n]^{-1}$ (для $n > 0$).

На рис. 3 (а) изображены найденные профили потенциала для разных радиусов. По мере приближения к источнику точность, естественно, падает, что не мешает воспроизвести особенности поведения поля. С другой стороны, при $\alpha = 0$ (т.е. при отказе от регуляризации) теряются как раз качественные характеристики поля: соответствующий „результат” изображен стрелками на том же рисунке. Рис. 3 (б), где представлена оценка погрешности результата в зависимости от погрешности входных данных, свидетельствует о существовании модуля непрерывности в рамках P.O.

6. Для задачи о продолжении потенциала может быть предложена и другая априорная модель, которую мы рассмотрим для простоты в двумерном случае: $u = u(x, \zeta)$, $x \in R_1$. Считая $\tilde{u}(x)$ заданной на

В этом состоит концепция „упрощенной регуляризации“. Справедлива [12]

ТЕОРЕМА 3. Пусть A самосопряженный положительно определенный линейный оператор из L_2 в L_2 . Тогда

1) решение уравнения: $Az + \alpha Lz = 0$ (L определен (5)) существует при $\forall \alpha > 0$.

2) существует $\alpha = \alpha(\delta)$ такое, что $z_{\alpha(\delta)} = (A + \alpha L)^{-1} \tilde{u}$ удовлетворяет принципу регуляризации.

Доказательство этого факта основано на установлении эквивалентности рассматриваемой и вариационной задачи вида:

$$(6) \quad \inf_{z \in W_2^1} \Phi_\alpha(z); \quad \Phi_\alpha(z) \equiv (Az - 2\tilde{u}, z) + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2.$$

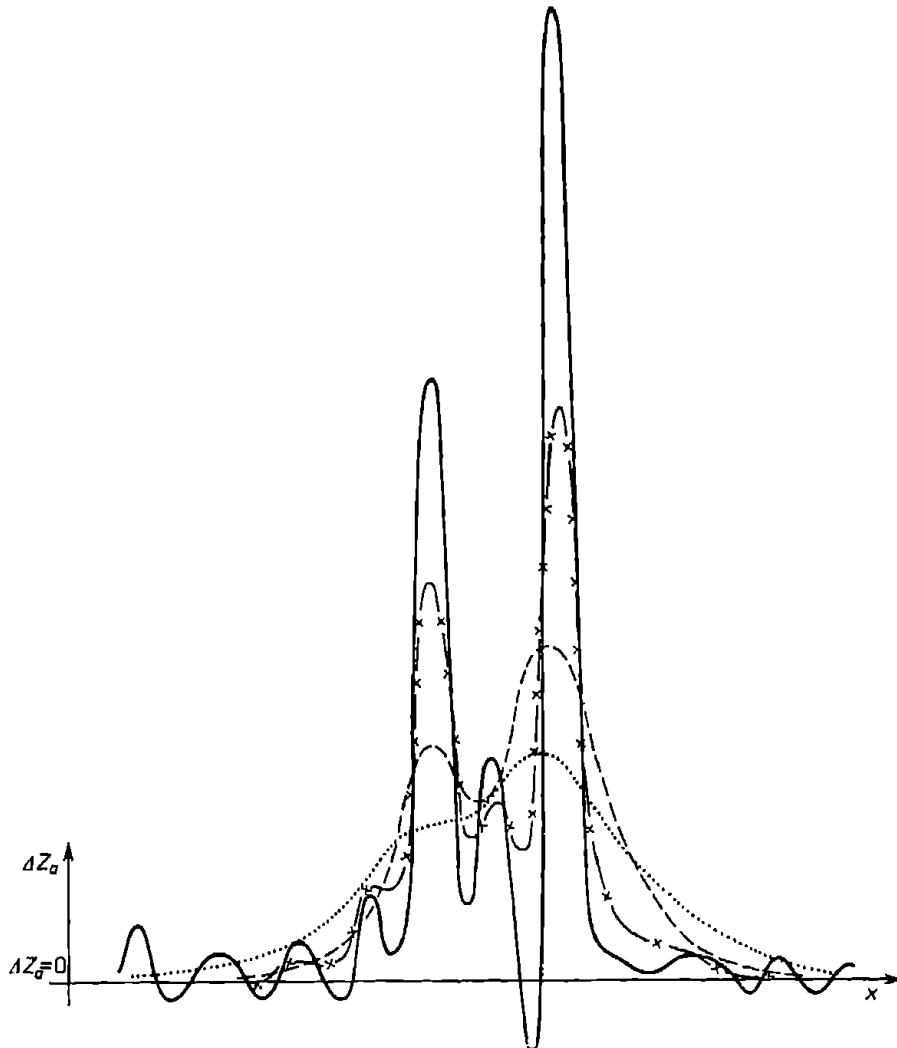


Рис. 4. Результаты продолжения магнитного поля вглубь земли. $z = 0$; — — — $z = 100\text{м}$; —x— $z = 160\text{м}$; ————— $z = 180\text{м}$

Оператор обращения для уравнения (5) естественно назвать „упрощенным регуляризирующим” по Тихонову, дополнив обращение, например, квазиоптимальным способом выбора $\alpha = \alpha(\delta)$.⁽⁸⁾

В качестве примера использования этого оператора рассмотрим результат продолжения поля в районе Курской магнитной аномалии [6]. Здесь магнитостатическое поле вызвано, как известно, двумя пластами железняка, протяженность которых в одном из горизонтальных направлений существенно больше, чем в другом, так что двумерная модель в известной степени оправдана. Глубина залегания, по данным бурения, ~ 160 м. На рис. 4 представлены результаты использования упрощенного Р.О. Видно, что на глубине 180 м поле „распадается”, тогда как на уровнях 160 м — ведет себя аналогично поверхностным наблюдениям. И в данном случае глубина источника определяется с погрешностью 10 %. Заметим, впрочем, что Р.О.-Фурье (п. 2 применительно к этой двумерной задаче) дает тот же результат (и более экономичен).

§ 2. Некоторые обратные задачи, связанные с индукционной закалкой стальных цилиндрических образцов

1. В производственных условиях длинные цилиндрический заготовки погружаются в соленоидальный индуктор, по обмотке которого протекает ток высокой частоты ω : $I = I(t)e^{i\omega t}$ где $I(t)$ — медленно меняющаяся его амплитуда. Нагрев образца происходит за счет индукционных токов. По истечении некоторого времени они извлекаются из индуктора и омываются быстрым потоком холодной жидкости.

Не вдаваясь в детали, будем считать целью заделки получение максимальной глубины приповерхностного закаленного слоя.⁽⁹⁾

Поскольку этот эффект зависит от совокупности управляющих параметров процесса, подлежащих определению, мы имеем здесь дело с достаточно сложной обратной задачей типа управления. Исследование этой задачи было проведено Н. И. Кулик (см., например, [13]), и здесь мы акцентируем внимание лишь на некоторых вопросах, имеющих отношение к обсуждаемой теме.

⁽⁸⁾ Заметим, что в работе [10] к.о.-выбор обоснован именно для упрощенного Р.О., применительно к алгебраическим системам.

⁽⁹⁾ Сталь закалена, если приобретенная при нагреве аустенитная структура перешла при охлаждении в мартенситную.

