

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В. А. ДОРОДНИЦЫН, Г. Г. ЕЛЕНИН, С. П. КУРДЮМОВ

Институт Прикладной Математики АН СССР, Москва, СССР

Введение

1. Успех исследования различных задач для нелинейных уравнений с помощью вычислительного эксперимента невозможен без применения традиционных методов математической физики. Средства этой дисциплины позволяют корректно ставить новые задачи, давать информацию о качественной стороне исследуемой задачи. Одним из таких средств является построение точных частных решений. Достаточно широкий класс частных, так называемых инвариантных решений может быть получен с помощью техники группового анализа [1]. Инвариантные решения во многих случаях передают основные особенности задачи, отдельные стадии процессов, и могут быть проанализированы сравнительно простыми средствами. С другой стороны, точные решения незаменимы как тесты при построении и отладке численных методик.

Настоящая работа посвящена получению и анализу частных точных решений для достаточно широкого класса квазилинейных уравнений параболического типа и является составной частью цикла работ по исследованию сверхбыстрых процессов в нелинейных средах [2–4], проводимого в ИПМ АН СССР под руководством А. А. Самарского. Интерес к подобным процессам, часто называемым „режимами с обострением“, связан с рядом их необычных свойств, как, например, явление локализации областей нагрева в нелинейных средах.

2. Здесь мы рассмотрим частные точные решения уравнения

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + Q(T), \quad K(T) \geq 0.$$

Этим уравнением описывается, в частности, эволюция температурного поля в нелинейной среде при наличии источников тепла знакопере-

менного типа. Для уравнения (1) будут построены решения задач Коши, приводящих к сверхбыстрым процессам развития тепловых возмущений. В работе [8] с помощью методики [1] была проведена групповая классификация уравнения (1). Были получены все те частные виды функций $\{K(T), Q(T)\}$, которые приводят к расширению группы преобразований, допускаемых уравнением (1):

$$\{T^\sigma, \pm T^n\}, n \neq 0; 1; (\sigma+1).$$

$$\{1, \pm T \ln T\}.$$

$$\{T^\sigma, (\pm T^{\sigma+1} + \delta T)\}, |\delta| = 1.$$

$$\{T^{-4/3}, \pm T^n\}, n \neq 0; 1; -1/3.$$

$$\{T^\sigma, \pm T^{\sigma+1}\}.$$

$$\{T^{-4/3}, \pm 1\}.$$

$$\{T^\sigma, \pm 1\}.$$

$$\{T^\sigma, \pm T\}.$$

$$\{1, \pm T^n\}, n \neq 0; 1.$$

$$\{e^T, (\pm e^T + \delta)\}, |\delta| = 1.$$

$$\{1, \pm e^{\beta T}\}, \beta \neq 0.$$

$$\{e^T, \pm e^{\beta T}\}, \beta \neq 0.$$

$$\{e^T, \pm 1\}.$$

$$\{T^{-4/3}, (\pm T^{-1/3} + \delta T)\}, |\delta| = 1.$$

$$\{T^{-3/4}, \pm T^{-1/3}\}.$$

$$\{T^{-4/3}, \pm T\}.$$

$$\{1, \pm 1\}.$$

$$\{1, \pm T\}.$$

Для каждого из перечисленных выше сочетаний коэффициентов $\{K(T), Q(T)\}$ был получен в определенном смысле [1] исчерпывающий перечень инвариантных решений — набор решений, из которых преобразованиями соответствующей группы может быть сконструировано любое инвариантное решение этого уравнения. Первый из перечисленных случаев ($K = T^\sigma, Q = \pm T^n$) в рамках задачи Коши подробно изучен в работах [3], [4], [6].

Ниже будут рассмотрены задачи Коши для уравнения (1), в котором $\{K(T), Q(T)\}$ отвечают второму и третьему случаю. Будут изу-

чатся лишь те решения, в которых температурное возмущение ограничено по пространству, $T(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

3. Нагрев среды благодаря наличию нелинейного источника тепла может происходить в различных режимах. В некоторых случаях амплитуда температурного распределения неограниченно растет, — если это происходит за конечное время, то такие решения называют режимами с обострением; в других случаях с течением времени происходит выход на стационарное значение амплитуды. Режимы с обострением могут сопровождаться локализацией температурного возмущения на так называемой фундаментальной длине [3].

