

*MESURES SINGULIÈRES ASSOCIÉES À
DES DÉCOUPAGES ALÉATOIRES D'UN HYPERCUBE*

PAR

JACQUES PEYRIÈRE (ORSAY)

1. Introduction. Rappelons quelques définitions relatives à la dimension de Hausdorff. On considère une famille \mathcal{G} de parties d'un espace métrique X . Si E est une partie de X , on en note $\text{diam } E$ le diamètre. Si, de plus, α et ε sont deux nombres strictement positifs, on pose

$$H_{\varepsilon, \mathcal{G}}^{\alpha}(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} (\text{diam } B_j)^{\alpha}; B_j \in \mathcal{G}, \text{diam } B_j \leq \varepsilon \text{ et } \bigcup_{j \in J} B_j \supset E \right\},$$

$$H_{\mathcal{G}}^{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon, \mathcal{G}}^{\alpha}(E),$$

$$\dim_{\mathcal{G}}(E) = \inf \{ \alpha > 0; H_{\mathcal{G}}^{\alpha}(E) = 0 \}.$$

Bien sûr, ces définitions n'ont d'intérêt que si, pour tout x dans E , il existe des éléments de \mathcal{G} qui contiennent x et dont le diamètre soit arbitrairement petit.

Lorsque \mathcal{G} est l'ensemble des parties de X (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des boules de X), l'indice \mathcal{G} est omis; $\text{dim } E$ est la dimension de Hausdorff de E . De l'inégalité évidente $H^{\alpha}(E) \leq H_{\mathcal{G}}^{\alpha}(E)$ on déduit la relation $\text{dim } E \leq \dim_{\mathcal{G}} E$.

Deux problèmes se posent. En premier lieu, donner des conditions sur la famille \mathcal{G} pour que, pour toute partie E de X , on ait $\text{dim } E = \dim_{\mathcal{G}} E$. La proposition 2.1 donne une réponse à cette question dans le cas où X est un pavé d'un espace euclidien. En second lieu, étant donnée une partie E de X , quelles conditions imposer à \mathcal{G} pour que l'on ait $\text{dim } E = \dim_{\mathcal{G}} E$? Ceci fait l'objet des propositions 2.2 et 2.3.

Dans la partie 3, nous donnons comme application de ce qui précède l'étude de certaines mesures singulières obtenues en effectuant des partages aléatoires du pavé $[0, 1]^d$.

2. Du calcul de la dimension de Hausdorff. On considère une suite $\{\mathcal{G}_n\}_{n \geq 1}$ de partitions finies de $[0, 1]^d$ constituées de pavés, produits de d intervalles semi-ouverts à droite (tous les pavés que nous considérerons seront

de tels produits, sans que cela soit à chaque fois précisé). On suppose que l'on a $\mathcal{G}_1 = \{[0, 1]^d\}$ et que \mathcal{G}_{n+1} est un raffinement de \mathcal{G}_n . Si I appartient à \mathcal{G}_{n+1} , on note $p(I)$ l'élément de \mathcal{G}_n qui le contient. On pose $\mathcal{G} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{G}_n$. Si I est un pavé, on note $|I|$ sa mesure de Lebesgue d -dimensionnelle, $|I|_M$ la mesure de sa plus grande arête et $|I|_m$ celle de sa plus petite. Si x est un point de $[0, 1]^d$, on note $I_n(x)$ l'élément de \mathcal{G}_n qui le contient.

PROPOSITION 2.1. *Supposons que l'on ait*

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{I \in \mathcal{G}_n} |I| = 0$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{I \in \mathcal{G}_n} \text{Log } |I|) / (\inf_{I \in \mathcal{G}_n} \text{Log } |I|) = 1$,
3. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{I \in \mathcal{G}_n} \text{Log } |I|_m / \text{Log } |I|_M = 1$,
4. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{I \in \mathcal{G}_{n+1}} \text{Log } |I| / \text{Log } |p(I)| = 1$.

Alors, pour toute partie E de $[0, 1]^d$, on a $\dim_{\mathcal{G}} E = \dim E$.

Démonstration. Il résulte des hypothèses qu'il existe une suite $\{a_n\}_{n \geq 1}$, décroissant vers 0, telle que, si I appartient à \mathcal{G}_n , on ait $|I| \leq a_n$, $|I| \leq \inf_{I' \in \mathcal{G}_n} |I'|^{1-a_n}$, $|I|_M \leq |I|_m^{1-a_n}$ et, si I appartient à \mathcal{G}_{n+1} , $|p(I)| \leq |I|^{1-a_n}$.