В рамках двумерной модели технологический процесс может быть описан следующими условиями. Для температурного поля $u = u(r, t)$ имеем:

$$(7) \quad L(u, v) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) - c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -Q(r, t, u) \quad (0 < r < R, 0 < t),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad -k(u) \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = h(u)(u - u_0)|_{r=R}, \quad u|_{t=0} = u_0 = \text{const.}$$

При нагреве $Q(r, t, u) = 0,24 \sigma^{-1}(u) j^2(r, t, u)$, где $j = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|$, если $v = v(r, t)$ — „медленная“ амплитуда магнитного поля: $H = v(r, t) e^{i\omega t}$. Для стадии нагрева уравнение (7) замыкается следующим:

$$(8) \quad N(u, v) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\sigma(u)} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mu(u) v) - i\omega \mu v = 0,$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad v|_{r=R} = \chi(t),$$

если $\chi(t)$ — амплитуда магнитного поля на поверхности образца, пропорциональная $I(t)$. Параметры k, c, ρ, σ, μ , имеющие очевидный физический смысл, будем считать известными функциями температуры,

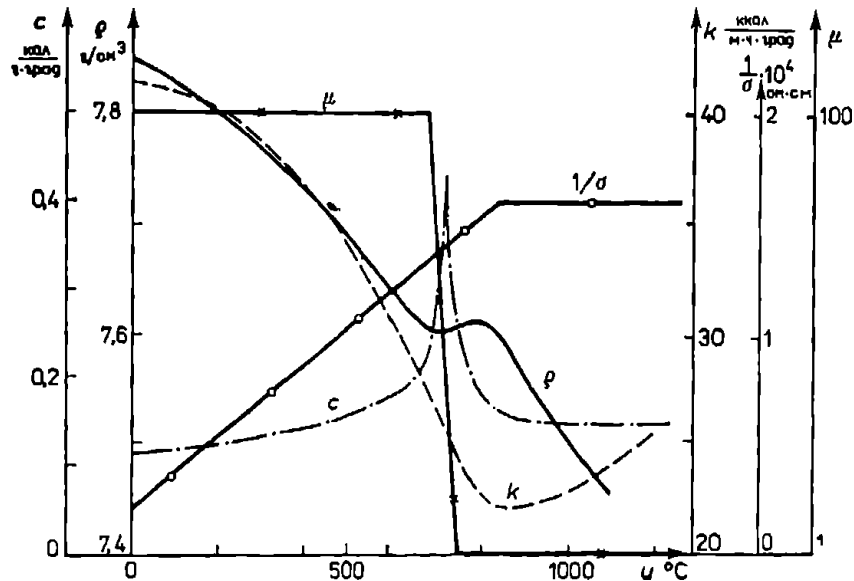


Рис. 5. Физические параметры для стали-40. — — — теплоемкость (c); плотность (ρ); — — — теплопроводность (k); —о— удельное сопротивление ($1/\sigma$); —х— магнитная проницаемость (μ)

и представления о них при нагреве, с учетом фазового перехода в точке Кюри, дается рисунком 5.⁽¹⁰⁾

В условиях (7)–(8) будем считать известной при нагреве также и $h = h(u)$ — коэффициент теплообмена на поверхности образца, так что единственным параметром, управляющим процессом нагрева является $\chi(t)$.

При охлаждении $Q(r, t, u) \equiv 0$ (уравнение (8) опускается), а функцией, управляющей процессом, оказывается $h(u) \equiv \hat{H}(u)$, которая моделирует, вообще говоря, непрерывную смену стадий теплообмена при описанной технологии.

Поскольку нас интересует условие управления, величину $\chi(t)$ следует считать неизвестной при нагреве. Зато известно, что управление следует осуществлять так, чтобы температурный режим поверхности описывался функцией, представленной на рис. 6, где выделяются

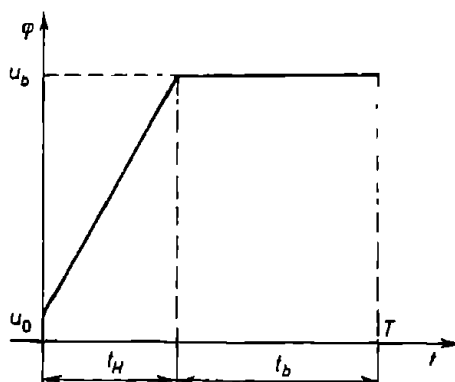


Рис. 6. Температурный режим поверхности образца

стадии быстрого нагрева и изотермической выдержки; величины t_H , t_b и u_b являются параметрами режима. Эта функция может быть использована как дополнительная информация при постановке обратной задачи об определении $\chi(t)$.

Точно также при охлаждении неизвестной является $\hat{H}(u)$, поскольку возможны различные механизмы теплообмена (пленочное и пузырьковое кипение, конвективный теплообмен). Для того, чтобы выяснить реальный закон при конкретных технологических условиях можно также воспользоваться температурой поверхности образца, на этот раз — измеренной.

⁽¹⁰⁾ Мы не рассматриваем здесь задачу об определении параметров $k(u)$, $c(u)$, $\rho(u)$ при быстром охлаждении, которая также решается с помощью регулирующих операторов.

Таким образом, как для нагрева, так и для охлаждения постановка задачи дополняется условием:

$$(9) \quad u|_{r=R} = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — заданная функция времени.

Итак, моделирование процесса закалки оказывается связанным с решением, по крайней мере, двух обратных задач. Они отличаются прежде всего тем, что первая из них должна решаться для каждого варианта расчета, наряду с определением температурного поля. Этому благоприятствует то, что для нагрева $\varphi(t)$ не измеряется, а задается априори. Вторая задача может быть решена однажды, по специально проведенному измерению температуры поверхности, поскольку режим охлаждения достаточно стабилен, и затем установленный закон $\dot{H} = \dot{H}(u)$ может использоваться для прямого расчета температурного поля при охлаждении. Второе различие задач состоит в том, что первая из них есть типичная задача управления, где требуется определить лишь одну из реализуемых функций $\chi(t)$, обеспечивающую приближение температурного режима к $\varphi(t)$ в заданных пределах. Напротив, другая задача есть задача интерпретации данных наблюдения, где критерием является сколь угодно точное (при достаточно малой погрешности данных) восстановление реального физического закона. Третье различие между этими задачами будет отмечено в п. 4.

2. Оказывается, что обе поставленные задачи могут быть решены в пределах точности задания с помощью одного и того же регуляризирующего алгоритма, поскольку в каждом случае нас интересует некоторая функция: $z(t)$, определенная на поверхности цилиндра. Формулируем этот алгоритм.

Очевидно, оператор соответствия Az есть оператор расчета температурного поля на поверхности образца, и численное решение такой задачи не представляет принципиальных трудностей, если использовать разностные схемы [14]. Если далее учесть эволюционный характер уравнения, то указанное отображение $z \rightarrow u(R, t)$ можно рассматривать, как последовательность: $A_s z_s$, где $z_s = z_s(t)$ определена на сегменте $\Delta_s = [t_s, t_{s+1}]$, и „частичный” оператор A_s определен условиями (7), (8), (9) (либо (7), (9)) с учетом непрерывности температуры в точке t_s . Наконец, будем искать $z(t)$ в классе кусочно-постоянных функций, так что z_s есть константа. ⁽¹¹⁾

⁽¹¹⁾ Для первой из обратных задач поиск решения в классе гладких функций был бы неоправдан, поскольку $\chi(t)$ ему не принадлежит из-за разрыва $\mu(u)$ в точке Кюри.

Тогда можно формулировать следующий „пошаговый” алгоритм:

$$(10) \quad z_{s+1}: \min(z - z_s)^2, \quad z \in Z_{s,\delta} \equiv \{z: \varrho_s^2(A_s z, \varphi_s) \leq \delta_s^2\}$$

где $\sum_s \delta_s^2 \leq \delta^2$, δ — заданная мера уклонения, $s = 0, 1, \dots, z_0 = 0$.

