

УСТОЙЧИВЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. АБРАМОВ, Н. Б. КОНЮХОВА

Вычислительный Центр АН СССР, ул. Вавилова 40, Москва, СССР

К. БАЛЛА

Будапешт, ВНР

Дается краткий обзор результатов по переносу граничных условий из особых точек типа полюса для систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Условие ограниченности решения в особой точке заменяется эквивалентным соотношением в ее окрестности — уравнением устойчивого начального многообразия, порожденного в окрестности особой точки всей совокупностью ограниченных решений системы. Обсуждаются вопросы практической реализации метода при решении сингулярных краевых задач.

1. Введение

В различных разделах прикладной математики возникают системы обыкновенных дифференциальных уравнений (о.д.у.) с особенностями или на бесконечном интервале. При этом часто в качестве граничного условия в этой особой точке или на бесконечности ставится условие ограниченности решения.

Простейшие приемы численного решения таких задач состоят в том, что исследуется асимптотическое поведение решений в окрестности особой точки, выделяются какими-либо разложениями те решения, которые являются ограниченными, тем самым получается разложение (содержащее некоторые произвольные постоянные) всех ограниченных решений. Эти произвольные постоянные используются для того, чтобы „склеить” это аналитически заданное решение в некоторой точке с решением, получаемым численным интегрированием.

Такие методы вполне оправдывают себя в несложных задачах, но оказываются совершенно недостаточными для больших и сложных задач. Дело в том, что асимптотическое поведение отдельных решений и вид его разложения очень капризны, они могут зависеть, например, от таких факторов, как жорданова структура некоторых матриц, от того, является ли некоторое число, получаемое в результате вычислений, целым, и т.п. Ясно, что при решении на ЭВМ выяснение подобных обстоятельств — дело очень хлопотливое и для громоздких задач иногда безнадежное. Кроме того, отдельные ограниченные решения иногда оказываются вблизи особой точки почти линейно зависимыми, что в свою очередь усложняет их использование.

Оказывается, однако, что для широкого класса уравнений имеет место следующая картина. Если не интересоваться поведением отдельных решений, а рассматривать все семейство ограниченных в особой точке решений, то это семейство может быть задано некоторыми разложениями по целым степеням независимого переменного, коэффициенты этих разложений ищутся из хорошо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, вид разложения не зависит от таких факторов, как жорданова структура используемых матриц. А прихотливое поведение отдельных решений проявляется лишь внутри семейства ограниченных решений и не интересует нас. Полученное представление всего семейства ограниченных решений имеет вид граничного условия в некоторой точке, достаточно близкой к особой. Тем самым для численного решения поставленной задачи, если она рассматривалась, например, на полуоси с особой точкой на начале полупрямой, дело сведется к решению некоторой краевой задачи без особенностей на ограниченном интервале; на концах этого интервала ставятся граничные условия, полученные перенесением условия ограниченности.

По своим вычислительным свойствам предлагаемый прием так относится к методу отыскания асимптотики отдельных решений, как метод прогонки к методу отыскания решения в виде линейной комбинации решений, образующих фундаментальную систему.

Поясним этот прием подробнее.

1.1. Рассмотрим сначала линейную систему

$$(1.1) \quad tx' = A(t)x + g(t), \quad 0 < t \leq a.$$

Здесь $n \times n$ -матрица $A(t)$ и n -столбец $g(t)$ определены на отрезке $[0, a]$ и достаточно гладкие на нем. Точка 0 является особой точкой системы.

Поставим в дополнение к уравнению (1.1) условие

$$(1.2) \quad x(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow 0.$$

Множество всех решений (1.1) является, очевидно, n -мерным линейным многообразием. Множество всех решений (1.1), удовлетворяющих (1.2), является, очевидно, также линейным многообразием какой-то размерности k , подмногообразием многообразия всех решений. Зафиксируем теперь какое-либо t , $0 < t \leq a$. Тогда значения $x(t)$ множества всех решений (1.1) заполняют все пространство $R^{(n)}$ n -столбцов. Из сказанного выше следует, что значения $x(t)$ множества решений (1.1), удовлетворяющих (1.2), заполняют некоторое k -мерное линейное многообразие $M^{(k)}(t)$ в $R^{(n)}$. Тем самым условие (1.2) эквивалентно условию (1.3)

$$x(t) \in M^{(k)}(t).$$

Возьмем множество k -мерных линейных многообразий в $R^{(n)}$. Введя в это множество обычным образом структуру дифференцируемости, получим дифференцируемое многообразие. Оказывается, функция $M^{(k)}(t)$ имеет предел при $t \rightarrow 0$. Доопределим этим предельным значением $M^{(k)}(t)$ на весь отрезок $[0, a]$. Тогда, оказывается, функция $M^{(k)}(t)$ является гладкой на отрезке $[0, a]$ (в отличие от отдельных решений (1.1), удовлетворяющих (1.2), гладкость которых может нарушаться в точке 0).

Это обстоятельство очень интересно само по себе и важно для практического использования (1.2). В вычислениях оно реализуется следующим образом. Выберем какой-либо вариант метода прогонки. Пусть в этом варианте условие (1.3) записывается, например, в виде

$$(1.3') \quad \varphi(t)x(t) = \gamma(t),$$

где $(n-k) \times n$ -матрица $\varphi(t)$ имеет ранг $n-k$, $\gamma(t)$ есть $(n-k)$ -столбец. От метода прогонки требуется лишь, чтобы для гладкой функции $M^{(k)}(t)$ матричные функции $\varphi(t)$ и $\gamma(t)$ также были бы гладкими. Для пары (φ, γ) возникают прогоночные уравнения — система о.д.у. Из сказанного выше следует, что нужные нам $\varphi(t)$ и $\gamma(t)$ являются гладкими на отрезке $[0, a]$ и для малых положительных t представляются разложениями

$$(1.4) \quad \varphi(t) = \varphi_0 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots, \quad \gamma(t) = \gamma_0 + t\gamma_1 + t^2\gamma_2 + \dots$$

(мы не уточняем сейчас, идет ли речь о сходящихся или об асимптотических рядах или о представлении конечными суммами с учетом членов определенного порядка малости).

Число k , $(n-k) \times n$ -матрица φ_0 и $(n-k)$ -столбец γ_0 определяются по матрицам $A(0)$ и $g(0)$ с помощью задачи типа задачи на собственные значения (с.з.). Остальные коэффициенты представления (1.4) получаются формальной подстановкой (1.4) в прогоночные уравнения. При этом возникает рекуррентная последовательность линейных алгебраических уравнений: относительно φ_1 , относительно φ_2, \dots ; эти

линейные уравнения оказываются невырожденными; $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ определяются сходным образом. Таким образом для переноса условия (1.2) в точку t выбранные прогоночные уравнения используются только как средство для аналитических выкладок и не требуют численного решения.

Окончательный алгоритм выглядит следующим образом. Выбираем точку t_0 достаточно близко к 0. Ограничиваемся в (1.4) каким-либо числом членов. Решая указанные выше вспомогательные алгебраические задачи, вычисляем нужные $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \gamma_0, \gamma_1, \dots$. Заменяем условие (1.2) условием

$$(1.5) \quad \tilde{\varphi}(t_0)x(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0),$$

где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\gamma}$ получены по формулам (1.4) использованием упомянутого конечного числа членов разложения.

1.2. Более сложным для исследования является тот случай, когда вместо уравнения (1.1) рассматривается уравнение

$$(1.6) \quad t^p x' = A(t)x + g(t), \quad 0 < t \leq a,$$

где целое число p больше единицы. В этом случае ту общую „хорошую” картину удалось получить только при дополнительном предположении о некратности с.в. матрицы $A(0)$, лежащих на мнимой оси.

1.3. Значительно более сложным для исследования является случай нелинейных систем о.д.у.

Рассмотрим систему уравнений

$$(1.7) \quad t^p x' = A(t)x + f(t, x), \quad 0 < t \leq t_0,$$

где p — целое положительное число; $A(t)$ и $f(t, x)$ — достаточно гладкие в некоторой окрестности точки $t = 0, x = 0$; $f(t, x) = o(|x|)$ при $x \rightarrow 0$. Уравнение (1.7) рассматривается для малых $|x|$ и малых положительных t . Дополнительно предполагаем, что $f(t, x)$ аналитична по x при фиксированных $t, 0 \leq t \leq t_0$, и что $A(0)$ не имеет с.в. на мнимой оси.

Будем искать те решения (1.7), которые удовлетворяют условию

$$(1.8) \quad \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0.$$

Зафиксируем какое-либо $t, 0 < t \leq t_0$. Множество значений $x(t)$ решений (1.7), удовлетворяющих (1.8), заполняет в пространстве $R^{(n)}$, как известно, некоторое многообразие $M(t)$, которое называется устойчивым начальным многообразием. Это многообразие является аналитическим по x . Его размерность (обозначим ее k) одинакова для всех t . Таким образом условие (1.8) для решений (1.7) эквива-

лентно условию

$$(1.9) \quad x(t) \in M(t).$$

Аналогично тому, как это было сделано для линейного случая, речь идет об изучении поведения $M(t)$ в зависимости от t .

Оказывается, можно задать $M(t)$ соотношением вида

$$(1.10) \quad \varphi(t, x) = 0,$$

где $(n-k)$ -столбец $\varphi(t, x)$ является функцией гладкой по t и аналитической по x при $t \geq 0$ (как и в линейном случае, многообразие всех решений (1.7), удовлетворяющих (1.8), „гладко” меняется по t при $t \geq 0$, в отличие от отдельных решений (1.7)).