1. Уравнение линейной теплопроводности со знакопеременным источником

Одно из инвариантных решений в случае линейной теплопроводности и „слабонелинейного” источника

$$(1.1) \quad T_t = T_{xx} + \delta T \ln T$$

имеет вид [8]:

$$(1.2) \quad T(x, t) = e^{-\frac{\delta x^2}{4(1+\varepsilon e^{-\delta t})}} e^{\delta t \ln \left\{ T_0 \left(\frac{1+\varepsilon e^{-\delta t}}{1+\varepsilon} \right)^{1/2\varepsilon} \right\}}$$

и является решением задачи Коши для двухпараметрического семей-

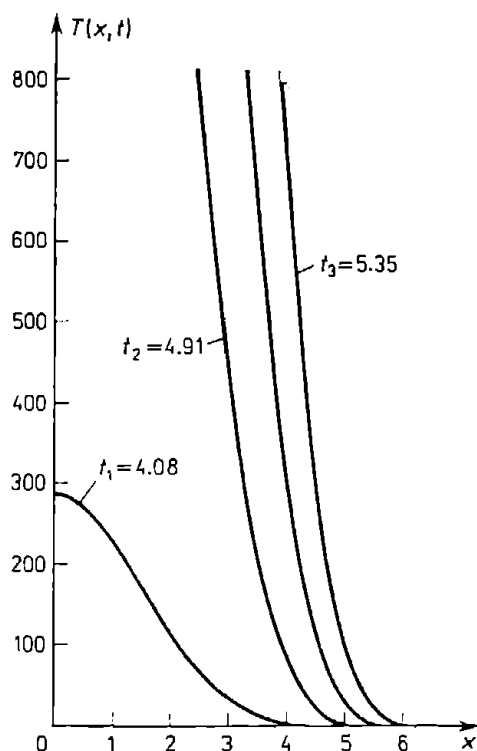


Рис. 1

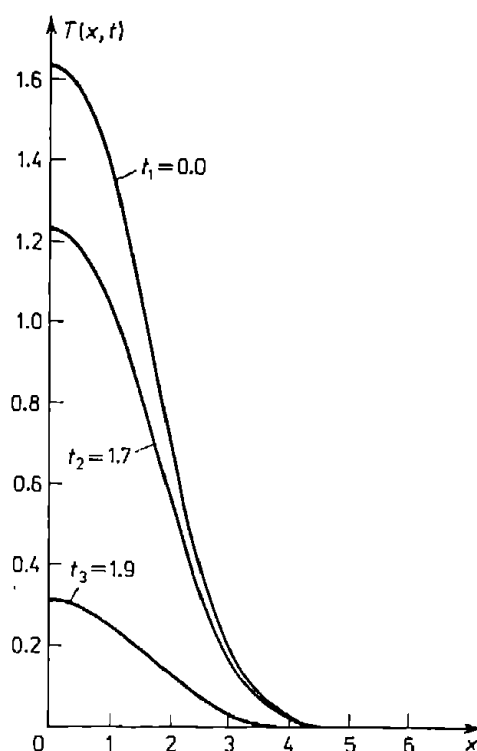


Рис. 2

ства начальных данных

$$(1.3) \quad T(x, 0) = T_0 e^{-\frac{\delta x^2}{4(1+\varepsilon)}}$$

где T_0, ε — параметры, причем $T_0 \geq 0$; $\varepsilon < -1$ при $\delta < 0$, $-1 < \varepsilon < +\infty$ при $\delta > 0$.

1. Решение (1.2) при $\varepsilon = 0$ переходит в

$$(1.4) \quad T(x, t) = \sqrt{e} e^{-\delta x^2/4} e^{e^{\delta t} \left(\ln T_0 - \frac{1}{2} \right)}, \quad T_0 > 0, \delta > 0.$$

Полуширина температурного распределения (1.4) не зависит от времени и равна $2\sqrt{\ln 2/\delta}$.

При $T_0 < \sqrt{e}$ в каждой фиксированной точке x температура $T(x, t)$ монотонно убывает до нуля ($\lim_{t \rightarrow +\infty} T(x, t) = 0$), при $T_0 = \sqrt{e}$ решение

(1.4) стационарно, при $T_0 > \sqrt{e}$ температура монотонно и неограниченно возрастает в каждой фиксированной точке x при $t \rightarrow +\infty$.

На рис. 1, 2 приведена численная реализация решения с постоянной полушириной.