Корректность постановки задачи при каждом фиксированном s — прямое следствие общих теорем теории регуляризации [1]: для каждого s задача является простейшим аналогом (2), ϱ_s^2 — обычная среднеквадратичная невязка на $[t_s, t_{s+1}]$.

Специфика (10) состоит в том, что при каждом s задача решается неточно, так что для $s+1$ оператор A задается с погрешностью, переносимой через начальное условие в точке t_s „транзитная” погрешность.

Оказывается, однако, что при естественных свойствах оператора A для каждого $\delta > 0$ существует последовательность $\{\delta_s\}$, такая, что алгоритм (10) сходится на множестве кусочно-постоянных функций ограниченной вариации к точному решению задачи, если последнее принадлежит указанному множеству. В силу этого любой оператор извлечения $\{z_s\}$ из (10) является „условно-регуляризирующим” по Тихонову. Очевидно также, что такой оператор обеспечивает требование аппроксимации температурного режима при управлении нагревом — по постановке задачи (10).

Поскольку при каждом s минимизация проводится по одной числовой переменной, то любой из возможных методов (в том числе

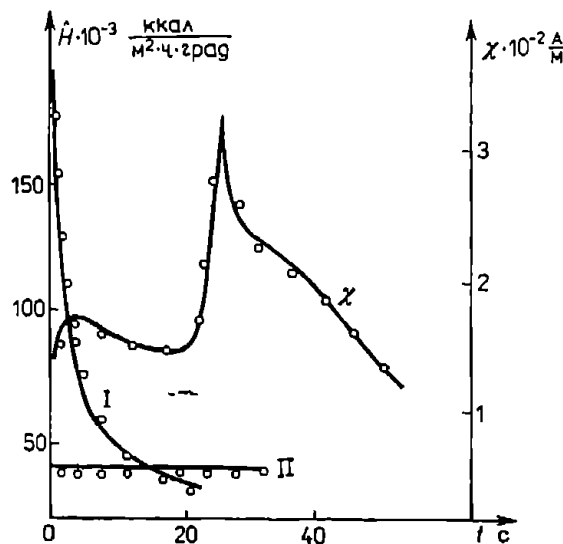


Рис. 7. Результаты решения обратных задач, связанных с процессом вакулки (модель). χ — магнитное поле на поверхности; I — коэффициент теплообмена при пузырьковом кипении; II — коэффициент теплообмена при конвекции.
— — точное значение, о о о — результаты расчета

и α -параметрический) существенно упрощается. Проще всего реализовать условно-регуляризующий оператор путем выбора приближения из последовательности, минимизирующий функционал невязки: $\varrho_s^2(A_s z, \varphi_s)$ — при начальном приближении $z = z_s$. Если при этом использовать процедуру Гаусса–Ньютона [8], т.е. линеаризацию оператора A_s в итерационном цикле, то элементы указанной последовательности можно выписать и явным образом.

При расчетах, результаты которых рассматриваются ниже, оказалось достаточным выбрать $\delta_s^2 = \delta^2/n$ при $n = 100$.

3. На рис. 7 представлены результаты решения обратных задач в „модельном” варианте, т.е. при априорно заданных функциях $\chi(t)$ и $\hat{H}(u)$. Две кривые $\hat{H}(u)$ отвечают различным законам теплообмена. Видно удовлетворительное совпадение результата расчета (точки на рисунке) с искомыми функциями. Заметим, что заданное поведение $\chi(t)$ отвечает режиму, найденному в ходе моделирования процесса для одной из марок сталей. Решение обратной задачи относительно $\hat{H}(u)$ для реальных данных позволило сделать вывод, что в рассматриваемых условиях реализуется конвективный теплообмен: $\hat{H}(u) = H_0$.

На рис. 8 представлено сравнение рассчитанных температурных полей с измеренными в реальном процессе на различных радиусах.

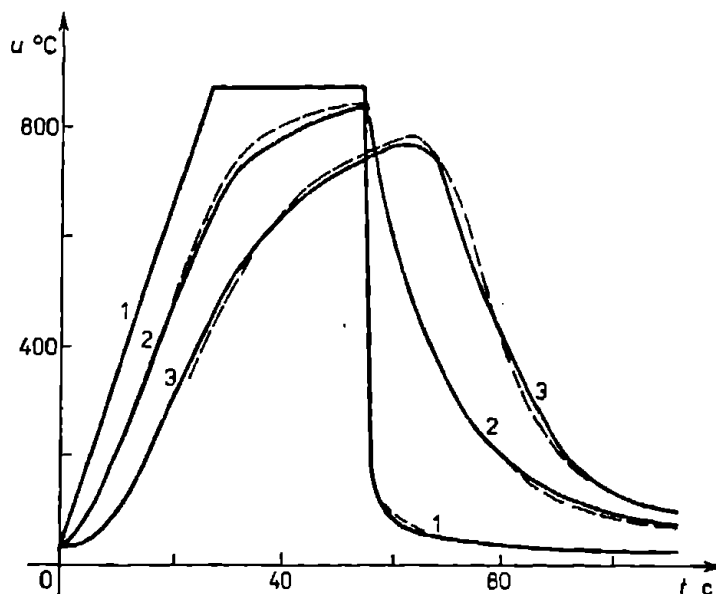


Рис. 8. Температурное поле при закалке для образца стали-40; $R = 24$ мм, $t_H = 27$ с, $t_b = 28$ с, $u_H = 870$ °C, $f = 2500$ щ: ——— результат расчета; - - - экспериментальные данные; 1 — $r = 24$ мм, 2 — $r = 16,5$ мм, 3 — $r = 0$ мм

Оба рисунка свидетельствуют об эффективности выбранного регуляризующего оператора, и таким образом, с его использованием

для решения сопутствующих обратных задач можно рассчитывать температурные поля „ u “, возникающие в образцах в процессе закалки.

Рассмотрим теперь некоторый оператор Φ , отображающий температурное поле на множество значений толщины закаленного слоя Δ : $\Phi(u) = \Delta$. Этот оператор не имеет какого-либо аналитического выражения, ибо связан с сопоставлением расчетных и таблично-графических данных относительно структурного состава и твердости материала образца. Такое сопоставление задается [15] некоторой программной процедурой, на которой мы здесь не останавливаемся. Однако, реализация этой процедуры завершает моделирование процесса закалки в целом. Некоторые результаты этого представлены на рис. 9, где величина Δ изображена как функция времени изотермии-

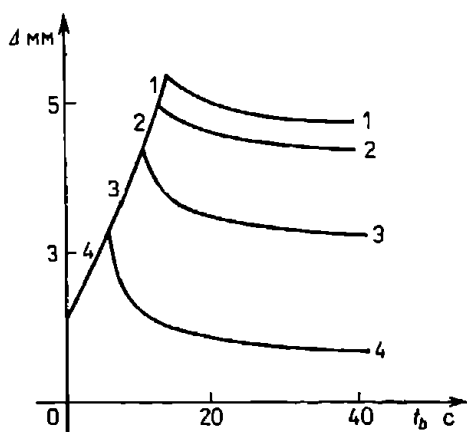


Рис. 9. Толщина закаленного слоя (при содержании 100 % маргансита) для образца стали-40, $R = 20$ мм, $t_H = 4$ с, $u_H = 850$ °С, $f = 2400$ ц: 1 — $H = 100\,000$ (ккал/м² · ч · град); 2 — $H = 40\,000$; 3 — $H = 12\,000$; 4 — $H = 5000$

ческой выдержки при разных значениях H_0 . В итоге обнаруживается существование максимального (при каждом H_0) значения Δ и, соответственно, оптимального времени выдержки t_{b_m} .