Аналогично линейному случаю представим $\varphi(t, x)$ в виде

$$(1.11) \quad \varphi(t, x) = \varphi_0(x) + t\varphi_1(x) + t^2\varphi_2(x) + \dots$$

Число k и функция $\varphi_0(x)$ определяются тем требованием, что уравнение

$$(1.12) \quad \varphi_0(x) = 0$$

есть уравнение так называемого устойчивого многообразия Ляпунова для системы

$$(1.13) \quad t^p x' = A(0)x + f(0, x),$$

то есть множества тех точек x , для которых траектории, соответствующие решениям (1.13), проходящие через эти точки, стремятся к 0 при $t \rightarrow 0$ (это естественно: свободный член разложения $\varphi(t, x)$ по степеням t получается, если изучить уравнение, получающееся из (1.7) подстановкой в правую часть $t = 0$). При некоторой дополнительной конкретизации выбора $\varphi(t, x)$ при переносе условия (1.10) вдоль оси t (аналог прогонки, использованной для линейного случая) для $\varphi(t, x)$ возникает система уравнений с частными производными (аналог прогоночных уравнений). Эта система используется для приближенного вычисления $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Именно, каждая из этих функций раскладывается по степеням элементов столбца x ; получившиеся разложения с учетом (1.11) формально подставляются в указанную систему; возникает рекуррентная последовательность невырожденных линейных уравнений относительно коэффициентов разложений. Предварительно определяются известным путем коэффициенты разложения $\varphi_0(x)$, при этом возникает необходимость решить задачу типа задачи на с.з. и линейные уравнения. В итоге мы получаем коэффициенты разложения $\varphi(t, x)$ по степеням t и x ; это вполне удобно, так как мы будем использовать $\varphi(t, x)$ для малых t и в силу (1.8) для малых x . Подчеркнем, что сама система уравнений с частными производными

используется только как промежуточный этап для аналитических выкладок и не требует численного решения.

Окончательный алгоритм имеет примерно тот же смысл, что и в линейном случае (см. п. 1.1) с той разницей, что вместо (1.5) получим нелинейные соотношения вида

$$(1.14) \quad \tilde{\varphi}(t_0, x(t_0)) = 0.$$

Разумеется, нелинейный случай отличается от линейного не только сложностью теоретического исследования, но и большей громоздкостью реализации. Переход от нелинейного случая к линейному влечет существенные упрощения всех выкладок: ввиду того, что $\varphi(t, x)$ линейна по x , упомянутая система уравнений с частными производными приводится к системе о.д.у.; отпадает необходимость учитывать старшие степени элементов x и т.д.

1.4. Выше говорилось, что при определении φ_0 для разложения (1.4) и $\varphi_0(x)$ для разложения (1.11) возникает задача типа задачи на с.з. В том наиболее типичном случае, когда матрица $A(0)$ не имеет с.з. на мнимой оси, эта задача состоит в отыскании какого-либо базиса подпространства, порожденного собственными и присоединенными векторами матрицы $A(0)$, соответствующими с.з., лежащим в правой (левой) полуплоскости. С точки зрения вычислительной математики эта задача значительно удобнее для исследования и практического решения, чем задача отыскания самих собственных и присоединенных векторов. Здесь мы пользуемся тем же обстоятельством, что и в п.п. 1.1–1.3: нужное нам многообразие как целое численно определяется удобнее и проще, чем отдельные элементы, его порождающие.

1.5. Если для уравнения (1.1) кроме условия (1.2) задано еще какое-то граничное условие в точке a , то приближенно заменяя условие (1.2) условием (1.5), мы получим на отрезке $[t_0, a]$ задачу без особенностей: уравнение (1.1), условие (1.5), условие в точке a . Тот же прием, разумеется, применим, если точка a также является особой. Для нелинейного уравнения (1.7) соответствующие граничные условия (1.14) получаются также нелинейными. Если исходное уравнение, например (1.1), рассматривается на бесконечном интервале $a \leq t < \infty$ и на бесконечности поставлено условие ограниченности решения, то можно применять те же приемы, что и выше, превратив бесконечный интервал в конечный подходящей заменой независимого переменного. Так, если $A(t)$ и $g(t)$ для $t \rightarrow +\infty$ представляются разложениями по обратным степеням t , то удобно сделать замену $t_{\text{повоо}} = 1/t_{\text{отаров}}$.

1.6. Выше отмечалось, что некоторые результаты получены лишь при дополнительных ограничениях, представляющихся нежелательными. Исследование того, что произойдет, если снять эти ограничения

(в частности, выяснение вопроса, являются ли они существенными) представляет, по нашему мнению, интерес. Но наиболее важным и для теории рассматриваемого вопроса и для практических применений было бы исследование того случая, когда x является элементом не конечномерного, а некоторого бесконечномерного пространства. Полученные результаты дали бы возможность для уравнений с частными производными определить наиболее удобную форму использования условия ограниченности решения при практическом вычислении этого решения.

1.7. В дальнейшем изложении работы мы особое внимание обращаем на алгоритмическую сторону предлагаемых методов. В частности, теоремы формулируются и формулы выписываются только для вполне конкретных способов выбора $\varphi(t)$ (см. (1.3)) и $\varphi(t, x)$ (см. (1.10)). Отдельно приводятся результаты для важного частного случая: для систем уравнений второго порядка; часть этих результатов не вытекает из общего случая. В соответствии с общепринятой традицией мы помещаем регулярную особую точку (уравнение (1.1) и уравнение (1.7) при $p = 1$) в 0, а иррегулярную особую точку (уравнение (1.6) и уравнение (1.7) при $p > 1$) в ∞ . Мы не обсуждаем в работе многочисленные применения излагаемых методов к решению конкретных прикладных задач. Подробное изложение этих методов вместе с их обоснованием и исследованием см. в [1]–[19], о применении их в прикладных задачах см. [20]–[41].

Классическая теория поведения отдельных решений о.д.у. в окрестности особых точек изложена, например, в [42], [43].

2. Системы линейных уравнений

2.1. Регулярная особая точка. Рассмотрим систему n линейных о.д.у. вида

$$(2.1) \quad tx' = A(t)x + g(t), \quad 0 < t \leq a,$$

где $n \times n$ -матрица $A(t)$ и n -столбец $g(t)$ непрерывны на $[0, a]$ и при $t \rightarrow 0$ представимы асимптотическими (соответственно, сходящимися) рядами

$$(2.2) \quad A(t) = A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \dots,$$

$$(2.3) \quad g(t) = g_0 + tg_1 + t^2g_2 + \dots$$

Сначала рассмотрим случай, когда матрица A_0 не имеет с.з. на мнимой оси. Пусть она имеет k с.з. в левой полуплоскости и $n - k$ в правой. Линейным преобразованием переменных в уравнении (2.1)

матрица A_0 может быть приведена к виду

$$(2.4) \quad A_0 = \left[\underbrace{\frac{A_0^-}{O}}_k \middle| \underbrace{\frac{O}{A_0^+}}_{n-k} \right]_{n-k}^k, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_0^+) > 0.$$

Здесь и далее через $\lambda(M)$ обозначаются с.в. матрицы M . (Один из практически удобных способов приведения A_0 к виду (2.4) мы изложим в п. 2.3). Будем предполагать, что в (2.1) матрица A_0 уже имеет вид (2.4).

Пусть требуется найти решения (2.1), удовлетворяющие предельному условию в особой точке

$$(2.5) \quad x(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow 0.$$

Ставится задача перенести граничное условие (2.5) из особой точки $t = 0$ в близкую точку $t = t_0$.

В соответствии с представлением (2.4) введем обозначения

$$(2.6) \quad x = \left[\frac{x^-}{x^+} \right]_{n-k}^k, \quad g(t) = \left[\frac{g^-}{g^+} \right]_{n-k}^k, \quad V(t) = A(t) - A_0 = \left[\underbrace{\frac{V_{11}}{V_{21}}}_k \middle| \underbrace{\frac{V_{12}}{V_{22}}}_{n-k} \right]_{n-k}^k.$$

ТЕОРЕМА 2.1 ([1], [6]–[8]). *Предельное условие (2.5) для решений системы (2.1) эквивалентно для достаточно малых t линейному соотношению*

$$(2.7) \quad x^-(t) = \alpha(t)x^+(t) + \beta(t), \quad t \leq t_1.$$

Здесь $k \times (n-k)$ -матрица $\alpha(t)$ является решением сингулярной задачи Коши

$$(2.8) \quad t\alpha' = A_0^- \alpha - \alpha A_0^+ + V_{11} \alpha - \alpha V_{22} - \alpha V_{21} \alpha + V_{12}, \quad 0 < t \leq t_1,$$

$$(2.9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0,$$

которое для малых t существует и единственно и представимо при $t \rightarrow 0$ асимптотическим (соответственно, сходящимся) рядом

$$(2.10) \quad \alpha(t) = t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \dots,$$

где α_j определяется из (2.8) формальной подстановкой разложений (2.10), (2.2). Такая подстановка приводит к невырожденным системам линейных алгебраических уравнений для определения α_j , а именно, к рекуррентным формулам вида

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \alpha_1 - A_0^- \alpha_1 + \alpha_1 A_0^+ &= V'_{12}(0), \\ j\alpha_j - A_0^- \alpha_j + \alpha_j A_0^+ &= \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где φ_j образованы по $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$ и коэффициентам разложения (2.2) с помощью только операций типа сложения и умножения.

Аналогичные утверждения имеют место для k -столбца $\beta(t)$, который является единственным решением задачи Коши

$$(2.12) \quad t\beta' = A_0^- \beta + (V_{11} - aV_{21})\beta + g^- - ag^+, \quad 0 < t \leq t_1,$$

$$(2.13) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = -(A_0^-)^{-1} g_0^-,$$

и разлагается при малых t в асимптотический (соответственно, сходящийся) ряд

$$(2.14) \quad \beta(t) = \beta_0 + t\beta_1 + t^2\beta_2 + \dots,$$

формально определяемый из (2.12), то есть по рекуррентным формулам вида

$$(2.15) \quad \begin{aligned} A_0^- \beta_0 &= -g_0^-, \\ j\beta_j - A_0^- \beta_j &= \psi_j(\beta_0, \dots, \beta_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где ψ_j образованы по $\beta_0, \dots, \beta_{j-1}$ и коэффициентам разложений (2.2), (2.3), (2.10) с помощью только операций типа сложения и умножения.

Замечания к теореме 2.1.