2. Рассмотрим решение (1.2) при $\varepsilon > 0, \delta > 0$. В этом случае полуширина начального распределения (1.3) больше полуширины решения (1.4). Полуширина решения (1.2) является монотонно убывающей функцией и при $t \rightarrow +\infty$ стремится к полуширине распределения (1.4) (см. (1.4)). Относительно амплитуды решения имеются три возможности.

Если $T_0 < T_2(\varepsilon) = e^{1/(2+2\varepsilon)}$, то амплитуда монотонно убывает и $\lim_{t \rightarrow +\infty} T_{\max}(t) = 0$.

Если $T_0 > T_1(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{1/2\varepsilon}$, то амплитуда монотонно и неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$.

Если $T_2(\varepsilon) < T_0 < T_1(\varepsilon)$, то амплитуда является немонотонной функцией времени: возрастая вначале (но не достигая величины \sqrt{e} — амплитуды стационарного решения), убывает к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Решение (1.2) при $\varepsilon > 0, \delta > 0$ является решением с монотонно убывающей полушириной.

На рис. 3, 4, 5 представлена численная реализация решения с монотонно убывающей полушириной.

3. Решения с монотонно растущей полушириной определяются формулой (1.2) либо при $\delta > 0, -1 < \varepsilon < 0$, либо при $\delta < 0, \varepsilon < -1$.

В первом случае полуширина решения (1.2) является монотонно растущей функцией. В начальный момент времени $t = 0$ она меньше полуширины (1.4), а при $t \rightarrow +\infty$ стремится к значению $2\sqrt{\ln 2/\delta}$.

Если $T_0 < T_1(\varepsilon)$, то амплитуда монотонно убывает до нуля.