Таким образом, использование специального условно-регуляризующего по Тихонову оператора позволяет, так сказать, провести закалку без металла и индуктора и сделать наблюдения, полезные для экономии времени и энергии в реальном технологическом процессе.

4. Возвращаясь к результатам работ [2]–[3] заметим, что имеется возможность ввести первую из рассмотренных обратных задач (но не вторую!) в класс корректности по Тихонову совершенно естественным образом.

Заметим прежде всего, что в отличие от задачи относительно $\hat{H}(u)$, здесь требуется найти какое-либо реализуемое управление, обеспечивающее близость температурного поля на поверхности к заданной $\varphi(t)$, тогда как для последней — решение этой задачи по-

просту отсутствует. Следовательно, вместо $\varphi(t)$ можно априори выбрать $\tilde{\varphi}(t)$, достаточно гладкую для того, чтобы она могла представлять значения реального температурного поля, и такую, что $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\| \leq \delta$ — заданной.

Во-вторых, искомая функция $\chi(t)$ описывает значение магнитного поля на поверхности. Последнее подчиняется дифференциальному уравнению (8), рассматриваемому на конечном временном промежутке; следовательно, $\chi(t)$ заведомо непрерывна и дифференцируема всюду за исключением некоторого сегмента Δ_k , отвечающего окрестности точки Кюри где некоторые коэффициенты разрывны.

Таким образом, если рассматривать задачу об источнике температурного поля вне пределов указанной окрестности, то принадлежность решения некоторому компакт обеспечивается свойствами оператора без каких-либо дополнительных ограничений, и задача оказывается поставленной корректно по Тихонову (см. введение).

При таком подходе можно полностью формализовать условия введения задачи в класс корректности, если искать пару функций u, v из системы (7)'–(8)': $\chi(t) = v(R, t)$,

$$L(u, v) = 0,24 \frac{1}{\sigma} j^2(r, t, v),$$

$$(7)' \quad \begin{aligned} u \in U_0: \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0, \\ -k(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} &= h(u) (\varphi(t) - u_0) \Big|_{r=R}, \quad u|_{t=0} = u_0; \end{aligned}$$

$$M(u, v) = 0,$$

$$(8)' \quad \begin{aligned} v \in V_0: \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0, \\ \frac{0,12}{\sigma} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 &= c(u) \varrho(u) \varphi'(t) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Последнее условие есть следствие уравнения теплопроводности и обеспечивает принадлежность $\varphi(t)$ множеству граничных значений температурного поля.

В силу нелинейности этого условия и нелинейности уравнений, для решения задачи (7)'–(8)' с помощью разностных методов может быть использован некоторый итерационный процесс, допускающий „локальную” (на каждой итерации) изоляцию задач (7)' и (8)'.

Таким образом, в известной ситуации, пример которой (сравнительно редкий) дает рассмотренная задача, концепция введения в класс

корректности по Тихонову является эффективной и в вычислительном отношении.

§ 3. Задача интерпретации данных наблюдений для горизонтально-слоистых сред

1. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим примеры реализации общего регуляризирующего оператора Тихонова (2). Отметим, что поскольку решение задачи (2) при $\alpha = \alpha(\delta)$ существует и устойчиво по отношению к точному \bar{z} , а последнее — единственно, то постановку задачи (2) естественно назвать обобщенно-корректной по Тихонову (единственность экстремали z_α не является необходимым требованием [1]), и мы будем пользоваться этим понятием, относя его к задачам интерпретации, для которых существенна единственность точного решения. При рассмотрении задачи интерпретации в классе слоистых сред мы обратим специальное внимание на анализ проблемы единственности.

2. Естественная горизонтально-слоистая модель региональной структуры широко используется в геофизике. В ряде задач электро- и сейсморазведки рассматриваются волновые поля, определенные в „пачке” n слоев, заключенных между двумя полупространствами, одно из которых соответствует глубинам земли, а другое верхнее — атмосфере. Наблюдаемый на поверхности сигнал обычно подвергается спектральному анализу, так что скалярное волновое поле описывается функцией $v = v(\omega, z)$ (z — вертикальная координата).

В предположении, что нижнее полупространство не содержит источников, рассмотрим поле, где v с точностью до мультипликативной константы определена условиями:

$$\begin{aligned} v_j'' + k_j^2 v_j^2 &= 0, \quad z \in [z_{j-1}, z_j], \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad z_0 = 0, \\ (11) \quad [v_j]_{z_j} &= 0, \quad [p_j v_j']_{z_j} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n), \\ v_{n+1}(z_n) &= 1, \quad v_{n+1}'(z_n) = i k_{n+1}(\omega). \end{aligned}$$

Решение этой задачи зависит от совокупности параметров структуры, в число которых входят $d_j = z_{j+1} - z_j$, p_j и некоторые величины, определяющие волновые числа k_j .

Пусть $f = f(\omega, v_1'(0)/v_1(0))$ — такая характеристика наблюдаемого на поверхности поля, которой соответствует единственная пара (n, \vec{p}) , где \vec{p} — совокупность параметров структуры или некоторая их комбинация. Тогда при неточных значениях $f = \tilde{f}(\omega)$ можно рассматривать

обобщенно-корректную постановку обратной задачи типа (2). Обычно,

$$\varrho_F^2(\hat{f}, \tilde{f}) \equiv \sum_{s=1}^M |\hat{f}(\omega_s) - \tilde{f}(\omega_s)|^2.$$

Поэтому, вводя в качестве стабилизатора среднеквадратичную норму отклонения \vec{p} от некоторого заданного \vec{p}^0 (см. п. 3) — приходим к постановке задачи, аналогичной (2), где $A\vec{p} \equiv f(\omega, v_1'(0)/v_1(0))$ и (v_1, v_1') определены задачей (11).

3. Несмотря на то, что нелинейный оператор A задан неявным образом, регуляризирующий оператор может быть определен обращением уравнений Эйлера, соответствующих (2) после линеаризации A по Гауссу–Ньютону [8]. В данном случае, как нетрудно убедиться, последовательное приближение к экстремали сглаживающего функционала определяется следующей алгебраической системой:

$$(12) \quad \sum_{l=1}^m c_{ql} p_l + \alpha p_q = b_q \quad (q = 1, 2, \dots, m),$$

$$\{p_l\} = \vec{p},$$

где

$$c_{ql} = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_s}{\partial p_l} \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial p_q},$$

$$b_q = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^M \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial p_q} \left(\tilde{f}_s - f_s + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial p_l} p_l^0 \right) + \alpha p_q^0,$$

\vec{p}^0 — заданный априорно вектор, f_s и ее производные взяты в точке \vec{p}_{n-1} , \bar{f} — комплексно-сопряженная к f .