Considérons, pour chaque $\varepsilon > 0$, le nombre $n(\varepsilon)$, borne inférieure des entiers ν tels qu'il existe un élément I de $\mathcal{G}_{\nu+1}$ tel que $|I| \leq \varepsilon^d$. Clairement, $n(\varepsilon)$ croît vers $+\infty$ lorsque ε décroît vers 0. Soit ε_0 un nombre strictement positif tel que l'on ait $a_{n(\varepsilon_0)} < 1/2$.

Si I appartient à \mathcal{G}_n , on a $|I|_M^d \leq |I|_m^{d(1-a_n)} \leq |I|^{1-a_n} \leq a_n^{1-a_n}$. Il s'ensuit que tout cube contenu dans $[0, 1]^d$ contient un élément de \mathcal{G} .

Soit ε un nombre appartenant à l'intervalle $]0, \varepsilon_0[$. Nous allons montrer que, si Q est un cube, contenu dans $[0, 1]^d$, dont les arêtes ont une longueur l inférieure à ε , on a

$$H_{\sqrt{d}\varepsilon^{1/8}, \mathcal{G}}^\alpha(Q) \leq C d^{\alpha/2} l^{(1-3a_{n(\varepsilon)})\alpha - 14(d-1)a_{n(\varepsilon)}},$$

où C ne dépend que de d .

Soit donc Q un tel cube. On note ν le plus petit entier tel que Q ne contienne aucun élément de \mathcal{G}_ν , mais en contienne un de $\mathcal{G}_{\nu+1}$. Clairement, on a $\nu \geq n(\varepsilon)$. Pour alléger l'écriture, nous posons $n' = n(\varepsilon)$. S'il existait un I dans \mathcal{G}_ν tel que l'on ait $|I| < (l/2)^{d(1-a_{n'})-2}$, alors, pour tout I dans \mathcal{G}_ν , on aurait $|I| < (l/2)^{d(1-a_{n'})-1}$, d'où $|I|_M < l/2$, ce qui contredirait le choix de ν . Pour tout I appartenant à \mathcal{G}_ν , on a donc $|I| \geq (l/2)^{d(1-a_{n'})-2}$, d'où $|I|_m \geq |I|_M^{(1-a_{n'})-1} \geq (l/2)^{(1-a_{n'})-3}$. On en déduit que le nombre d'éléments de \mathcal{G}_ν qui rencontrent Q est majoré par $C l^{(d-1)(1-(1-a_{n'})-3)}$ où C ne dépend que de d (en effet, les éléments de \mathcal{G}_ν qui rencontrent Q , en rencontrent la frontière). D'autre part, puisque Q contient un

élément de \mathcal{G}_{v+1} , tout élément I de \mathcal{G}_v satisfait les relations

$$\text{diam } I \leq \sqrt{d} |I|_M \leq \sqrt{d} |I|_m^{1-a_{n'}} \leq \sqrt{d} |I|^{(1-a_{n'})/d} \leq \sqrt{d} l^{(1-a_{n'})^3}.$$

On a donc

$$H_{\sqrt{d}\varepsilon}^{\alpha(1-a_{n'})^3, \mathcal{G}}(Q) \leq Cd^{\alpha/2} l^{(1-a_{n'})^3\alpha + (d-1)(1-(1-a_{n'})^{-3})},$$

d'où l'on déduit l'inégalité annoncée.

Si E est une partie de $[0, 1]^d$, ε un élément de $]0, \varepsilon_0[$ et α un nombre positif, on a donc

$$H_{\sqrt{d}\varepsilon}^{\alpha, \mathcal{G}}(E) \leq Cd^{\alpha/2} H_{\varepsilon}^{(1-3a_{n(\varepsilon)})\alpha + (d-1)(1-(1-a_{n(\varepsilon)})^{-3})}(E),$$

ce qui montre l'inégalité $H_{\mathcal{G}}^{\alpha}(E) \leq Cd^{\alpha/2} H^{\alpha'}(E)$, valable pour tout $\alpha' \in]0, \alpha[$. On a donc prouvé l'inégalité $\dim_{\mathcal{G}} E \leq \dim E$ qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION 2.2. *Soit μ une mesure positive et bornée sur la tribu \mathcal{F} engendrée par \mathcal{G} . L'ensemble E des points x de $[0, 1]^d$ tels que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n(x)|_M = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Log } \mu(I_n(x))/\text{Log } |I_n(x)|_M < \alpha$ a une dimension de Hausdorff inférieure à α .*