1. Соотношение (2.7) при фиксированном t задает в x -пространстве $(n-k)$ -мерное линейное многообразие, порожденное решениями (2.1), удовлетворяющими условию (2.5) (можно показать, что для всех решений (2.1), ограниченных при $t \rightarrow 0$, имеет место предельное условие $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = -A_0^{-1} g_0$). Решения задач (2.8), (2.9) и (2.12), (2.13) описывают поведение этого многообразия по t при малых t . Тем самым теорема 2.1 задает алгоритм переноса граничного условия (2.5) из особой точки $t = 0$ в близкую точку $t = t_0$: в качестве граничного условия в точке $t = t_0$, согласованного с предельным условием (2.5), выписывается соотношение (2.7), где $\alpha(t_0)$ и $\beta(t_0)$ вычисляются с помощью разложений (2.10), (2.14). При этом очевидна невырожденность систем линейных алгебраических уравнений (2.15) для определения β_0, β_1, \dots . Отметим специфический вид систем линейных алгебраических уравнений (2.11), из которых определяются $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (уравнения подобного вида появляются и далее). Они имеют вид $Z(\alpha) = \varphi$, где α — искомая прямоугольная матрица, φ — заданная прямоугольная матрица тех же размеров, Z — линейное преобразование, имеющее вид $Z(\alpha) = M\alpha - \alpha N$, где M и N — заданные квадратные матрицы. Известно, что $\lambda(Z) = \lambda(M) - \lambda(N)$, откуда следует невырожденность уравнений (2.11). Ограничиваясь конечным числом членов в разложениях (2.10), (2.14), получим приближенные значения $\tilde{\alpha}(t_0)$, $\tilde{\beta}(t_0)$. При этом ошибка, допущенная в граничном условии (2.7) при $t = t_0$, в даль-

нейшем уменьшается, так как ограниченные решения уравнений (2.8), (2.12) при малых t слева направо устойчивы. В этом легко убедиться, если подставить в правые части уравнений (2.8) и (2.12) значение $t = 0$: мы получим уравнения

$$t\alpha' = A_0^- \alpha - \alpha A_0^+,$$

$$t\beta' = A_0^- \beta + g_0^-,$$

решения которых устойчивы слева направо, так как $\operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < 0$, $\operatorname{Re} \lambda(A_0^+) > 0$.

2. Заменой переменных $t^\nu y(t) = x(t)$ результаты, очевидно, переносятся на случай системы (2.1) с граничным условием: $t^{-\nu} x(t)$ ограничено при $t \rightarrow 0$. Здесь ν — вещественное число, матрица A_0 не имеет с.з. на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \nu$, а $g(t)$ при $t \rightarrow 0$ представима рядом

$$t^{-\nu} g(t) = g_0 + tg_1 + t^2 g_2 + \dots$$

3. Теорема 2.1 остается справедливой и в том случае, когда матрица A_0 в разложении (2.2) имеет простые с.з. на мнимой оси (такие с.з. надо формально отнести к A_0^+), если дополнительно потребовать разрешимость уравнения $A_0^+ q = g_0^+$.

Аналогичные (несколько более тонкие) результаты получаются, если допустить существование у матрицы A_0 жордановых клеток, соответствующих с.з., лежащим на мнимой оси ([1], [3], [4]). Не останавливаясь на этом случае подробнее, отметим, что окончательные результаты для (2.1) получены без каких-либо ограничений на матрицу A_0 .

Интересным является также вопрос о постановке допустимых граничных условий в особой точке. Мы не будем останавливаться на результатах [2], [3], связанных с решением этой задачи.

2.2. Иррегулярная особая точка. Рассмотрим систему n линейных о.д.у. вида

$$(2.16) \quad t^{-r} x' = A(t)x + g(t), \quad a \leq t < \infty,$$

где $0 \leq r$ — целое число, $n \times n$ -матрица $A(t)$ и n -столбец $g(t)$ непрерывны на $[a, \infty)$ и при $t \rightarrow \infty$ имеют заданные асимптотические представления

$$(2.17) \quad A(t) \sim A_0 + \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \dots,$$

$$(2.18) \quad g(t) \sim g_0 + \frac{g_1}{t} + \frac{g_2}{t^2} + \dots$$

Предположим, что матрица A_0 не имеет с.з. на мнимой оси и приведена к виду

$$(2.19) \quad A_0 = \left[\underbrace{\frac{A_0^-}{O}}_k \middle| \underbrace{\frac{O}{A_0^+}}_{n-k} \right]_{n-k}^k, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_0^+) > 0.$$

Пусть кроме уравнения задано условие ограниченности решения на бесконечности:

$$(2.20) \quad x(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow \infty.$$

Требуется перенести граничное условие (2.20) из бесконечности в конечную точку.

Аналогично (2.6) и в соответствии с представлением (2.19) для матрицы A_0 введем разбиения на блоки для x , $g(t)$, $V(t) = A(t) - A_0$:

$$x = \left[\frac{x^-}{x^+} \right]_{n-k}^k, \quad g(t) = \left[\frac{g^-}{g^+} \right]_{n-k}^k, \quad V(t) = \left[\frac{V_{11}}{V_{21}} \middle| \frac{V_{12}}{V_{22}} \right]_{n-k}^k.$$

ТЕОРЕМА 2.2 ([11], [16]). Условие (2.20) для решений системы (2.16) эквивалентно для достаточно больших t условию

$$(2.21) \quad x^+(t) = \alpha(t)x^-(t) + \beta(t), \quad t \geq T.$$

Здесь $(n-k) \times k$ -матрица $\alpha(t)$ является решением задачи Коши на бесконечности

$$(2.22) \quad t^{-r} \alpha' = A_0^+ \alpha - \alpha A_0^- + V_{22} \alpha - \alpha V_{11} - \alpha V_{12} \alpha + V_{21}, \quad T \leq t < \infty,$$

$$(2.23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0,$$

которое существует для достаточно больших t , единственно и при $t \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое представление вида

$$(2.24) \quad \alpha(t) \sim \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots,$$

где a_j определяются из (2.22) формальной подстановкой разложений (2.17), (2.24). Такая подстановка приводит к невырожденным системам линейных алгебраических уравнений для определения a_j , а именно, к рекуррентным формулам вида

$$A_0^+ a_1 - a_1 A_0^- = -V_{21}^{(1)}, \quad V_{21}^{(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} t V_{21}(t),$$

$$A_0^+ a_j - a_j A_0^- = \varphi_j(a_1, \dots, a_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots,$$

где φ_j образованы по $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$ и коэффициентам разложений (2.17) с помощью только операций типа сложения и умножения.

Аналогичное утверждение имеет место для $(n-k)$ -столбца $\beta(t)$, который является единственным решением задачи Коши

$$(2.25) \quad t^{-r} \beta' = A_0^+ \beta + (V_{22} - \alpha V_{12}) \beta + g^+ - \alpha g^-, \quad T \leq t < \infty,$$

$$(2.26) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = -(A_0^+)^{-1} g_0^+,$$

и разлагается при больших t в асимптотический ряд

$$(2.27) \quad \beta(t) \sim \beta_0 + \frac{\beta_1}{t} + \frac{\beta_2}{t^2} + \dots,$$

формально определяемый из (2.25), то есть по рекуррентным формулам вида

$$A_0^+ \beta_0 = -g_0^+,$$

$$A_0^+ \beta_j = \psi_j(\beta_0, \dots, \beta_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где ψ_j образованы по $\beta_0, \dots, \beta_{j-1}$ и коэффициентам разложений (2.17), (2.18), (2.24) с помощью только операций типа сложения и умножения.

Замечания к теореме 2.2.

1. Соотношение (2.21) при каждом фиксированном $t \geq T$ задает в x -пространстве k -мерное линейное многообразие всех решений (2.16), удовлетворяющих условию (2.20) (в условиях теоремы 2.2 все ограниченные на бесконечности решения (2.16) выходят на одно и то же предельное значение: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A_0^{-1} g_0$), а решения задач Коши (2.22), (2.23) и (2.25), (2.26) определяют изменение этого многообразия по t , его „движение” в x -пространстве. При использовании соотношения (2.21) в качестве граничного условия в точке $t = t_\infty$ ошибка, допущенная в определении $\alpha(t_\infty)$, $\beta(t_\infty)$ учетом конечного числа членов разложений (2.24), (2.27), в дальнейшем уменьшается, так как ограниченные решения уравнений (2.22), (2.25) при больших t справа на лево устойчивы. Поэтому траектории уравнения (2.16), проходящие через многообразие (2.21), являются устойчивыми относительно малых изменений в граничном условии (2.21), заданном при $t = t_\infty$.

2. Если предположить сходимость разложений (2.17), (2.18) для достаточно больших t , то, в отличие от случая регулярной особой точки, нельзя утверждать сходимость разложений (2.24), (2.27). В этом легко убедиться на примере: все решения уравнения $x' = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/t & 1/2 \end{bmatrix} x$, ограниченные при $t \rightarrow \infty$, удовлетворяют соотношению $x_2 = \alpha(t)x_1$, где

$a(t)$ — стремящееся к 0 на бесконечности решение уравнения $a' = a + 1/t$. Это решение представимо рядом

$$a(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{t^m}, \quad a_m = (-1)^m (m-1)!;$$

ряд $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(m-1)!}{t^m}$ дает асимптотическое представление решения, но не является сходящимся.

3. С помощью замены переменных $y(t) = x(t) \exp(\nu t^{r+1}/(r+1))$, где ν — вещественное число, результаты, очевидно, переносятся на случай системы (2.16) с граничным условием: $x(t) \exp(\nu t^{r+1}/(r+1))$ ограничено при $t \rightarrow \infty$, если предположить, что матрица A_0 не имеет с.з. на прямой $\operatorname{Re} \lambda = -\nu$, а $g(t)$ при больших t представима в виде

$$g(t) \exp\left(\frac{\nu t^{r+1}}{r+1}\right) \sim g_0 + \frac{g_1}{t} + \frac{g_2}{t^2} + \dots$$

4. Если допустить существование у матрицы A_0 чисто мнимых с.з., то размерность многообразия решений (2.16), удовлетворяющих условию (2.20), уже не определяется одной матрицей A_0 . Оказывается, что если с.з. матрицы A_0 , лежащие на мнимой оси, простые, то для выделения линейного многообразия решений (2.16), ограниченных при $t \rightarrow \infty$, достаточно исследования не более, чем $r+1$ следующих за A_0 матриц в разложении (2.17) [12], [16]. Случай наличия у матрицы A_0 кратных с.з. на мнимой оси остается неизученным.

2.3. Сопутствующая алгебраическая задача. Для реализации методов, изложенных в п.п. 2.1, 2.2, важно уметь удобно решать следующую задачу. Задана квадратная матрица S , не имеющая с.з. на мнимой оси. Найти подпространство R^+ (соответственно, R^-), порожденное корневыми векторами матрицы S , соответствующими с.з., лежащим в правой (соответственно, в левой) полуплоскости. Мы изложим один из способов (см. [2], [3]) вычисления матриц P^+ и P^- , где P^+ — проектор на R^+ параллельно R^- , а P^- — проектор на R^- параллельно R^+ (зная P^+ и P^- , уже легко построить базисы в R^+ и R^-). Этот способ является удобным для практической реализации, не требует сведений о жордановой структуре матрицы S , перехода к комплексным числам, если матрица S вещественна, является численно устойчивым и дает ответ, мало меняющийся при малом изменении матрицы S .