Величины, определяющие описанный алгоритм, вычисляются элементарно. В самом деле, для вычисления заданной $\{f_s\}$ достаточно знать $\{v_1(0), v_1'(0)\} \equiv w_1$; для этой величины справедливо (напр. [16]) представление:

$$(13) \quad w_1 = \left(\prod_{j=1}^n S_j \right) w_{n+1}, \quad S_j = \begin{bmatrix} \cos k_j d_j & -\frac{p_j}{p_{j+1} k_j} \sin k_j d_j \\ k_j \sin k_j d_j & \frac{p_j}{p_{j+1}} \cos k_j d_j \end{bmatrix},$$

$$w_{n+1} = \{1, ik_{n+1}\}$$

— легко реализуемое на ЭВМ. Эта формула удобна, с другой стороны, для вычисления $\partial f_s / \partial p_l$, сводящегося к вычислению $\partial w_1 / \partial p_l$. Действительно, пусть $p_l \equiv p_{l_k}$ — один из параметров, связанных с k -ым слоем; так как от него зависит только матрица S_k , то $\partial w_1 / \partial p_{l_k}$ выражается формулой, аналогичной (13) с заменой матрицы S_k на $\partial S_k / \partial p_{l_k}$. В [16] подобные точные выражения для производных получены и в случае векторного поля в слоистой среде.

4. Принципиальным вопросом, составляющим предмет специального исследования, является вопрос о единственности решения задачи при точных входных данных. Ответ на него, по существу, означает (а) достаточно ли знать данную функцию $f(\omega)$ для определения параметров структуры и (б) каких именно параметров. Естественно, что последнее зависит от конкретного вида $f(\omega)$.

В ряде задач [17] $f(\omega) \equiv I_0(\omega) \equiv \frac{1}{\kappa_0} \frac{v_1'(0)}{ik_1 v_1(0)}$ ($\kappa_0 = \frac{k_0 p_0}{k_1 p_1}$) — импеданс структуры или однозначно связанный с ним $r_{0,n}(\omega) \equiv \frac{1 - I_0(\omega)}{1 + I_0(\omega)}$ — коэффициент отражения на верхней границе среды.

Этот последний имеет аддитивное представление [18]:

$$(14) \quad r_{0,n}(\omega) = \sum_{s=0}^n W_s \frac{R_s}{q_s} e^{i\lambda_s} \equiv r_{0,j}(\omega) + \sum_{s=j+1}^n W_s \frac{R_s}{q_s} e^{i\lambda_s},$$

где $R_s = (\kappa_s - 1) / (\kappa_s + 1)$ — коэффициент отражения Френеля, $\kappa_s = k_s p_s / k_{s+1} p_{s+1}$; $W_s = \prod_{k=1}^s (1 - R_k^2) / q_k^2$ ($s = 1, \dots, n$), $W_0 = 1$; $q_s = 1 + \varrho_s R_s e^{2ik_s d_s}$, причем если r_s — коэффициенты отражения поля на нижней границе каждого слоя, то ϱ_s — коэффициенты отражения „встречной” волны, отвечающей источнику в нижнем полупространстве ⁽¹²⁾; $\lambda_s = 2i \sum_{m=1}^s k_m d_m \equiv \lambda_{s-1} + 2ik_s d_s$; $r_{0,j}(\omega)$ — коэффициент отражения пачки j слоев на полупространстве с параметрами $(j+1)$ -ого слоя, в частности, $r_{0,0}(\omega) = R_0$.

Заметим, что (14) справедливо при достаточных условиях: $\operatorname{Re} \kappa_j > 0$, $\operatorname{Im} k_j \geq 0$.

Характерно, что в этом представлении последовательно (по j) выделяются элементы, зависящие только от параметров первых j

⁽¹²⁾ Известно, что $r_j = \frac{R_j + r_{j+1} \exp(2ik_{j+1} d_{j+1})}{1 + R_j r_{j+1} \exp(2ik_{j+1} d_{j+1})}$, $j = n, n-1, \dots, 0$; $r_{n+1} = 0$; тогда $\varrho_s = \frac{R_s + \varrho_{s-1} \exp(2ik_{s-1} d_{s-1})}{1 + R_s \varrho_{s-1} \exp(2ik_{s-1} d_{s-1})}$, $s = 1, 2, \dots, n$; $\varrho_0 = 0$ [18].

слоев. Это дает возможность проводить индукцию и делает аддитивное представление удобным для анализа единственности в целом ряде задач.

С другой стороны, из (14) следует, что $r_{0,n}(\omega)$ зависит только от совокупности $\{n, \kappa_s, k_s d_s\}$. Следовательно, априори можно говорить о единственности восстановления по импедансу только тех комбинаций физических параметров („динамических” параметров структуры), которые однозначно определяются указанными комбинациями. Не исключено, однако, что при некоторой минимальной дополнительной информации о структуре, могут быть однозначно определены и ее физические параметры.

Рассмотрим вопросы единственности для конкретных обратных задач.

5. В задаче МТЗ [17] v — амплитуда (магнитного поля) нормально падающей на поверхность плоской волны. $k_j^2 = i\omega\sigma_j$ (σ_j — проводимости слоев), и $k_j = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\sigma_j}{2}}$, $p_j = 1$ ⁽¹³⁾; $\kappa_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_{j+1}}$. В этом случае $\operatorname{Re} \lambda_s < 0$, и согласно (14) влияния элементов последовательных слоев структуры экспоненциально убывают при $\omega \rightarrow \infty$. Допуская уже определенными параметры, соответствующие $r_{0j}(\omega)$, то есть — заданной функцию $\Delta_j(\omega) \equiv r_{0,n}(\omega) - r_{0,j}(\omega)$, заметим, что главный член этой разности при $\omega \rightarrow \infty$ некомпенсируем; значит, двум различным парам $(\kappa_{j+1}, \sigma_{j+1} d_{j+1})$ не могут отвечать тождественно совпадающие $\Delta_j(\omega)$.

Таким образом, верна [18]

ТЕОРЕМА 4. *Импеданс (коэффициент отражения) электромагнитного поля в задаче МТЗ для плоской горизонтально-слоистой структуры однозначно определяет динамические параметры $(n, \sigma_j d_j, \sigma_j/\sigma_{j+1})$.*

Если одно из значений σ_j априорно известно, то импеданс однозначно определяет все физические параметры структуры ⁽¹⁴⁾.

Если в качестве характеристики наблюдаемого поля принято кажущееся сопротивление: $\varrho_0(\omega) = |I_0(\omega)|$, то соответствующее аддитивное представление ⁽¹⁵⁾ имеет вид [20]:

$$(15) \quad v_{0,n}(\omega) = v_{0,j}(\omega) - 2 \sum_{s=j+1}^n C_s R_s e^{-\sqrt{2\omega} w_s} \{ \cos(\sqrt{2\omega} w_s) + e^{-\sqrt{w_s}} \varphi_s(\omega) \},$$

⁽¹³⁾ Магнитная проницаемость $\mu = 1$.

⁽¹⁴⁾ Проблема для более общего класса структур рассмотрена в [19].

⁽¹⁵⁾ Дано для $\varrho_0 = \sqrt{\sigma_0}$.

где

$$w_s = \sum_{k=1}^s \sqrt{\sigma_k} d_k; \quad C_s = 4^{s-1} \sqrt{\sigma_s} \left(\prod_{k=1}^{s-1} \left(1 + \frac{1}{\kappa_k} \right)^2 \right)^{-1}; \quad v_{0,0}(\omega) \equiv \sqrt{\sigma_1};$$

$$v_s = \min_j \{d_j \sqrt{\sigma_j}\}, \quad 1 \leq j \leq s; \quad \varphi_s(\omega) = O(1) \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Отсюда, как и выше, можно сделать заключение, что и кажущееся сопротивление при минимальной дополнительной информации о структуре однозначно определяет все ее физические параметры.

Аналогичное представление для фазы импеданса [20] свидетельствует о том, что последняя также может служить определяющей параметрами характеристик поля и, с другой стороны, не несет дополнительной информации о структуре по сравнению с кажущимся сопротивлением.