Démonstration. On observe que l'ensemble $E \cap \bigcup \{I \in \mathcal{G}; \mu(I) = 0\}$ est vide. Soit t un nombre strictement positif. Posons $F_t = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup \{I \in \mathcal{G}_n; \mu(I) \geq \inf(t, |I|_M^{\alpha})\}$. On a l'inclusion $E \subset \bigcup_{n \geq 1} F_{1/n}$. Pour montrer la proposition, il suffit de prouver que, pour tout $t > 0$, on a $\dim E \cap F_t \leq \alpha$.

Soit ε un nombre strictement compris entre 0 et $t^{1/\alpha}$. Pour chaque $x \in F_t \cap E$ tel que $\mu(\{x\}) < \varepsilon^{\alpha}$, choisissons un élément I_x de \mathcal{G} tel que $x \in I_x$ et $\mu(I_x) < \varepsilon^{\alpha}$. Par définition de F_t , on a $|I_x|_M^{\alpha} \leq \mu(I_x)$. Soit maintenant x_1, x_2, \dots, x_v les points de $F_t \cap E$ tels que $\mu(\{x_j\}) \geq \varepsilon^{\alpha}$. Choisissons, pour chaque j , un élément I_{x_j} de \mathcal{G} tel que $x_j \in I_{x_j}$, $|I_{x_j}|_M < \varepsilon$ et $\sum_{1 \leq j \leq v} |I_{x_j}|_M^{\alpha} < 1$.

Alors, si $\{J_{\lambda}\}_{\lambda \in I}$ est une sous-famille extraite de la famille $\{I_x\}_{x \in E \cap F_t}$, formée d'ensembles deux à deux disjoints et recouvrant $E \cap F_t$, on a

$$\sup_{\lambda \in I} |J_{\lambda}|_M < \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in I} |J_{\lambda}|_M^{\alpha} \leq \mu([0, 1]^d) + 1,$$

ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 2.3. *Soit μ une mesure positive et bornée sur la tribu \mathcal{F} engendrée par \mathcal{G} , E un élément de \mathcal{F} tel que $\mu(E) > 0$ et $\{u_n\}_{n \geq 1}$ une suite décroissant vers 0 et telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log } u_{n+1}/\text{Log } u_n = 1$. On suppose que,*

pour tout x dans E , on a

$$1. \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Log } \mu(I_n(x))/\text{Log } |I_n(x)| > \alpha,$$

- 2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Log } |I_n(x)|_m / \text{Log } |I_n(x)|_M < \beta,$
- 3. $0 < \gamma < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } |I_n(x)|}{\text{Log } u_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } |I_n(x)|}{\text{Log } u_n} < \delta.$

Alors on a $\dim E \geq d(\beta\alpha + 1 - \beta\delta/\gamma).$

Démonstration. Posons $\mathcal{G}_n = \bigcup_{j \geq n} \{I \in \mathcal{G}_j; \mu(I) \geq |I|^\alpha \text{ ou } |I|_M^\beta \text{ ou } |I|$

$\geq u_j^\gamma \text{ ou } |I| \leq u_j^\delta\}$ et $F_n = \bigcup_{I \in \mathcal{G}_n} I.$

On observe que $F_n \cap E$ décroît vers $\emptyset.$ Choisissons n_0 tel que l'on ait $\mu(F_{n_0}^c \cap E) \neq 0$ et notons μ' la mesure $\mu \cdot 1_{F_{n_0}^c \cap E}.$ On remarque que, si l'on a $n \geq n_0, I \in \mathcal{G}_n$ et $\mu'(I) > 0,$ alors on a $\mu(I) < |I|^\alpha, |I|_m > |I|_M^\beta$ et $u_n^\delta < |I| < u_n^\gamma.$