Вычислим матрицу X -то значение квадратного корня из единичной матрицы, которое в R^+ совпадает с E , а в R^- с $-E$. (Здесь и далее E — единичная матрица соответствующего порядка). Для этого по-

строим последовательность матриц X_0, X_1, X_2, \dots по формулам

$$(2.28) \quad X_0 = S, \quad X_{k+1} = (X_k + X_k^{-1})/2, \quad k = 0, 1, \dots$$

(Аналог процесса Герона для извлечения квадратного корня из числа).

Для последовательности, определяемой формулой (2.28), для всех k существует X_k^{-1} , имеет место $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$ и притом сходимость квадратичная.

Вычислив X , найдем $P^+ = (E + X)/2$, $P^- = (E - X)/2$. Для построения базиса подпространства R^+ достаточно найти базис линейно-независимых решений уравнения $P^-x = 0$, или, что то же, уравнения $(P^-)^*P^-x = 0$. Практически удобно решить (например, по методу Якоби) задачу на с.з. $(P^-)^*P^-x = \lambda x$ и взять те x , которые соответствуют $\lambda \approx 0$. Аналогично строится базис в R^- . Все пространство R -прямая сумма подпространств R^+ и R^- : $R = R^- \oplus R^+$. В построенном базисе R матрица S приобретает квазидиагональный вид:

$$S = \left[\begin{array}{c|c} S^- & O \\ \hline O & S^+ \end{array} \right], \quad \operatorname{Re} \lambda(S^-) < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda(S^+) > 0.$$

2.4. Случай системы уравнений второго порядка. Методы переноса граничных условий из особых точек используются в удобной форме для систем о.д.у. второго порядка, часто встречающихся на практике. Ограничимся рассмотрением примера краевой задачи на полуоси на отыскание с.з. и собственных функций (с.ф.):

$$(2.29) \quad y'' - A(\lambda, t)y = 0, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(2.30) \quad \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0,$$

$$(2.31) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Здесь λ — искомый параметр (вещественный или комплексный) из фиксированной области G_λ , $n \times n$ -матрица $A(\lambda, t)$ имеет при $t \rightarrow 0$ и при $t \rightarrow \infty$ заданные асимптотические представления

$$(2.32) \quad A(\lambda, t) = t^{-2}(A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \dots), \quad t \rightarrow 0,$$

$$(2.33) \quad A(\lambda, t) = A_\infty + \frac{\tilde{A}_1}{t} + \frac{\tilde{A}_2}{t^2} + \dots, \quad t \rightarrow \infty.$$

Пусть при $\lambda \in G_\lambda$ все с.з. матрицы A_0 удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda(A_0) + (\operatorname{Im} \lambda(A_0))^2 > 0$. Тогда подпространство решений (2.29), удовлетворяющих условию (2.30), имеет размерность n . Пусть матрица A_∞ не имеет вещественных неположительных с.з. Тогда подпространство решений (2.29), удовлетворяющих условию (2.31), имеет размерность n .

Требуется определить те значения λ , при которых задача (2.29)–(2.31) имеет нетривиальные решения, и найти с.ф., соответствующие данным с.з.

2.4.1. „Отойдем” от нуля, то есть перенесем граничное условие (2.30) из особой точки $t = 0$ в близкую точку $t = t_0$, используя результаты [6]–[8]. Решения системы (2.29), удовлетворяющие условию (2.30), порождают в (y', y) -пространстве линейное n -мерное подпространство, которое для достаточно малых t представимо в виде

$$(2.34) \quad ty' = \beta(\lambda, t)y, \quad t \leq t_0,$$

где $n \times n$ -матрица $\beta(\lambda, t)$ является решением сингулярной задачи Коши

$$(2.35) \quad t\beta' + \beta^2 - \beta - t^2 A(\lambda, t) = 0, \quad 0 < t \leq t_0,$$

$$(2.36) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(\lambda, t) = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\sqrt{E + 4A_0}.$$

(Под корнем из матрицы C , не имеющей неположительных вещественных с.з., здесь и далее понимается матрица D , такая, что $D^2 = C$ и все с.з. матрицы D лежат в правой полуплоскости). Решение задачи (2.35), (2.36) существует, единственно и разлагается в асимптотический ряд

$$(2.37) \quad \beta(\lambda, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^k \beta_k(\lambda), \quad t \rightarrow 0,$$

определяемый из (2.35) формальной подстановкой разложений (2.32), (2.37) (если ряд для $t^2 A(\lambda, t)$ сходится при малых t , то сходится ряд (2.37)).

Из (2.35), (2.36) получаются рекуррентные формулы для определения β_k :

$$\beta_0 = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\sqrt{E + 4A_0},$$

$$\beta_0 \beta_1 + \beta_1 \beta_0 = A_1,$$

$$(k-1)\beta_k + \beta_0 \beta_k + \beta_k \beta_0 = A_k - \sum_{m=1}^{k-1} \beta_m \beta_{k-m}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

откуда β_k определяются однозначно, так как линейное преобразование $Z(\beta_k) \equiv (k-1)\beta_k + \beta_0 \beta_k + \beta_k \beta_0$ в пространстве $n \times n$ -матриц не вырождено.

2.4.2. „Отойдем” от бесконечности, то есть перенесем граничное условие (2.31) в конечную точку $t = t_\infty$, используя результаты [11], [16]. Решения (2.29), удовлетворяющие условию (2.31), образуют в

(y, y') -пространстве линейное n -мерное подпространство, представимое для больших t в виде

$$(2.38) \quad y' = a(\lambda, t)y, \quad t \geq t_\infty,$$

где $n \times n$ -матрица $a(\lambda, t)$ является решением задачи Коши на бесконечности

$$(2.39) \quad a' + a^2 - A(\lambda, t) = 0, \quad t_\infty \leq t < \infty,$$

$$(2.40) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(\lambda, t) = -\sqrt{A_\infty}.$$

Решение задачи (2.39), (2.40) существует, единственно и разлагается в асимптотический ряд

$$(2.41) \quad a(\lambda, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{t^k}, \quad t \rightarrow \infty,$$

определяемый из (2.39) формальной подстановкой разложений (2.33), (2.41), что приводит к рекуррентным формулам вида

$$a_0 = -\sqrt{A_\infty}, \quad a_0 a_1 + a_1 a_0 = \tilde{A}_1,$$

$$a_0 a_k + a_k a_0 = \tilde{A}_k + (k-1) a_{k-1} - \sum_{m=1}^{k-1} a_m a_{k-m}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Отсюда a_k определяются однозначно, так как линейное преобразование $Z(a_k) = a_0 a_k + a_k a_0$, $k \geq 1$, не вырождено в пространстве $n \times n$ -матриц.

2.4.3. Для реализации описанных методов требуется решать следующую алгебраическую задачу. Задана квадратная матрица S , не имеющая вещественных неположительных с.з. Найти матрицу X -то значение квадратного корня из S , все с.з. которого лежат в правой полуплоскости.

Определим последовательность матриц X_0, X_1, X_2, \dots формулами

$$(2.42) \quad X_0 = E, \quad X_{k+1} = (X_k + S/X_k)/2, \quad k = 0, 1, \dots$$

(Аналог итеративного процесса Герона для извлечения квадратного корня из числа). Здесь запись S/X_k законна, так как X_0 и тем самым все последующие X_k перестановочны с S .

Для последовательности, определяемой формулой (2.42), для любого k существует X_k^{-1} , имеет место $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$ и притом сходимость квадратичная.

2.4.4. Полученная на конечном интервале $[t_0, t_\infty]$ задача имеет вид

$$(2.43) \quad y'' - A(\lambda, t)y = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_\infty,$$

$$(2.44) \quad t_0 y'(t_0) = \beta^{(0)} y(t_0),$$

$$(2.45) \quad y'(t_\infty) = \alpha^{(\infty)} y(t_\infty),$$

где $\beta^{(0)} = \beta(\lambda, t_0)$, $\alpha^{(\infty)} = \alpha(\lambda, t_\infty)$ определяются с помощью разложений (2.37), (2.41).

2.4.4.1. Отыскание с.з. задачи (2.43)–(2.45) осуществляется „стрельбой” по параметру λ : выбираем некоторую точку \hat{t} , $\hat{t} \in [t_0, t_\infty]$; при каждом фиксированном λ переносим граничные условия (2.44) и (2.45) в точку \hat{t} ; с.з. задачи находим из условия нетривиальной совместности однородной системы линейных алгебраических уравнений, полученных в точке \hat{t} .

Для переноса граничных условий следует выбрать какой-либо вариант метода прогонки. Для простоты изложения мы будем считать, что граничное условие (2.44) переносится в виде (2.34), то есть осуществляется численным решением на отрезке $[t_0, \hat{t}]$ задачи Коши:

$$(2.46) \quad t\beta' + \beta^2 - \beta - t^2 A = 0, \quad \beta(t_0) = \beta^{(0)}.$$

Также будем считать, что граничное условие (2.45) переносится в форме (2.38), то есть осуществляется численным решением на отрезке $[\hat{t}, t_\infty]$ задачи Коши:

$$(2.47) \quad \alpha' + \alpha^2 - A = 0, \quad \alpha(t_\infty) = \alpha^{(\infty)}.$$

Известно, что решения уравнений (2.46) и (2.47) могут стать неограниченными, не дойдя до другого конца отрезка. (В основном из-за этого обстоятельства и предлагались различные другие варианты метода прогонки). Поэтому в конкретных задачах возникает вопрос, каким именно вариантом метода прогонки целесообразно воспользоваться (см. по этому поводу, например, [3], [44]–[46]). Мы не будем сейчас касаться этого важного вопроса, будем полагаться на уравнения (2.46) и (2.47), нужные окончательные выводы верны и для других вариантов метода прогонки.