Идеологии МТЗ соответствует аналогичная постановка задачи об упругих колебаниях сжатия в слоистой среде, если заданному на дневной поверхности „плоскому” гармоническому источнику сопоставляется известный закон колебаний поверхности [21]. Пусть наблюдаемой характеристикой поля является упругий импеданс среды. В этом случае $k_j^2 \approx \omega^2/a_j^2$ (a_j — скорость волн сжатия в j -ом слое); $\rho_j = \rho_j a_j^2$ (ρ_j — плотность), $\kappa_j = \rho_j a_j^2 / \rho_{j+1} a_{j+1}^2$. Таким образом, „динамическими” параметрами, относительно которых имеет смысл проблема единственности, являются: κ_j и $\theta_j \equiv d_j/a_j^2$. Так как $\text{Im} k_j = 0$, то члены (14) не являются убывающими при $\omega \rightarrow \infty$, однако, уподобляются членам обобщенного ряда Фурье [22] с заведомо различными показателями ($\lambda_s \equiv i\nu_s$, $\nu_{s+1} > \nu_s > 0$). И в самом деле [18], из определения элементов формулы (14) можно по индукции заключить, что для любого j $\Delta_j(\omega) = r_{0,n}(\omega) - r_{0,j}(\omega) = C_j R_{j+1} e^{i\nu_j+1} \{1 + \Phi_{j+1}(\omega)\}$, где $C_s = \prod_{k=1}^{s+1} (1 - R_k^2)$, а $\Phi_{j+1}(\omega)$ — обобщенный тригонометрический ряд с положительным младшим показателем Фурье. Отсюда, согласно [22] следует, что ν_{j+1} , R_{j+1} однозначно определяются заданной $\Delta_j(\omega)$. Следовательно, по индукции — заданным $r_0(\omega)$ однозначно определяются все указанные динамические параметры структуры, включая и число ее слоев 2.

Заметим, что рассмотренная сейсмическая модель может представлять больший интерес для некоторых инструментальных задач, включающих конструкцию оптических фильтров и отражателей. Для таких задач коэффициент отражения можно рассматривать как естественную характеристику поля. В этом случае $k_j^2 = \omega^2 n_j^2$ ($n_j = \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$ — показатель преломления), $\kappa_j = \gamma_j / \gamma_{j+1}$ ($\gamma_j = \sqrt{\mu_j / \epsilon_j}$ — волновое сопро-

тивление слоя), и аналитическая структура (14) аналогична предыдущей. Следовательно, коэффициент отражения рассматриваемой оптической системы однозначно определяет совокупность оптических толщин $\{n_j d_j\}$ и (при минимальной дополнительной информации: γ_0 — известно) — совокупность волновых сопротивлений $\{\gamma_j\}$ слоев, а также, разумеется — число последних.

6. Доказанные факты единственности позволяют уверенно ставить задачи интерпретации соответствующих данных, а наличие общего регуляризирующего оператора — решать их. Это не значит, что при имеющейся в эксперименте погрешности, на которую накладывается погрешность модели, мы всегда получим точное представление о структуре, однако, благодаря устойчивости алгоритма — получим объективную о ней информацию, сопоставимую с данными наблюдений в пределах погрешности. Рассмотрим некоторые результаты интерпретации данных МТЗ.

Проведенный в [20] численный эксперимент обнаружил, что при достаточно высокой точности входных данных ($\sim 0,1\%$) геоэлектрический разрез может быть восстановлен сколь угодно точно и вместе с тем — что имеется большой уровень практической эквивалентности структур. На рис. 10 (в) приведена апостериорная зависимость погрешностей результата от δ ; для некоторой модели, ближайшей к рассматриваемой ниже ситуации, видно, что при $\delta \sim 1\%$ погрешность результата может доходить до $\sim 20\%$.

На рис. 10 (а) представлены данные, относящиеся к одному из нефтеносных районов Западной Сибири, объявленная погрешность которых составляет $\sim 5\%$. То, что эти данные слабо зависят от ориентации измерительного прибора, оправдывает использование рассматриваемой слоистой модели.

По априорным геологическим данным в изучаемом районе выделяются три пласта (возможно более тонко дифференцированные) с гипотетическим распределением средней проводимости, представленным на диаграмме рис. 10 (б) крестики. Однако, рассчитанное на ЭВМ отвечающее этому разрезу кажущееся сопротивление (крестики на Рис. 10 (а)) — явно не согласуются с данными измерений.

Примем указанную априорную информацию \vec{p}^0 за начальное приближение для регуляризирующего оператора, рассмотренного в п. 2, и проведем расчет при различных значениях n (считая число слоев неизвестным). Результаты для крайних значений: $n = 3$ и $n = 10$ изображены на рис. 10 (б). Соответствующие кривые кажущегося сопротивления, неотличимо одна от другой, хорошо аппроксимируют данные наблюдений (рис. 10 (а) — пунктир). Видно, что определенные параметры (особенно препроводимость) в самом деле имеют предсказанную

погрешность; тем не менее, во всех случаях воспроизводится общий характер структуры, а параметры верхнего слоя и полупространства определяются достаточно точно.

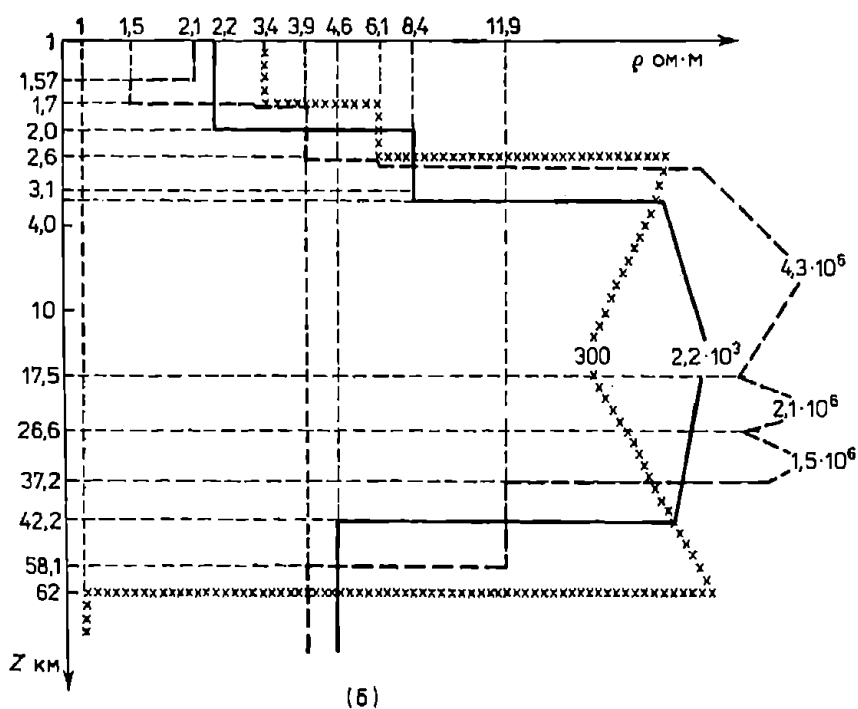
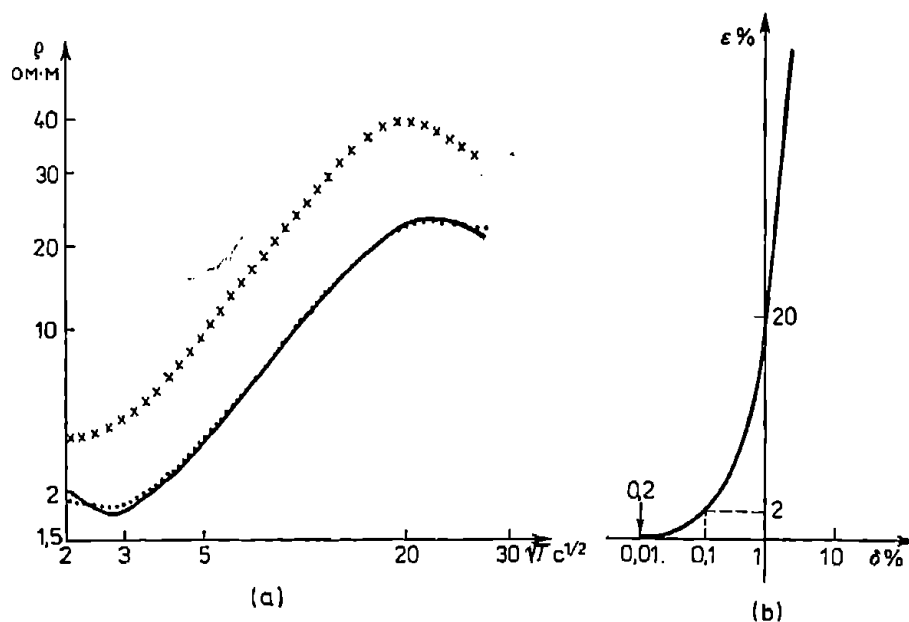