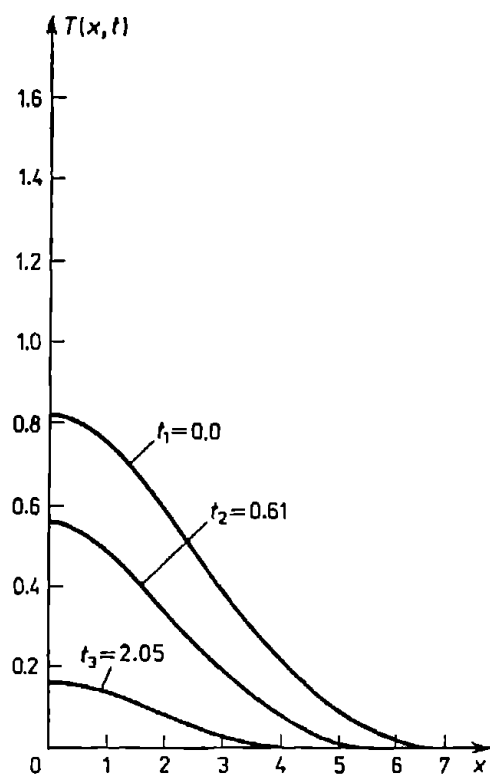


Рис. 3

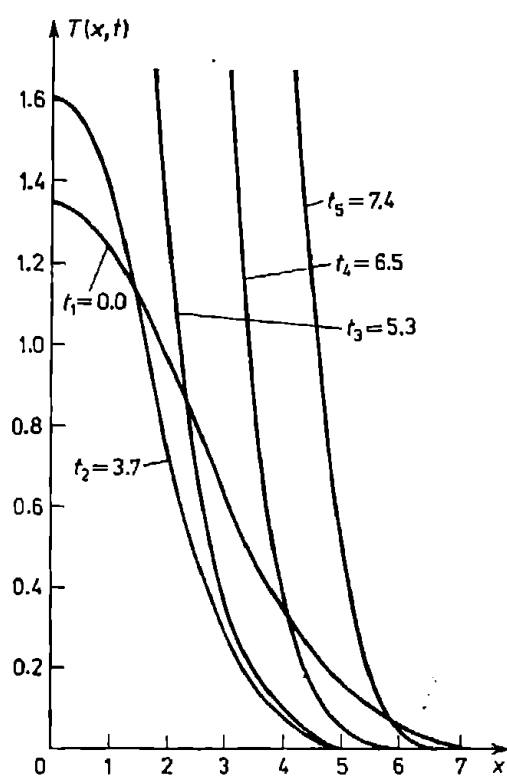


Рис. 4

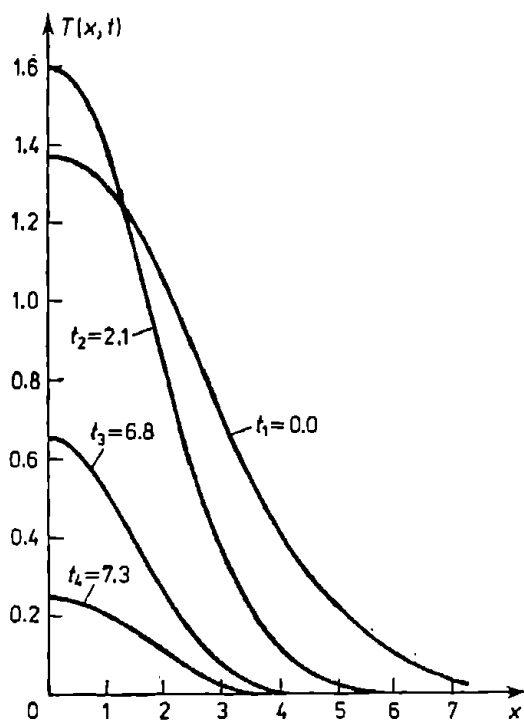


Рис. 5

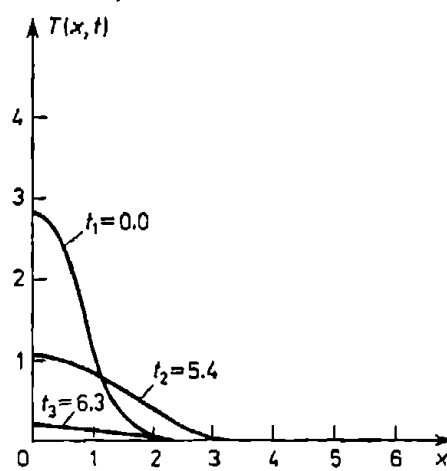


Рис. 6

Если $T_0 > T_2(\varepsilon)$, то амплитуда монотонно и неограниченно растет при $t \rightarrow +\infty$.

Если $T_1(\varepsilon) < T_0 < T_2(\varepsilon)$, то амплитуда является немонотонной функцией; убывая вначале, она достигает некоторого минимального значения в конечный момент времени, затем неограниченно растет монотонным образом при $t \rightarrow +\infty$.

Численная реализация решения с $\delta > 0$, $-1 < \varepsilon < 0$ представлена на рис. 6, 7, 8.

Во втором случае ($\delta < 0$, $\varepsilon < -1$) полуширина решения (1.2) монотонно и неограниченно растет при $t \rightarrow +\infty$.

Если $T_0 < T_2(\varepsilon)$, то амплитуда монотонно возрастает до значения $T(0, \infty) = 1$.

Если $T_0 > T_2(\varepsilon)$, то амплитуда вначале монотонно убывает, а затем монотонно вырастая стремится к значению $T(0, \infty) = 1$ при $t \rightarrow +\infty$.

Такое решение (см. рис. 9, 10) аналогично решению бегущей волны, рассмотренной в работе [9].

Поведение температурного распределения (1.2) по пространству и во времени определяется парой параметров (ε, T_0) . На рис. 11 изображена плоскость параметров начальных данных (ε, T_0) , которая разделяется кривыми $T_1(\varepsilon)$ и $T_2(\varepsilon)$ на зоны, соответствующие описанным выше режимам.