Уравнение (2.46) в окрестности t_0 численно устойчиво решается слева направо, вследствие устойчивости самих уравнений, о которой уже говорилось. Соответственно, уравнение (2.47) в окрестности t_∞ численно устойчиво решается справа налево. Вне близости к „опасным” точкам t_0 и t_∞ удачный вариант метода прогонки не влечет численной неустойчивости. Поэтому значения $\beta(\hat{t})$ и $\alpha(\hat{t})$ определяются чис-

ленно устойчиво. В точке \hat{t} получаем систему

$$(2.48) \quad \begin{aligned} \hat{t}y'(\hat{t}) &= \beta(\hat{t})y(\hat{t}), \\ y'(\hat{t}) &= \alpha(\hat{t})y(\hat{t}). \end{aligned}$$

Для нетривиальной разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$(2.49) \quad \det \|\beta(\hat{t}) - \hat{t}\alpha(\hat{t})\| = 0.$$

Как уже говорилось, λ подбираем так, чтобы выполнялось (2.49).

2.4.4.2. Пусть с.з. λ определено. Имеется несколько способов вычисления с.ф. задачи (2.43)–(2.45). Опишем один из них. Найдем какое-либо нетривиальное решение \hat{y}, \hat{y}' системы (2.48). Значения $y(t)$ на отрезке $[t_0, \hat{t}]$ получим, решая задачу Коши

$$ty' = \beta(t)y, \quad y(\hat{t}) = \hat{y}.$$

Легко убедиться, что вблизи t_0 это уравнение устойчиво решается справа налево. Значения $y(t)$ на отрезке $[\hat{t}, t_\infty]$ находятся решением задачи Коши

$$y' = \alpha(t)y, \quad y(\hat{t}) = \hat{y},$$

которая вблизи t_∞ устойчиво решается слева направо.

Возникающая здесь трудность — необходимость хранить в достаточно частой сетке $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ может быть ослаблена применением приема [47], позволяющего хранить промежуточную информацию только в тех точках, где нас интересует решение. Подробнее о вычислении с.з. и с.ф. см. [48].

Выбор точек t_0, t_∞, \hat{t} часто производится эмпирически. Для некоторых уравнений и систем уравнений второго порядка получены оценки для выбора точек t_0, t_∞ , гарантирующие необходимую точность вычислений ([7], [10]). Точка \hat{t} должна располагаться ближе к „более слабой” особенности. Удачный выбор точек t_0, t_∞, \hat{t} приводит к повышению точности и скорости вычислений.

3. Системы нелинейных уравнений

3.1. Регулярная особая точка. Рассмотрим систему n нелинейных о.д.у. вида

$$(3.1) \quad tx' = A(t)x + f(t, x), \quad 0 < t \leq a,$$

для достаточно малых t . Здесь $n \times n$ -матрица $A(t)$ непрерывна на $[0, a]$ и представима при $t \rightarrow 0$ асимптотическим (соответственно, сходя-

щимся) рядом

$$(3.2) \quad A(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots;$$

вектор функция $f(t, x)$ непрерывна и для всех достаточно малых $t \geq 0$ является голоморфной функцией x в полукруге

$$\Omega_x(c) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : |x_j| \leq c, j = 1, \dots, n \right\},$$

так что

$$(3.3) \quad f(t, x) = \sum_{|p| \geq 2} f_p(t) x^p, \quad x \in \Omega_x(c), t \geq 0,$$

где $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, $|p| = \sum_{j=1}^n p_j$, $x^p \equiv x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$, причем коэффициенты $f_p(t)$ в разложении (3.3) представимы при $t \rightarrow 0$ асимптотическими (соответственно, сходящимися) рядами

$$(3.4) \quad f_p(t) = f_p^{(0)} + t f_p^{(1)} + t^2 f_p^{(2)} + \dots, \quad |p| \geq 2.$$

Пусть, кроме того, матрица A_0 , фигурирующая в разложении (3.2), не имеет с.з. на мнимой оси. Пусть A_0 имеет k с.з. в левой полуплоскости и $n-k$ в правой и приведена к виду

$$(3.5) \quad A_0 = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} A_0^- \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}}_k \middle| \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ A_0^+ \end{bmatrix}}_{n-k} \right]_{n-k}^k, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_0^+) > 0.$$

Пусть требуется найти решение (3.1), удовлетворяющее предельному условию в особой точке

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0.$$

Ставится задача перенести граничное условие (3.6) из особой точки $t = 0$ в близкую точку $t = t_0$.

В соответствии с представлением (3.5) для матрицы A_0 введем обозначения

$$x = \left[\begin{bmatrix} x^- \\ x^+ \end{bmatrix} \right]_{n-k}^k, \quad V(t) = A(t) - A_0 = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}}_k \middle| \underbrace{\begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix}}_{n-k} \right]_{n-k}^k,$$

$$f(t, x) = \left[\begin{bmatrix} f^-(t, x^-, x^+) \\ f^+(t, x^-, x^+) \end{bmatrix} \right]_{n-k}^k.$$

Кроме того, обозначим через $H_\nu(\Omega_{y;t}(\omega; t_0))$ класс вектор-функций

$$\gamma(t, y) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t, y_1, \dots, y_{n-k}) \\ \vdots \\ \gamma_k(t, y_1, \dots, y_{n-k}) \end{bmatrix},$$

определенных и непрерывных вместе с $t \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ в полицилиндре

$$\Omega_{y;t}(\omega; t_0) = \Omega_y(\omega) \times [0, t_0]$$

и голоморфных по y в поликруге $\Omega_y(\omega)$ при каждом $t \in [0, t_0]$, причем

$$\gamma(t, y) = \sum_{|a| \geq \nu} \gamma_a(t) y^a, \quad y \in \Omega_y(\omega),$$

что сокращенно записывается в виде $\gamma(t, y) = [y]_\nu$; через $\partial \gamma / \partial y$ обозначается матрица Якоби.

ТЕОРЕМА 3.1 ([8], [9]). Для решений системы (3.1), достаточно малых при $t = t_0$, предельное условие (3.6) эквивалентно для малых t нелинейному соотношению

$$(3.7) \quad x^-(t) = \gamma(t, x^+(t)), \quad t \leq t_0.$$

Здесь вектор-функция $\gamma(t, x^+) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}$ есть единственное в классе $H_1(\Omega_{x^+;t}(\omega; t_0))$ решение сингулярной задачи Коши для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$(3.8) \quad t \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x^+} [A_0^+ x^+ + V_{21}(t) \gamma + V_{22}(t) x^+ + f^+(t, \gamma, x^+)] = \\ = A_0^- \gamma + V_{11}(t) \gamma + V_{12}(t) x^+ + f^-(t, \gamma, x^+), \quad x^+ \in \Omega_{x^+}(\omega), \quad 0 < t \leq t_0,$$

$$(3.9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t, x^+) = \varrho(x^+)$$

равномерно по x^+ в $\Omega_{x^+}(\omega)$, где $\varrho(x^+) = [x^+]_2$ есть единственное в классе голоморфных функций решение системы Ляпунова

$$(3.10) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x^+} [A_0^+ x^+ + f^+(0, \varrho, x^+)] = A_0^- \varrho + f^-(0, \varrho, x^+),$$

удовлетворяющее условию

$$(3.11) \quad \varrho(0) = 0.$$

Кроме того, коэффициенты ряда

$$(3.12) \quad \gamma(t, x^+) = \sum_{|a| \geq 1} \gamma_a(t) (x^+)^a, \quad x^+ \in \Omega_{x^+}(\omega), \quad t \leq t_0,$$

представимы при малых t асимптотическими (соответственно, сходящимися) рядами

$$(3.13) \quad \gamma_q(t) = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ |q|+l \geq 2}} \gamma_q^{(l)} t^l, \quad |q| \geq 1,$$

где $\gamma_q^{(l)}$ определяется из (3.8) формальной подстановкой разложений (3.2)–(3.4), (3.12), (3.13). Эта подстановка приводит к невырожденным системам линейных алгебраических уравнений для определения $\gamma_q^{(l)}$, а именно, к рекуррентным формулам вида

$$L_{|q|,l} \hat{\gamma}_{|q|,l} = \varphi, \quad l \geq 0, \quad |q| \geq 1, \quad |q|+l \geq 2,$$

где $\hat{\gamma}_{|q|,l}$ — столбец высоты $k \times \binom{n-k+|q|-1}{|q|}$ из всех наборов $\gamma_{a_1, \dots, a_{n-k}}^{(l)}$ с одинаковой величиной $|q| = \sum_{j=1}^{n-k} q_j$ при фиксированном l ; φ — член от предыдущих коэффициентов; $L_{|q|,l}$ — неособенная матрица (ее с.з. определяются формулой

$$\lambda(L_{|q|,l}) = l - \lambda(A_0^-) + \sum_{j=1}^{n-k} q_j \lambda_j(A_0^+),$$

откуда $\operatorname{Re} \lambda(L_{|q|,l}) > 0$).

Замечания к теореме 3.1.

1. Теорема 3.1 дает алгоритм переноса граничного условия (3.6) из особой точки $t = 0$ в близкую точку $t = t_0$: в качестве граничного условия в точке $t = t_0$, согласованного с предельным условием (3.6), выписывается соотношение (3.7) с помощью разложений (3.12), (3.13).

Соотношение (3.7) является при фиксированном t уравнением $(n-k)$ -мерного аналитического многообразия, порожденного в x -пространстве $(n-k)$ -параметрическим семейством решений системы (3.1), стремящихся к 0 при $t \rightarrow 0$. Из математической теории устойчивости известно существование такого многообразия в окрестности начала координат x -пространства при каждом фиксированном малом t (см., например, [42], гл. XIII). Теорема 3.1 описывает поведение этого многообразия по совокупности переменных, его „движение” по t в x -пространстве, что потребовало изучения сингулярной задачи Коши (3.8), (3.9) для уравнений в частных производных.