Рис. 10 (а) Кажущееся сопротивление на поверхности земли для МТЗ: хххх — начальное приближение; — — — — результат наблюдения; — результат расчета. (б) Восстановление структуры с помощью Р. О. хххх — начальное приближение; — — — — $n = 3$; — — — — $n = 10$. (в) Возможная погрешность результата в зависимости от погрешности входных данных

Имея в виду большую погрешность входных данных МТЗ естественно отказаться от определения полной совокупности параметров, принимая информацию о положении границ основных слоев структуры по данным каротажа.

Таблица 1

параметры	их значения
ρ_1 ом·м	2,02
d_1 км	1,6
ρ_2 ом·м	98
d_2 км	1,5
ρ_3 ом·м	132

В таблице 1 приведены результаты восстановления проводимостей для другого разреза в том же районе, сопоставимые по точности с данными наблюдений, о чем свидетельствует рис. 11.

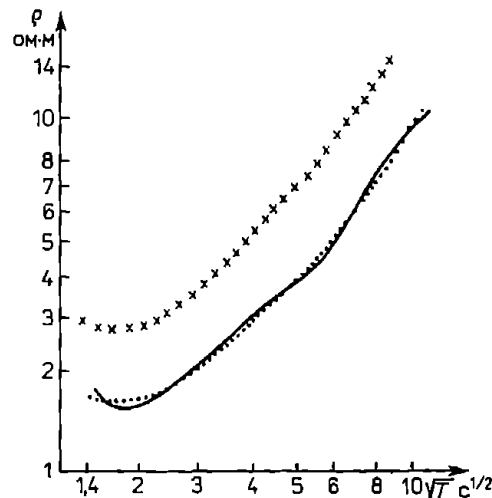


Рис. 11. Кривые МТЗ при расчете с фиксированными толщинами слоев — — — наблюдаемая; — рассчитанная; хххх — начальное приближение

§ 4. О решении одной обратной задачи теплопроводности с помощью общего регуляризирующего оператора Тихонова

1. Широкий круг обратных задач теплопроводности, имеющих техническое применение, связан с ситуацией, когда контроль за тепловым состоянием поверхности некоторого тела не может быть выполнен прямыми измерениями на ней по той, например, причине, что

температура поверхности близка к температуре разрушения материала, а темпы нагрева высоки. В этой ситуации о состоянии поверхности приходится судить по измерениям температуры внутри тела.

В рамках одномерной, для простоты, модели температурное поле описывается уравнением, аналогичным (8) при $Q \equiv 0$, для $u = u(x, t)$, $x \in [0, 1]$ с дополнительными условиями: $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$ и $u|_{x=0} = \mu(t)$, либо $-k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi(t)$.

Обратная задача ставится относительно $\mu(t)$, либо $\psi(t)$, для чего дополнительно используется условие: $u(x_1, t) = \tilde{f}(t)$, где $\tilde{f}(t)$ измеряемая в точке $x_1 > 0$ температура.

Некорректность постановки задачи в нелинейном случае физически очевидна: нагреваемое тело „не чувствует” высокочастотной составляющей теплового потока на границе; следовательно, малые вариации могут рассматриваться как следы быстроперменного потока со сколь угодно большой амплитудой.

2. Такая задача, в определенном смысле, аналогична задаче о продолжении потенциального поля в сторону источников, и в линейной ее постановке (k, c, ρ — суть константы) приближения $\mu^\delta(t)$ либо $\psi^\delta(t)$ могут быть получены с помощью регуляризирующего оператора, рассмотренного в § 1 (либо его непрерывного аналога [1] — в случае $R = \infty$). Однако, в нелинейном случае целесообразно воспользоваться общим регуляризирующим оператором (2). Обозначим $v(t)$ любую из функций: $\mu(t)$, $\psi(t)$; $Av = f(\tilde{t}, v) \equiv u(x_1, t)$ — при каждом заданном $v(t)$; $U \equiv L_2[0, T]$. Введем стабилизатор формулой: $\Omega[v] = \int_0^T v'^2(t) dt$, $v(0) = 0$, $v'(T) = 0$, и рассмотрим вариационную задачу (2).

Для линейной задачи оператор A может быть задан явным образом, и естественный регуляризирующий оператор определяется известным линейным уравнением Эйлера: $(A^*A + \alpha L)v = A^*\tilde{f}$ [1], при выборе $v_\alpha = v_{\alpha(\delta)}$ из некоторой последовательности экстремалей по критерию невязки, либо — квазиоптимальному.

В нелинейном случае, несмотря на неявное задание Av , можно воспользоваться линеаризацией по Ньютону–Гауссу в итерационном цикле, включив этот цикл в процедуру спуска по параметру α с прерыванием по тем же критериям [5]. В рассматриваемой задаче значение $Av = \tilde{f}(t)$ определяется в силу конечно-разностной схемы, и соответственно, искомой $v(t)$ сопоставляется вектор $\vec{p} \equiv \{p_i = v(t_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Av аппроксимируется функцией многих переменных: $Av = \{f[t_i, \vec{p}] \equiv f_i(\vec{p})\}$, и его производная Фреше — матрицей Якоби:

$[\partial f_i / \partial p_k]$ — которая оказывается треугольной, поскольку для данного i (момента t_i) f_i зависит только от компонент p_1, p_2, \dots, p_i — значений краевой функции в предшествующие моменты. Значения производных в данном случае не имеют простого явного выражения, но могут определяться численно:

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_k} \sim \frac{f(t_i, \dots, p_k + \delta_k, \dots) - f(t_i, \dots, p_k, \dots)}{\delta_k}. \quad (16)$$

В данном случае шаг δ_k может быть выбран априорно по величине диагональных (минимальных) элементов — так, чтобы погрешность вычисления производных не превышала 1%.⁰

Допустим, что разностная сетка введена со сдвигом на полшага относительно концов интервала: $t_i = \left(i + \frac{h}{2}\right) \Delta t$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда очередная итерация $v_n \equiv \vec{p}_n$ при каждом α в схеме (12) определяется следующей системой уравнений:

$$(16) \quad \sum_{s=1}^N c_{qs} p_s - \frac{\alpha}{\Delta t} (p_{q+1} - 2p_q + p_{q-1}) = b_q \quad (q = 1, 2, \dots, N),$$

$$p_0 = -p_1, \quad p_{N+1} = p_N,$$

где

$$c_{qs} = \sum_{i \geq q, s}^N \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial p_q} \cdot \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial p_s}, \quad b_q = \sum_{i \geq q}^N \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial p_q} \left(\tilde{f}_i - f_i + \sum_{i \geq s}^N \frac{\partial f_i}{\partial p_s} p_s \right)$$

причем f_i и производные берутся в точке \vec{p}_{n-1} .