Soit Q un cube contenu dans $[0, 1]^d$ et dont la longueur l des arêtes est inférieure à $u_{n_0}^{1/d}.$ Soit n l'entier défini par la double inégalité $u_{n+1} < l^d \leq u_n;$ n tend vers l'infini lorsque l tend vers 0. Si I appartient à \mathcal{G}_n et est tel que $\mu'(I)$ soit non nul, on a $|I|_M \leq |I|_m^{1/\beta} \leq |I|^{1/\beta d} \leq u_n^{\gamma/\beta d}.$ Le nombre d'éléments I de \mathcal{G}_n tels que l'on ait $\mu'(I) \neq 0$ et $I \cap Q \neq \emptyset$ est donc majoré par $(l + 2u_n^{\gamma/\beta d})^d u_n^{-\delta},$ donc par $3^d u_n^{\inf(1, \gamma/\beta) - \delta}.$ On obtient donc $\mu'(Q) \leq 3^d u_n^{\gamma\alpha + \inf(1, \gamma/\beta) - \delta}$ d'où, si l'on

pose $\frac{\text{Log } u_{n+1}}{\text{Log } u_n} = 1 + \varepsilon_n,$ $\mu'(Q) \leq 3^d l^{d[\gamma\alpha + \inf(1, \gamma/\beta) - \delta]/(1 + \varepsilon_n)}.$ On en déduit

facilement l'inégalité $\dim E \geq \dim E \cap F_{n_0}^c \geq d[\gamma\alpha + \inf(1, \gamma/\beta) - \delta].$ Si l'on remplace u_n par $u_n^{\gamma/\beta},$ on obtient le résultat annoncé.

Remarque. Dans le cas $d = 1,$ des analogues de la proposition 2.1 apparaissent dans [9] et [11]. Les propositions 2.2 et 2.3 généralisent des résultats de [2], [6], [10], [11].

3. Une famille de mesures aléatoires. Dans tout ce qui suit d et v désignent deux entiers tels que $1 \leq v \leq d.$

Soit η une injection de l'ensemble $\{1, 2, \dots, v\}$ dans $\{1, 2, \dots, d\}$ et $W = (W_1, \dots, W_v)$ un point du pavé $]0, 1[^v.$ Ces données permettent de partager un pavé $I = \prod_{k=1}^d [a_k, b_k[$ en 2^v pavés $\{I_j\}_{0 \leq j < 2^v}$ ainsi qu'on va

l'expliquer. On décompose j en base 2: $j = \sum_{l=1}^v \xi_l 2^{l-1};$ alors I_j

$= \prod_{k=1}^d [a_k(j), b_k(j)[$ où

- 1. si k n'est pas dans l'image de $\eta, a_k(j) = a_k$ et $b_k(j) = b_k,$
- 2. si $\xi_l = 0, a_{\eta(l)}(j) = a_{\eta(l)}$ et $b_{\eta(l)}(j) = (1 - W_l) a_{\eta(l)} + W_l b_{\eta(l)},$
- 3. si $\xi_l = 1, a_{\eta(l)}(j) = (1 - W_l) a_{\eta(l)} + W_l b_{\eta(l)}$ et $b_{\eta(l)}(j) = b_{\eta(l)}.$

Posons $v_n = (2^v - 1)n + 2 - 2^v.$ Soit $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}, \{\eta_n\}_{n \geq 1}$ et $\{W(n)\}_{n \geq 1}$ trois suites de variables aléatoires telles que

- 1. ε_n prend les valeurs $1, 2, \dots, v_n$ avec des probabilités égales,

2. η_n prend comme valeurs, avec des probabilités égales, les injections η de $\{1, 2, \dots, v\}$ dans $\{1, 2, \dots, d\}$ ayant la propriété suivante: η est une application croissante de $\{1, 2, \dots, v\}$ dans $\{\eta(1), \dots, d, 1, \dots, \eta(1)-1\}$.

3. $W(n)$ est à valeurs dans $]0, 1[^d$.

Ces données permettent d'obtenir une suite aléatoire $\{\{I_{n,j}\}_{1 \leq j \leq v_n}\}_{n \geq 1}$ de partitions de $[0, 1[^d$ en pavés de la façon suivante. La première partition est constituée de l'unique élément $I_{1,1} = [0, 1[^d$. Pour passer de la n ième à la $(n+1)$ ième on effectue sur I_{n,ε_n} la partition déterminée par η_n et $W(n)$ et on insère dans la liste, à la place de I_{n,ε_n} , les 2^v pavés obtenus en respectant l'ordre défini plus haut.