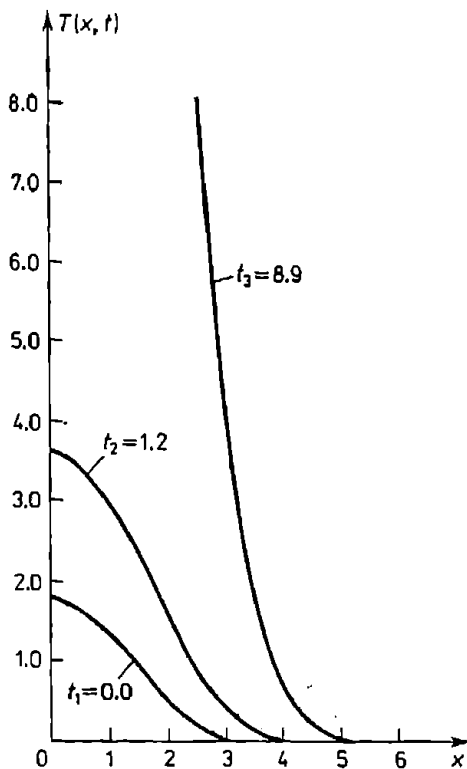


Рис. 7

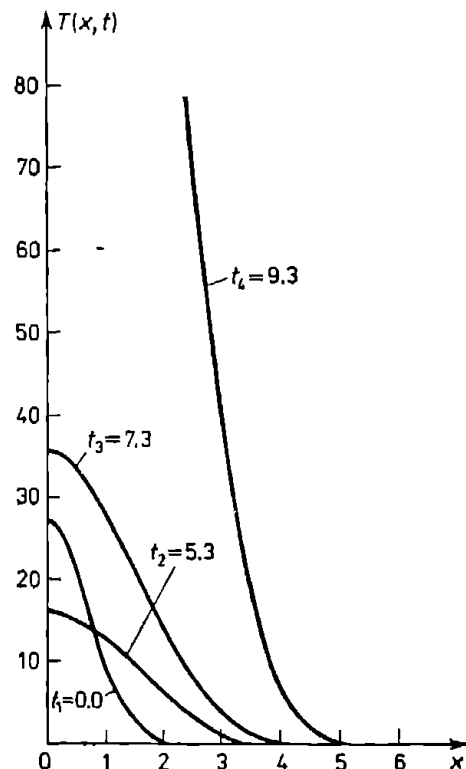


Рис. 8

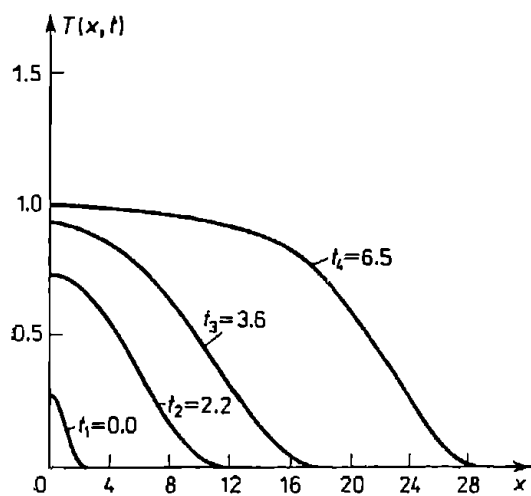


Рис. 9

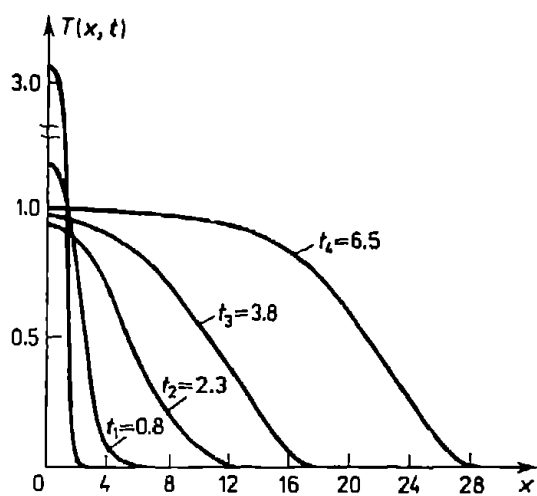


Рис. 10

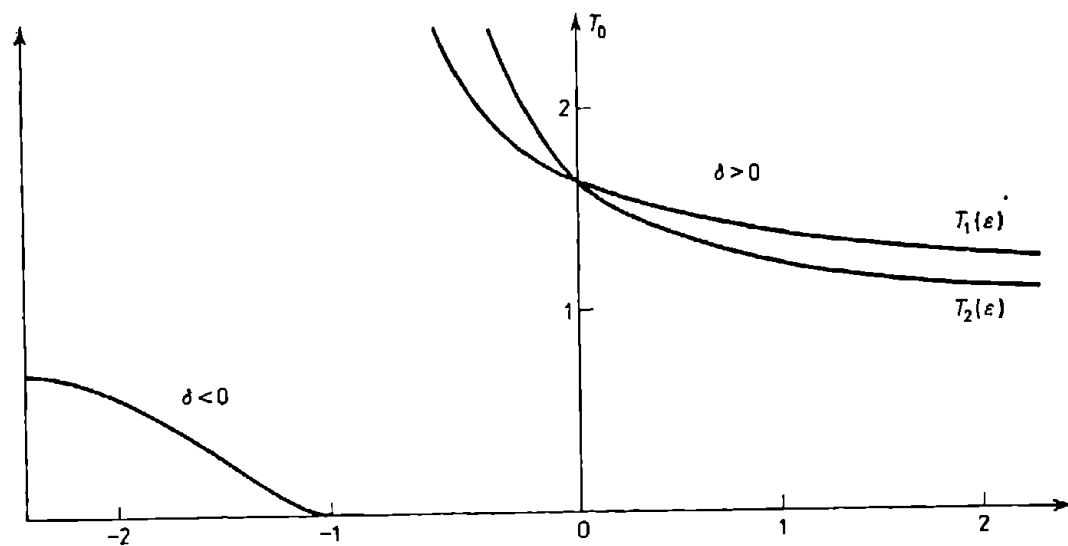


Рис. 11

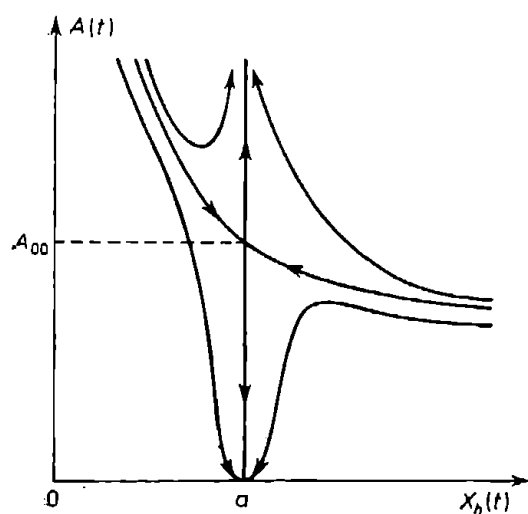


Рис. 12

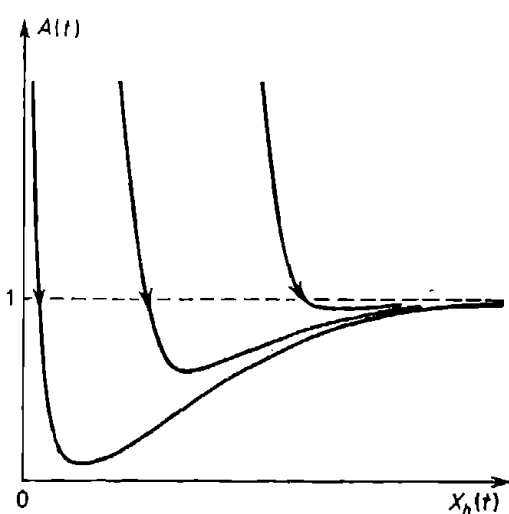


Рис. 13

4. Чтобы наглядно представить поведение решения (1.2) во времени, перейдем к переменным амплитуды и полуширины температурного возмущения:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} A(t) &= T(0, t) = e^{e^{\delta t} \ln \left[T_0 \left(\frac{1 + \varepsilon e^{-\delta t}}{1 + \varepsilon} \right)^{1/2\varepsilon} \right]}, \\ X_h(t) &= 2 \sqrt{\frac{\ln 2}{|\delta|}} \cdot \sqrt{\text{sign}(\delta)(1 + \varepsilon e^{-\delta t})}. \end{aligned}$$

Связь амплитуды и полуширины дается уравнением

$$(1.6) \quad \frac{dA}{dX_h} = \frac{A a^2 \text{sign}(\delta) (1 - 2 \text{sign}(\delta) X_h^2 a^{-2} \ln A)}{X_h (X_h^2 - a^2 \text{sign}(\delta))},$$

где $a = 2\sqrt{\ln 2/|\delta|}$ — полуширина стационарного решения (1.3). Интеграл уравнения (1.6) имеет вид

$$(1.7) \quad A^{(X_h^2 - a^2 \text{sign}(\delta))} X_h^{-a^2 \text{sign}(\delta)} = A^{(X_{h_0}^2 - a^2 \text{sign}(\delta))} X_{h_0}^{-a^2 \text{sign}(\delta)},$$

где $X_{h_0} = X_h(0)$, $A_0 = A(0) = T_0(0)$.