3. На рис. 12 представлен результат численного решения задачи об определении теплового потока с помощью общего регуляризующего оператора.

Задача решалась [23] на ограниченном отрезке ($l = 5$ мм) для достаточно быстрого процесса ($T = 5$ сек) при $k(u) = 0,75 \cdot 10^{-5} u$, $c(u) = 0,06 - 0,2 \cdot 10^{-4} u$ и следующих параметрах разностной схемы: $h = 0,1l$, $\Delta t = 0,5$ с. На рисунке представлены температурный профиль, заданный в точке $x = 0,25l$ и результаты расчета по описанному выше алгоритму. Приближение, выбранное квазиоптимальным спо-

(16) Это предполагает повторный расчет решения дифференциального уравнения по разностной схеме для каждого i .

собом совпадает с точным решением. Из приведенного рисунка видно также, что „решение” задачи без регуляризации ($\alpha = 0$) даже при отсутствии погрешности резко отличается от истинного. То, что отклонение не столь разительно, как в задаче § 1, объясняется тем, что в данном эксперименте выбран большой шаг аппроксимации.

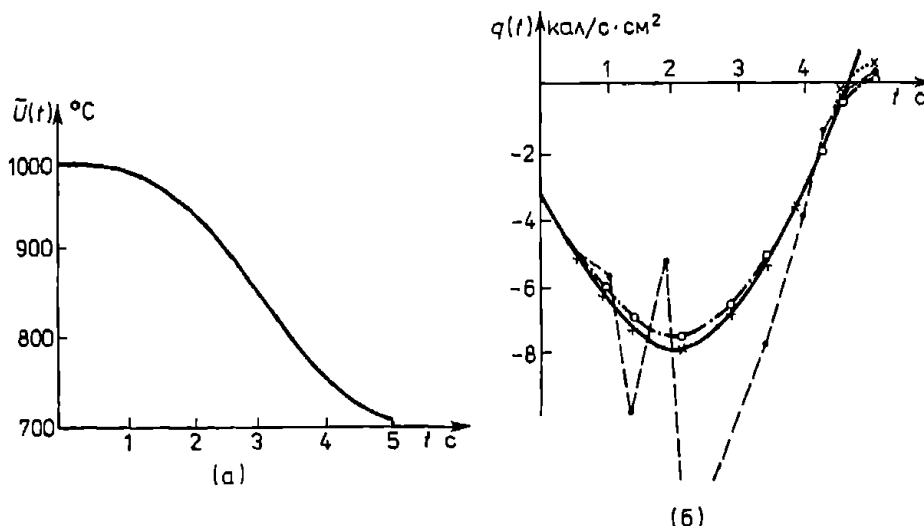


Рис. 12. (а) Температура во внутренней точке стержня. (б) Приближения теплового потока в сравнение с точным значением: — — точное значение; х — результат при $\delta = 10^{-3}u_{\max}$; о — результат при $\delta = 10^{-2}$; — — — — результат при $\delta = 0$, $\alpha = 0$

Приведенные в последних двух параграфах примеры свидетельствуют об эффективности общего регуляризирующего оператора Тихонова (2). Другие аспекты его приложений можно найти в [5].

Литература

- [1] А. Н. Тихонов, А. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, „Наука”, Москва 1979.
- [2] А. Н. Тихонов, *Об устойчивости обратных задач*, Докл. АН СССР 39.5 (1943), 195–197.
- [3] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск 1962.
- [4] А. Н. Тихонов, *О регуляризации некорректно поставленных задач*, Докл. АН СССР 153.1 (1963), 48–52.
- [5] В. Б. Гласко, *Математические модели, связанные с обратными задачами геофизики и метод регуляризации Тихонова*, Banach Center Publications, volume 3, Warszawa 1978, 343–366.
- [6] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов, *О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс в гравиметрической и магнитной разведках на основе метода регуляризации*, Физика Земли 12 (1968), 30–48.

- [7] П. Н. Вабищевич, В. Б. Гласко, Ю. А. Криксин, *О решении одной задачи Адамара с помощью регуляризирующих по Тихонову алгоритмов*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 19.6 (1979), 1462–1470.
- [8] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, *Применение метода регуляризации в нелинейных задачах*, *ibid.* 5.3 (1965), 463–473.
- [9] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Ю. А. Криксин, *К вопросу о квазиоптимальном выборе регуляризованного приближения*, Докл. АН СССР 248.3 (1979), 531–535.
- [10] А. С. Леонов, *О выборе параметра регуляризации по критериям квазиоптимальности и отношения*, *ibid.* 240.1 (1978), 18–20.
- [11] В. Р. Мелников, *Решение некоторых обратных задач на основе устойчивого продолжения потенциальных полей в нижнее полупространство*, Дисс. на соиск. уч. ст. кандидата физ. мат. наук, Москва 1968.
- [12] Н. В. Музылев, *Об алгоритме упрощенной регуляризации*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 15.3 (1975), 772–775.
- [13] В. Б. Гласко, Н. И. Кулик, А. Н. Тихонов, И. Н. Шкляров, *Об одной обратной задаче теплопроводности*, *ibid.* 19.3 (1979), 768–774.
- [14] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, „Наука“, Москва 1971.
- [15] Н. И. Кулик, *О математическом моделировании процесса индукционной закалки стальных цилиндрических образцов*, Дисс. на соиск. уч. ст. кандидата физ. мат. наук, Москва 1980.
- [16] В. Б. Гласко, И. В. Савин, Е. Ф. Саваренский, *Об одном алгоритме вычисления частных производных неявной функции в некоторых обратных задачах сейсмологии*, Изв. АН СССР, Физика Земли 1 (1978), 36–43.
- [17] А. Н. Тихонов, *О вариациях земного электромагнитного поля*, Докл. АН СССР 87.4 (1952), 547–550.
- [18] В. Б. Гласко, Ю. И. Худак, *Аддитивные представления характеристик слоистых сред и вопросы единственности решения обратных задач*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 20.2 (1980).
- [19] А. Н. Тихонов, *К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований*, *ibid.* 5.3 (1965), 545–548.
- [20] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Н. И. Кулик, И. А. Безрук, А. С. Сафонов, *Интерпретация данных МТЗ на основе метода регуляризации*, Прикладная геофизика, вып. 100, Недра, Москва 1980.
- [21] Н. А. Трапезникова, В. Б. Гласко, *Регуляризирующий алгоритм решения одной обратной задачи сейсморазведки*, Прикладная геофизика, вып. 92, Недра, Москва 1978, 59–64.
- [22] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, ГИТЛ, Москва 1953.
- [23] В. Б. Гласко, М. В. Захаров, А. Я. Колп, *О применении метода регуляризации к решению одной обратной задачи нелинейной теории теплопроводности*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 15.6 (1975), 1607–1611.

*Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20 – May 30, 1980*