В пределе при $t \rightarrow 0$ многообразие (3.7) переходит в многообразие Ляпунова

$$(3.14) \quad x^- = \varrho(x^+),$$

где $\varrho(x^+)$ — голоморфное в окрестности $x^+ = 0$ решение задачи (3.10), (3.11). Соотношение (3.14) является уравнением устойчивого многообразия для решений формальной предельной системы

$$(3.15) \quad tx' = A(0)x + f(0, x), \quad 0 < t \leq t_0,$$

стремящихся к 0 при $t \rightarrow 0$, или, что то же, для убывающих на бесконечности решений автономной системы

$$(3.16) \quad \dot{x} = -A(0)x - f(0, x), \quad \tau_0 \leq \tau < \infty,$$

которая получается из (3.15) заменой переменного $t = \exp(-\tau)$. Многообразие (3.14), инвариантное относительно τ , „склеено” из решений системы (3.16), лежащих в области сходимости ряда для $f(0, x) = [x]_2$ и стремящихся к 0 при $\tau \rightarrow \infty$. Всякое малое решение (3.16), не лежащее в момент $\tau = \tau_0$ на многообразии (3.14), не может сколь угодно близко приближаться к началу при $\tau \rightarrow \infty$. Более точный результат о поведении решений (3.16) вне устойчивого многообразия (3.14) сформулирован в теореме 5.1 [42], гл. XIII. Аналогичный результат для решений системы (3.1), начинающихся вне устойчивого многообразия (3.7), следует из теоремы 3.1 [16], гл. III (см. также [14]) и, свидетельствует, в частности, об устойчивости решений (3.1) относительно малого изменения в граничном условии (3.7), так как в направлении от особой граничной точки траектории уравнения (3.1), слегка уклонившиеся от многообразия (3.7), стремятся вернуться в него. Действительно, пусть $x(t)$ — достаточно малое решение (3.1), не удовлетворяющее в момент $t = t_0$ соотношению (3.7). Введем величину $\xi(t) = x^-(t) - \gamma(t, x^+(t))$, характеризующую уклонение $x(t)$ от многообразия (3.7). Для $\xi(t)$, учитывая (3.1), (3.8), получим уравнение

$$(3.17) \quad t\xi' = A_0^- \xi + w(t, \xi), \quad 0 < t \leq t_0,$$

где

$$\begin{aligned} w(t, \xi) = & V_{11}(t)\xi + f^-(t, \xi + \gamma(t, x^+(t)), x^+(t)) - \\ & - f^-(t, \gamma(t, x^+(t)), x^+(t)) - \frac{\partial \gamma}{\partial x^+} [V_{21}(t)\xi + \\ & + f^+(t, \gamma(t, x^+(t)) + \xi, x^+(t)) - f^+(t, \gamma(t, x^+(t)), x^+(t))]. \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < 0$, а w и $\partial w / \partial \xi$ малы при малых ξ и малых t , то малые решения (3.17) устойчивы в направлении от особой граничной точки.

2. Если в системе (3.1) допустить существование у матрицы A_0^- с.з., имеющих неотрицательные действительные части, но лежащих

левее с.з. матрицы A_0^+ , то есть если

$$\operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < \nu < \operatorname{Re} \lambda(A_0^+), \quad \nu > 0,$$

то соотношение (3.7) будет задавать многообразие решений (3.1), удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\nu} x(t) = 0.$$

3. Наряду с (3.1) можно рассмотреть систему вида

$$(3.18) \quad ty' = A(t)y + f(t, y) + g(t), \quad 0 < t \leq a,$$

где вектор-функция $g(t)$ при малых t разлагается в асимптотический (соответственно, сходящийся) ряд

$$(3.19) \quad g(t) = tg_1 + t^2 g_2 + \dots,$$

а в остальном выполняются условия теоремы 3.1. Дополнительно предполагается, что матрица A_0^+ не имеет целых положительных с.з. и что если ряды (3.2), (3.4), (3.19) асимптотические, то (3.3) — конечная сумма.

Тогда система (3.18) имеет единственное решение $\theta(t)$, представимое при $t \rightarrow 0$ асимптотическим (соответственно, сходящимся) рядом

$$(3.20) \quad \theta(t) = t\theta_1 + t^2 \theta_2 + \dots,$$

где θ_j определяются из (3.18) формальной подстановкой разложений (3.2)–(3.4), (3.19), (3.20). Полагая $x(t) = y(t) - \theta(t)$ и используя теорему 3.1, получаем, что соотношение вида

$$y^- = \gamma(t, y^+ - \theta^+(t)) + \theta^-(t), \quad t \leq t_0,$$

задает многообразие всех решений (3.18), достаточно близких при $t = t_0$ к $\theta(t)$ и стремящихся к 0 при $t \rightarrow 0$. При этом $\gamma(t, x^+)$ определяется как решение задачи Коши вида (3.8), (3.9) с заменой в (3.8) функций $f^\pm(t, \gamma, x^+)$ функциями

$$\tilde{f}^\pm(t, \gamma, x^+) \equiv f^\pm(t, \gamma + \theta^-(t), x^+ + \theta^+(t)) - f^\pm(t, \theta^-(t), \theta^+(t)).$$

3.2. Иррегулярная особая точка. Рассмотрим систему n нелинейных о.д.у. вида

$$(3.21) \quad t^{-r} x' = A(t)x + f(t, x), \quad a \leq t < \infty,$$

для достаточно больших t . Здесь $0 \leq r$ — целое число, $n \times n$ -матрица $A(t)$ непрерывна на $[a, \infty)$ и представима при $t \rightarrow \infty$ асимптотическим рядом

$$(3.22) \quad A(t) \sim A_0 + \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \dots;$$

вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна и для всех достаточно больших t является голоморфной функцией x в поликруге $\Omega_x(c)$, причем $f(t, x) = [x]_2$, а коэффициенты разложения

$$(3.23) \quad f(t, x) = \sum_{|p| \geq 2} f_p(t) x^p, \quad x \in \Omega_x(c),$$

представимы при $t \rightarrow \infty$ асимптотическими рядами

$$(3.24) \quad f_p(t) \sim f_p^{(0)} + \frac{f_p^{(1)}}{t} + \frac{f_p^{(2)}}{t^2} + \dots, \quad |p| \geq 2.$$

Пусть, кроме того, матрица A_0 , участвующая в разложении (3.22), не имеет с.з. на мнимой оси и приведена к виду

$$(3.25) \quad A_0 = \left[\underbrace{A_0^-}_{k} \middle| \underbrace{\begin{smallmatrix} O \\ A_0^+ \end{smallmatrix}}_{n-k} \right]_{n-k}^k, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda(A_0^+) > 0.$$

Пусть требуется найти решение (3.21), удовлетворяющее предельному условию на бесконечности

$$(3.26) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Ставится задача перенести граничное условие (3.26) из бесконечности в конечную точку.

Как и ранее, в соответствии с представлением (3.25) для матрицы A_0 введем разбиения на блоки для x , $f(t, x)$ и $V(t) = A(t) - A_0$:

$$x = \left[\begin{smallmatrix} x^- \\ x^+ \end{smallmatrix} \right]_{n-k}^k, \quad V(t) = \left[\begin{smallmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{smallmatrix} \right]_{n-k}^k, \quad f(t, x) = \left[\begin{smallmatrix} f^-(t, x^-, x^+) \\ f^+(t, x^-, x^+) \end{smallmatrix} \right]_{n-k}^k.$$

Кроме того, обозначим через $H_{y,t}(\omega; T)$ класс вектор функций

$$\gamma(t, y) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t, y_1, \dots, y_k) \\ \vdots \\ \gamma_{n-k}(t, y_1, \dots, y_k) \end{bmatrix},$$

определенных и непрерывных вместе с $t^{-r} \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ в полицилиндре $\Omega_{y,t}(\omega; T) = \Omega_y(\omega) \times [T, \infty)$ и голоморфных по y в поликруге $\Omega_y(\omega)$ при каждом $t \geq T$, причем $\gamma(t, y) = [y]_r$.

ТЕОРЕМА 3.2 ([13], [15]–[17]). Для решений системы (3.21), достаточно малых при $t = T$, предельное условие (3.26) эквивалентно для больших t нелинейному соотношению

$$(3.27) \quad x^+(t) = \gamma(t, x^-(t)), \quad t \geq T.$$

Здесь вектор-функция $\gamma(t, x^-) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-k} \end{bmatrix}$ есть единственное в классе $H_1(\Omega_{x^-,t}(\omega; T))$ решение задачи Коши на бесконечности для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$(3.28) \quad t^{-r} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x^-} [A_0^- x^- + V_{11}(t)x^- + V_{12}(t)\gamma + f^-(t, x^-, \gamma)] = \\ = A_0^+ \gamma + V_{22}(t)\gamma + V_{21}(t)x^- + f^+(t, x^-, \gamma), \\ T \leq t < \infty, \quad x^- \in \Omega_{x^-}(\omega),$$

$$(3.29) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t, x^-) = \varrho(x^-) \text{ равномерно по } x^- \text{ в } \Omega_{x^-}(\omega),$$

где $\varrho(x^-) = [x^-]_2$ есть единственное в классе голоморфных функций решение системы Ляпунова

$$(3.30) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x^-} [A_0^- x^- + f^-(\infty, x^-, \varrho)] = A_0^+ \varrho + f^+(\infty, x^-, \varrho),$$

удовлетворяющее условию

$$(3.31) \quad \varrho(0) = 0.$$

При этом коэффициенты ряда

$$(3.32) \quad \gamma(t, x^-) = \sum_{|q| \geq 1} \gamma_q(t) (x^-)^q, \quad x^- \in \Omega_{x^-}(\omega), \quad t \geq T,$$

представимы при $t \rightarrow \infty$ асимптотическими рядами

$$(3.33) \quad \gamma_q(t) \sim \sum_{\substack{l \geq 0 \\ |q|+l \geq 2}} \frac{\gamma_q^{(l)}}{t^l}, \quad |q| \geq 1,$$

где $\gamma_q^{(l)}$ определяются из (3.28) формальной подстановкой разложений (3.22)–(3.24), (3.32), (3.33). Эта подстановка приводит к невырожденным системам линейных алгебраических уравнений для определения $\gamma_q^{(l)}$, а именно, к рекуррентным формулам вида

$$L_{|q|,l} \hat{\gamma}_{|q|,l} = \varphi, \quad l \geq 0, \quad |q| \geq 1, \quad |q|+l \geq 2,$$

где $\hat{\gamma}_{|q|,l}$ — столбец высоты $(n-k) \times \binom{k+|q|-1}{|q|}$ из всех наборов $\gamma_{q_1 \dots q_k}^{(l)}$ с одинаковой величиной $|q| = \sum_{j=1}^k q_j$ при фиксированном l ; φ — многочлен от предыдущих коэффициентов; $L_{|q|,l}$ — неособенная матрица (ее с.з. определяются формулой $\lambda(L_{|q|,l}) = \lambda(A_0^+) - \sum_{j=1}^k q_j \lambda_j(A_0^-)$, так что $\operatorname{Re} \lambda(L_{|q|,l}) > 0$).

Замечания к теореме 3.2.