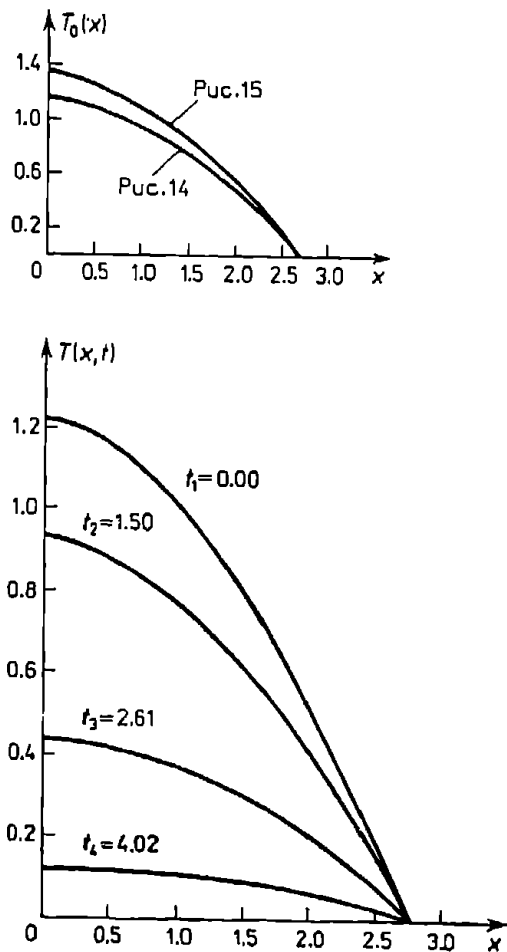


Рис. 14

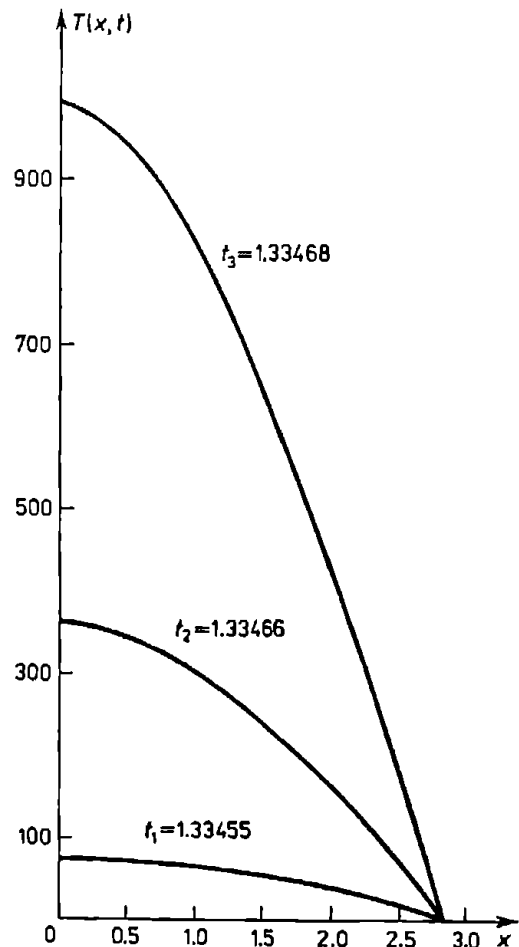


Рис. 15

В плоскости (X_h, A) уравнение (1.6) имеет нулевую изоклину:

$$A = e^{\frac{2 \ln 2 \operatorname{sign}(\delta)}{|\delta| X_h^2}}$$

и бесконечную изоклину ($dX_h/dA = 0$):

$$X_h^2 = 4 \ln 2 \frac{\operatorname{sign}(\delta)}{|\delta|},$$

существующую лишь при $\delta > 0$.

Особой точкой уравнения (1.6) при конечных $A \neq 0$ и $X_h > 0$ при $\delta > 0$ является точка с координатами

$$X_h = a, \quad A = A_{00} = \sqrt{e}.$$

Особая точка является седлом с сепаратрисами (см. рис. 12):

$$X_h = a \quad \text{и} \quad A = \left(\frac{X_h}{a} \right)^{\left(\left(\frac{X_h}{a} \right)^2 - 1 \right)^{-1}}.$$

В случае $\delta < 0$ точка $(0, 0)$ является седловой, с сепаратрисами $X_h \equiv 0$ и $A \equiv 0$ (см. рис. 13).

Ход интегральных кривых уравнения (1.6) представлен на рис. 14, 15.