1. Соотношение (3.27) при каждом фиксированном $t \geq T$ определяет в окрестности начала координат x -пространства k -мерное аналитическое многообразие, „склеенное” из решений системы (3.21), стремящихся к 0 при $t \rightarrow \infty$. Решение задачи Коши (3.28), (3.29) определяет изменение этого многообразия по t , его „движение” в x -пространстве. В пределе при $t \rightarrow \infty$ многообразие (3.27) выходит на многообразие Ляпунова

$$(3.34) \quad x^+ = \varrho(x^-),$$

где $\varrho(x^-)$ — голоморфное в окрестности $x^- = 0$ решение задачи (3.30), (3.31). Соотношению (3.34) удовлетворяют все стремящиеся к 0 на бесконечности решения формальной автономной системы

$$\dot{x} = A(\infty)x + f(\infty, x), \quad \tau_\infty \leq \tau < \infty,$$

которая получается из (3.21) заменой переменного $\tau = t^{r+1}/(r+1)$ и формальным переходом к пределу в правой части при $\tau \rightarrow \infty$.

Решения (3.21) являются устойчивыми относительно малых изменений в граничном условии (3.27). Действительно, пусть $x(t)$ — достаточно малое решение системы (3.21), не удовлетворяющее в момент $t = T$ соотношению (3.27). Введем величину $\xi(t) = x^+(t) - \gamma(t, x^-(t))$, характеризующую отклонение решения $x(t)$ от устойчивого многообразия (3.27). Для $\xi(t)$ из (3.21), (3.28) получим уравнение вида

$$(3.35) \quad t^{-r} \xi' = A_0^+ \xi + w(t, \xi), \quad T \leq t < \infty,$$

где w и $\partial w / \partial \xi$ малы для малых ξ и больших t . Так как $\operatorname{Re} \lambda(A_0^+) > 0$, то все малые решения (3.35) устойчивы в направлении справа налево.

2. Если для системы (3.21) допустить существование у матрицы A_0^+ с.з., имеющих неположительные действительные части, но лежащих правее с.з. матрицы A_0^- , то есть если

$$\operatorname{Re} \lambda(A_0^-) < -\nu < \operatorname{Re} \lambda(A_0^+), \quad \nu > 0,$$

то соотношение (3.27) будет задавать многообразие всех решений (3.21), удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[x(t) \exp \left(\frac{\nu t^{r+1}}{r+1} \right) \right] = 0.$$

3. Наряду с (3.21) можно рассмотреть систему вида

$$(3.35') \quad t^{-r} y' = A(t)y + f(t, y) + g(t), \quad a \leq t < \infty.$$

Здесь вектор-функция $g(t)$ при больших t разлагается в асимптотический ряд

$$(3.36) \quad g(t) \sim \frac{g_1}{t} + \frac{g_2}{t^2} + \dots,$$

а в остальном выполняются условия теоремы 3.2. Дополнительно предполагается, что либо (3.23) конечная сумма, то есть $f(t, y)$ — многочлен по y , либо ряды (3.22), (3.24), (3.36) сходятся в некоторой окрестности точки $t = \infty$. Тогда существует хотя бы одно решение $\theta(t)$ системы (3.35'), представимое при $t \rightarrow \infty$ асимптотическим рядом

$$(3.37) \quad \theta(t) \sim \frac{\theta_1}{t} + \frac{\theta_2}{t^2} + \dots,$$

где θ_i определяются из (3.35') формальной подстановкой разложений (3.22)–(3.24), (3.36), (3.37). Полагая $x(t) = y(t) - \theta(t)$ и используя теорему 3.2, получим, что соотношение вида

$$y^+ = \gamma(t, y^- - \theta^-(t)) + \theta^+(t), \quad t \geq T,$$

задает многообразие всех решений (3.35), достаточно близких при $t = T$ к $\theta(t)$ и стремящихся к 0 при $t \rightarrow \infty$. При этом $\gamma(t, x^-)$ определяется как решение задачи Коши вида (3.28), (3.29) с заменой в (3.28) функций $f^\pm(t, x^-, \gamma)$ функциями

$$\tilde{f}^\pm(t, x^-, \gamma) \equiv f^\pm(t, x^- + \theta^-(t), \gamma + \theta^+(t)) - f^\pm(t, \theta^-(t), \theta^+(t)).$$

3.3. Случай системы уравнений второго порядка. Методы переноса граничных условий из особых точек описаны в удобной форме отдельно для систем нелинейных о.д.у. второго порядка, часто встречающихся на практике. Ограничимся рассмотрением одной краевой задачи на полуоси для системы n уравнений вида

$$(3.38) \quad y'' = A(t)y + f(t, y) + g(t), \quad 0 < t < \infty,$$

$$(3.39) \quad \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0,$$

$$(3.40) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Здесь $n \times n$ -матрица $A(t)$ и n -столбец $g(t)$ имеют при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ заданные асимптотические представления:

$$(3.41) \quad A(t) \sim t^{-2}(A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \dots), \quad t \rightarrow 0,$$

$$(3.42) \quad A(t) \sim A_\infty + \frac{\tilde{A}_1}{t} + \frac{\tilde{A}_2}{t^2} + \dots, \quad t \rightarrow \infty,$$

$$(3.43) \quad t^2 g(t) \sim t g_1 + t^2 g_2 + \dots, \quad t \rightarrow 0,$$

$$(3.44) \quad g(t) \sim \frac{\tilde{g}_1}{t} + \frac{\tilde{g}_2}{t^2} + \dots, \quad t \rightarrow \infty;$$

вектор-функция $f(t, y)$ — многочлен по y , то есть

$$(3.45) \quad f(t, y) = \sum_{|p|=2}^N f_p(t) y^p,$$

с заданным асимптотическим поведением коэффициентов:

$$(3.46) \quad f_p(t) \sim t^{-2} (f_p^{(0)} + t f_p^{(1)} + t^2 f_p^{(2)} + \dots), \quad t \rightarrow 0.$$

$$(3.47) \quad f_p(t) \sim f_p^{(\infty)} + \frac{\tilde{f}_p^{(1)}}{t} + \frac{\tilde{f}_p^{(2)}}{t^2} + \dots, \quad t \rightarrow \infty, |p| \geq 2.$$

Пусть в разложении (3.43) для простоты $g_1 = g_2 = \dots = 0$, то есть $t^2 g(t) \sim 0$ при $t \rightarrow 0$. Пусть все с.з. матрицы A_0 удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda(A_0) + (\operatorname{Im} \lambda(A_0))^2 > 0$. Тогда размерность многообразия решений (3.38), удовлетворяющих условию (3.39), равна n . Пусть матрица A_∞ не имеет вещественных неположительных с.з. Тогда многообразие решений (3.38), удовлетворяющих условию (3.40), имеет размерность n . (К такому виду приводится, например, задача из [49], а в задачах [27], [34] $g(t) \equiv 0$ и ищутся нетривиальные решения нелинейной краевой задачи на полуоси).

3.3.1. „Отойдем” от нуля, то есть перенесем граничное условие (3.39) из особой точки $t = 0$ в близкую точку $t = t_0$, используя результаты [8].

При фиксированном t значения решений (3.38), удовлетворяющих условию (3.39), образуют в окрестности начала координат (y, y') -пространства n -мерное аналитическое многообразие, которое для достаточно малых t представимо в виде

$$ty' = \beta(t, y), \quad t \leq t_0.$$

Здесь $\beta(t, y)$ есть голоморфное по y решение сингулярной задачи Коши

$$(3.48) \quad t \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \beta - \beta - t^2 [A(t)y + f(t, y)] = 0,$$

$$0 < t \leq t_0, |y_j| \leq \omega, j = 1, \dots, n,$$

$$(3.49) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t, y) = \varrho(y), \quad |y_j| \leq \omega, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\varrho(y)$ есть решение вида

$$\varrho(y) = A^+ y + [y]_2, \quad A^+ = \frac{1}{2} E + \frac{1}{2} \sqrt{E + 4A_0},$$

для уравнения

$$\frac{\partial \varrho}{\partial y} \varrho - \varrho - A_0 y - \sum_{|p|=2}^N f_p^{(0)} y^p = 0.$$

При этом решение задачи (3.48), (3.49) представимо рядом

$$(3.50) \quad \beta(t, y) = A^+ y + \sum_{|q| \geq 1} \beta_q(t) y^q, \quad |y_j| \leq \omega, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$(3.51) \quad \beta_q(t) \sim \sum_{\substack{l \geq 0 \\ |q|+l \geq 2}} \beta_q^{(l)} t^l, \quad t \rightarrow 0, \quad |q| \geq 1,$$

причем $\beta_q^{(l)}$ определяются из (3.48) формальной подстановкой всех разложений: (3.41), (3.45), (3.46), (3.50), (3.51).

3.3.2. „Отойдем” от бесконечности, то есть перенесем граничное условие (3.40) из бесконечности в конечную точку, используя результаты [13], [15]–[17].

Обозначим через $\theta(t)$ частное решение (3.38), представимое асимптотическим рядом

$$(3.52) \quad \theta(t) \sim \frac{\theta_1}{t} + \frac{\theta_2}{t^2} + \dots, \quad t \rightarrow \infty.$$

Тогда при фиксированном t значения решений (3.38), удовлетворяющих условию (3.40), заполняют в (y, y') -пространстве n -мерное нелинейное многообразие, представимое для достаточно больших t в виде

$$y' = \alpha(t, y - \theta(t)) + \theta'(t), \quad t \geq T.$$

Здесь $\alpha(t, z)$ есть голоморфное по z решение задачи Коши на бесконечности

$$(3.53) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \alpha - A(t)z - f(t, z + \theta(t)) + f(t, \theta(t)) = 0, \\ T \leq t < \infty, \quad |z_j| \leq \omega, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(3.54) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t, z) = \gamma(z), \quad |z_j| \leq \omega, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\gamma(z)$ есть решение вида

$$\gamma(z) = A^- z + [z]_2, \quad A^- = -\sqrt{A_\infty},$$

для уравнения

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} \gamma - A_\infty z - \sum_{|p|=2}^N f_p^{(\infty)} z^p = 0.$$

При этом решение задачи (3.53), (3.54) представимо рядом

$$(3.55) \quad \alpha(t, z) = A^- z + \sum_{|q| \geq 1} a_q(t) z^q, \quad |z_j| \leq \omega, \quad j = 1, \dots, n, \quad t \geq T,$$

где

$$(3.56) \quad a_q(t) \sim \sum_{\substack{l \geq 0 \\ |q|+l \geq 2}} \frac{a_q^{(l)}}{t^l}, \quad t \rightarrow \infty, \quad |q| \geq 1,$$

причем $a_q^{(l)}$ определяются из (3.53) формальной подстановкой всех разложений: (3.42), (3.44), (3.45), (3.47), (3.52), (3.55), (3.56).

3.3.3. На конечном интервале $[t_0, T]$ задача приобретает вид

$$(3.57) \quad y'' = A(t)y + f(t, y) + g(t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$(3.58) \quad t_0 y'(t_0) = \beta(t_0, y(t_0)),$$

$$(3.59) \quad y'(T) = \alpha(T, y(T) - \theta(T)) + \theta'(T),$$

где выражения в правых частях (3.58), (3.59) определяются с помощью разложений (3.50), (3.51), (3.55), (3.56).

Если задача (3.57)–(3.59) имеет единственное „малое” решение, то его естественно искать итеративными методами, исходя из некоторого начального приближения $y^{(0)}(t)$ (см. [45], [18]). В задачах [27], [34] $g(t) \equiv 0$ (что влечет $\theta(t) \equiv 0$) и нетривиальные решения (3.57)–(3.59) ищутся „стрельбой” по граничному условию (3.59).

Литература

- [1] А. А. Абрамов, *О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1.4 (1961), 733–737.
- [2] —, *О граничных условиях в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, *ibid.* 11.1 (1971), 275–278.
- [3] —, *Методы решения некоторых линейных задач*, Дисс. докт. физ.-мат. н., ВЦ АН СССР, Москва, 1974.
- [4] —, *О поведении граничных условий, переносимых в окрестности регулярной особой точки*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 20.4 (1980), 901–908.
- [5] А. А. Абрамов, Е. С. Виргер, Н. Б. Конюхова, В. И. Ульянова, *Численное выделение ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 10 (1975), 329–336 (Изд-во АН ВНР, Будапешт).
То же на английском языке: *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 15. *Differential Equations*, Keszthely (Hungary), 1975, 17–26 (North-Holland Publishing Company, Amsterdam–Oxford–New York).
- [6] K. Balla, *On the replacement of the condition of boundedness for certain systems of linear ODE-s with regular singularity*; in *Colloquia Mathematica Societatis*

- János Bolyai, 22. *Numerical Methods*, Keszthely (Hungary), 1977, 121–131 (North-Holland Publishing Company, Amsterdam–Oxford–New York).
- [7] К. Балла, Об оценке погрешности замены условия ограниченности решений для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярной особенностью, *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.* 18.2 (1978), 370–378.
- [8] — К решению сингулярных краевых задач для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Дисс. канд. физ.-мат. н., ВЦ АН СССР, Москва, 1978.
- [9] —, К решению сингулярных краевых задач для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.* 20.4 (1980), 909–922.
- [10] Е. С. Биргер, Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале, *ibid.* 8.3 (1968), 674–678.
- [11], [12] Е. С. Биргер, Н. В. Пяликова, О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности, I, *ibid.* 5.6 (1965), 979–990; II, *ibid.* 6.3 (1966), 446–453.
- [13] Н. Б. Конюхова, О численном выделении стремящихся к нулю на бесконечности решений для некоторых двумерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *ibid.* 10.1 (1970), 74–87.
- [14] —, О поведении решений внутри и вне устойчивого многообразия некоторых двумерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Математические заметки 8, вып. 3, (1970), 285–295.
- [15] —, К решению краевых задач на бесконечном интервале для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью, *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.* 10.5 (1970), 1150–1163.
- [16] —, О выделении ограниченных решений некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Дисс. канд. физ.-мат. н., ВЦ АН СССР, Москва, 1971.
- [17] —, О выделении устойчивых многообразий для некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью, *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.* 13.3 (1973), 609–626.
- [18] —, Об итеративном решении нелинейных краевых задач, выделяющих малые решения некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью, *ibid.* 14.5 (1974), 1221–1231.
- [19] Ш. М. Насибов, О численном выделении ограниченных решений систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными эволюционного типа, *ibid.* 17.1 (1977), 119–135.
- [20] А. А. Абрамов, Б. А. Тареев, В. И. Ульянова, Бароклинная неустойчивость в двухслойной фронтальной модели Кочина на бета-плоскости, *Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана*, 8.2 (1972), 131–141.
- [21] —, —, —, Неустойчивость двухслойного геострофического течения с антисимметричным профилем скорости в верхнем слое, *ibid.* 8.10 (1972), 1017–1028.
- [22] —, —, —, Длинные волны и бароклинная неустойчивость на наклонной поверхности раздела. В сб.: *Внутренние волны в океане*, Новосибирск, 1972, 244–257.
- [23] А. А. Абрамов, В. И. Ульянова, О решении уравнений для определения уровней энергии ионизированной молекулы водорода, *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.* 1.2 (1961), 351–354.
- [24] —, —, О вычислении уровней энергии системы: два ядра—один электрон, Теоретич. и эксперим. химия 6.3 (1970), 384–386.
- [25] А. М. Бадалян, Е. С. Биргер, Н. Б. Конюхова, Поиск резонанса в системе трех нейтронов, *Ядерная физика* 20.6 (1974), 1147–1154.

- [26] К. Балла, *К расчету ядерных моделей методом гиперсферических функций*, МТА, Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 17 (1976), 27–39.
- [27] Т. А. Белова, Н. А. Воронов, Н. Б. Конюхова, Б. С. Парийский, *Численные исследования устойчивости частицеподобных решений уравнений скалярного поля*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 21.1 (1981), 89–106.
- [28] Е. С. Биргер, Л. А. Вайнштейн, Н. Б. Конюхова, *Дифракция волнового пучка на плазменном цилиндре*, *ibid.* 16.6 (1976), 1526–1538.
- [29] Е. С. Биргер, Б. О. Кербиков, Н. Б. Конюхова, И. С. Шапиро, *О связанных квазиядерных столкновениях системы $2N2\bar{N}$* , Ядерная физика 17.1 (1973), 178–185.
- [30] Е. С. Биргер, Н. Б. Конюхова, *К расчету молекул в одноэлектронном и одноцентровом приближении*, Теоретич. и эксперимент. химия 4, вып. 1 (1968), 29–36.
- [31] —, —, *Численный расчет распространения радиоволн в вертикально-неоднородной тропосфере*, Радиотехника и электроника XIV.7 (1969), 1147–1156.
- [32] —, —, *Об устойчивом вычислении собственных значений и однородных функционалов от собственных функций сингулярных задач Штурма–Лиувилля, встречающихся в ядерной физике*, Сообщение ОИЯИ, Дубна, 1974, Д10–7707, 253–259.
- [33] Н. А. Воронов, И. Ю. Кобзарев, Н. Б. Конюхова, *О возможности существования мезонов нового типа*, Письма в ЖЭТФ 22, вып. 11, (1975), 590–594.
- [34] Н. А. Воронов, Н. Б. Конюхова, *Устойчивость частицеподобных решений уравнений скалярного поля*, Препринт ИТЭФ-26, Москва, 1978.
- [35] С. М. Дикман, Н. Б. Конюхова, *Численное исследование скин-эффекта в плазменном шнуре*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 18.2 (1978), 394–405.
- [36] А. Л. Дышко, В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, *Самофокусировка интенсивных световых пучков*, Письма в ЖЭТФ 6, вып. 5, (1967), 655–659.
- [37] В. М. Каменкович, В. И. Ульянова, Т. Б. Цыбанева, *О дисперсионных соотношениях для гравитационных и россбиевских волн в океане*, Ж. „Океанология” 17, вып. 3, (1977), 394–399.
- [38] Л. С. Клабукова, Н. А. Стадникова, *Расчет конического тела, находящегося под действием нагрузки, сосредоточенной в вершине*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 14.4 (1974), 955–969.
- [39] А. А. Колоколов, А. И. Суков, *О векторной теории самофокусировки*, ПМТФ 6 (1977), 3–6.
- [40] Ю. А. Курский, Б. С. Парийский, Р. Таскинбоев, *К методу расчета мелких акцепторных состояний в полупроводниках*, Изв. вузов СССР, Физика, 23.6 (1980), 108–109.
- [41] В. В. Соболев, В. С. Сынах, *Численный эксперимент по самофокусировке электромагнитных волн в нелинейной среде*, ПМТФ 6 (1969), 20–22.
- [42] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во ин. лит., Москва, 1958.
- [43] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, „Мир”, Москва, 1968.
- [44] А. А. Абрамов, *О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки)*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1.3 (1961), 542–545.
- [45] Н. С. Бахвалов, *Численные методы*, „Наука”, Москва, 1973, гл. IX.
- [46] А. А. Абрамов, Е. С. Birger, Н. В. Konjukhova, U. I. Ulyanova, *On methods of numerical solution of boundary value problems for systems of linear ordinary differential equations*; in: *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*,

22. *Numerical Methods*, Keszthely (Hungary), 1977, 33–67 (North-Holland Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York).
- [47] Б. С. Парийский, *Некоторые приемы экономии памяти ЭВМ или времени счета для разных методов прогонки*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 20.1 (1980), 69–76.
- [48] А. А. Абрамов, В. В. Диткин, Н. Б. Конюхова, Б. С. Парийский, В. И. Ульянова, *Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями*, *ibid.* 20.5 (1980), 1155–1173.
- [49] Е. Б. Богомольный, М. С. Маринов, *Вычисление массы монополя в калибровочной теории*, Ядерная физика 23.3 (1976), 676–680.
- [50] А. А. Абрамов, К. Балла, Н. Б. Конюхова, *Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, *Собщения по вычисл. матем.* М.: ВЦ АН СССР, 1981.
- [51] А. А. Абрамов, Н. Б. Конюхова, *О допустимых граничных условиях в особой точке типа полюса для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*. В кн.: *Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики*, „Наука”, Новосибирск, 1983, стр. 28–33.
- [52] А. А. Абрамов, *О численном решении некоторых алгебраических задач, возникающих в теории устойчивости*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 24.3 (1984), 339–347.
- [53] Н. Б. Конюхова, *Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, *ibid.* 23.3 (1983), 629–645.
- [54] —, *О допустимых граничных условиях в иррегулярной особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, *ibid.* 23.4 (1983), 806–824.
- [55] А. А. Абрамов, А. Л. Дышко, Н. Б. Конюхова, Т. В. Пак, Б. С. Парийский, *Вычисление вытянутых сфероидальных функций решением соответствующих дифференциальных уравнений*, *ibid.* 24.1 (1984), 3–18.

*Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20–May 30, 1980*