Заметим, что все перечисленные в этом параграфе результаты легко переносятся на случай, когда объемный источник тепла имеет линейную „добавку” $Q = \alpha T \ln T + \beta T$, с помощью преобразования $T \rightarrow \gamma T$, $\gamma = \text{const.}$

2. Уравнения нелинейной теплопроводности со знакопеременным источником

Рассмотрим уравнение теплопроводности в случае, когда источник и коэффициент теплопроводности имеет степенную зависимость от температуры:

$$(2.1) \quad T_t = (T^\sigma T_x)_x + \alpha T^{\sigma+1} + \delta T, \quad \sigma > 0.$$

Одно из инвариантных решений (см. [8]) в этом случае имеет вид:

$$(2.2) \quad T(x, t) = \tilde{T}(x) \frac{1}{(\lambda + (1 - \lambda) e^{-\sigma \delta t})^{1/\sigma}}.$$

Представление (2.2) дает решение задачи Коши при выполнении следующих условий: $\alpha > 0$, $\lambda \delta < 0$. (Выполнение этих условий обеспечивает обращение теплового потока $-K(T)T_x$ в нуль при обращении в нуль температуры).

Функция $\tilde{T}(x)$ является решением уравнения

$$(\tilde{T}^\sigma \tilde{T}_x)_x + \alpha \tilde{T}^{\sigma+1} + \lambda \delta \tilde{T} = 0$$

и имеет вид:

$$(2.3) \quad \tilde{T}(x) = \begin{cases} \left(-2\lambda\delta(\sigma+1) \frac{1}{\alpha(\sigma+2)} \right)^{1/\sigma} \cos^{2/\sigma} \left(\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma+1}} x \right), & \text{при } |x| \leq L_s, \\ 0 & \text{при } |x| > L_s, \end{cases}$$

где $L_s = 2\pi/\sigma \sqrt{(\sigma+1)\alpha^{-1}}$ — так называемая фундаментальная длина. Заметим, что L_s определяется лишь параметрами среды σ и α и не зависит от δ , то есть наличие линейного источника (стока) не влияет на пространственную структуру инвариантного решения.

При $\delta > 0$ для любого $T_0 = (-2\lambda\delta(\sigma+1)\alpha^{-1}(\sigma+2)^{-1})^{1/\sigma} > 0$. Временная характеристика решения (2.2) $g(t) = (\lambda + (1-\lambda)e^{-\sigma\delta t})^{-1/\sigma} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \tau = -\ln[\lambda(\lambda-1)^{-1}]/\sigma\delta$.

При $\delta < 0$ существует такое критическое значение амплитуды начального распределения

$$T_* = (2 \cdot |\delta| \cdot (\sigma+1)/\alpha(\sigma+2))^{1/\sigma} \text{ — (амплитуда стационарного решения),}$$

что

- (а) если $T_0 > T_*$, то $g(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \tau$,
- (б) если $T_0 < T_*$, то $g(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$,
- (в) если $T_0 = T_*$, то $g(t) \equiv 1$, где

$$\tau = \frac{\ln [T_0^\sigma (T_0^\sigma - T_*^\sigma)^{-1}]}{\sigma |\delta|}.$$

Рассмотренные решения передают качественные особенности задачи Коши для уравнения теплопроводности со знакопеременным источником нелинейного типа, такие как явление локализации и наличие сверхбыстрых режимов роста тепловых возмущений. Кроме того, благодаря разнообразию режимов, эти решения оказываются удобным тестом для проверки качества численных методов решения параболических уравнений.

Литература

- [1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, „Наука“, Москва 1978.
- [2] Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, *N- и S-режимы автомодельного сжигания конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением*, ПМТФ, 1 (1977), 3–23.

- [3] А. А. Самарский, Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла*, ДАН СССР, 227.2 (1976), 321–324.
- [4] А. А. Самарский, Г. Г. Еленин, Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Горение нелинейной среды в виде сложных структур*, *ibid.* 237.6 (1977), 1330–1333.
- [5] С. П. Курдюмов, *Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы ее организации*, Препринт ИПМ АН СССР № 29, 1979.
- [6] Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, *Диссипативные структуры режимов с обострением в нелинейной теплопроводной среде*, настоящий сборник, стр. 125–139.
- [7] В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский, *Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами*, ДАН СССР, 247 (1979), 349–353.
- [8] В. А. Дородницын, *Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком*, Препринт ИПМ АН СССР № 57, 1979.
- [9] А. И. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов, *Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме*, Вюлл. МГУ, секция А, 1.6 (1937), стр. 1.

*Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20 – May 30, 1980*