Cette construction dans le cas $d = 2, v = 1$, est due à R. F. Voss qui en a effectué des simulations à l'ordinateur [13]. Le cas $d = v = 1$ est étudié dans [10]. Des constructions ressemblantes ont été faites ou étudiées par plusieurs auteurs [1], [3], [5]–[8], [12].

On définit une mesure aléatoire μ_n : elle a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction aléatoire $\frac{1}{v_n} \sum_{1 \leq j \leq v_n} |I_{n,j}|^{-1} 1_{I_{n,j}}$.

Nous ferons les hypothèses suivantes. Pour le lemme 3.1 nous supposerons que les variables $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ sont indépendantes. Ensuite nous supposerons de plus que les v.a. $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ sont indépendantes et indépendantes de la suite $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$. A partir de la proposition 3.7 nous supposerons que les variables $\{W(n)\}_{n \geq 1}$ sont indépendantes et équidistribuées avec une v.a. W et qu'en outre elles sont indépendantes des v.a. $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ et $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$.

LEMME 3.1. Soit F une partie de l'ensemble $\{1, 2, \dots, v_n\}$ ayant b éléments. Alors, presque sûrement, $\mu_n(\bigcup_{j \in F} I_{n,j})$ tend vers une v.a. $Z_{n,F}$. Cette variable $Z_{n,F}$ est indépendante des variables $\{W(j)\}_{j \geq 1}$, $\{\eta_j\}_{j \geq 1}$ et $\{\varepsilon_j\}_{1 \leq j < n}$ et sa loi a pour densité

$$\Gamma(v_n/(2^v-1)) t^{b/(2^v-1)-1} (1-t)^{(v_n-b)/(2^v-1)-1} / \Gamma(b/(2^v-1)) \Gamma((v_n-b)/(2^v-1))$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Démonstration. C'est une conséquence des résultats sur le modèle de Polyà [4].

En particulier, on a $E(Z_{n,F}) = b/v_n$. Si $F = \{j\}$, nous noterons $Z_{n,j}$ au lieu de $Z_{n,\{j\}}$.

LEMME 3.2. Soit $p_{n,k}$ la probabilité pour qu'exactly k des pavés $\{I_{n,j}\}_{1 \leq j \leq v_n}$ touchent la cloison $\{0\} \times [0, 1[^{d-1}$. On a

$$\sum_{k \geq 1} k p_{n,k} = O(n^{((2^d-v)2^{v-1}-d)/((2^v-1)d)}).$$

Démonstration. On a

$$p_{n+1,k} = \left(1 - \frac{k}{v_n}\right) p_{n,k} + \frac{k-2^v+1}{v_n} \left(1 - \frac{v}{d}\right) p_{n,k-2^v+1} + \frac{(k-2^{v-1}+1)v}{v_n d} p_{n,k-2^{v-1}+1}$$

d'où

$$\sum_{k \geq 1} k p_{n+1,k} = \left(1 + \frac{(2d-v)2^{v-1}-d}{v_n d} \right) \sum_{k \geq 1} k p_{n,k}.$$

On achève facilement la démonstration.

LEMME 3.3. Soit n_0 un entier ≥ 1 , j_0 un élément de $\{1, 2, \dots, v_0\}$. Considérons une cloison C du pavé I_{n_0, j_0} (c'est un pavé $(d-1)$ -dimensionnel contenu dans sa frontière). Désignons par $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ les instants successifs où l'on effectue une dissection d'un pavé contenu dans I_{n_0, j_0} . Il s'agit de temps d'arrêt adaptés à la suite $\mathfrak{A}_n = \sigma(\{\varepsilon_j\}_{1 \leq j < n}, \{\eta_j\}_{1 \leq j < n}, \{W(j)\}_{1 \leq j < n})$. Soit $p_{n,k}$ la probabilité, sachant \mathfrak{A}_{n_0} , que k exactement des pavés $\{I_{\tau_n, j}\}_j$ contenus dans I_{n_0, j_0} touchent la cloison C . On a

$$\sum_{k \geq 1} k p_{n,k} = O(n^{((2d-v)2^{v-1}-d)/((2^v-1)d)}).$$

Démonstration. C'est la même que celle du lemme précédent.

LEMME 3.4. Les données sont les mêmes que celles du lemme précédent. Désignons par F_n l'ensemble des j tels que $I_{\tau_n, j}$ soit contenu dans I_{n_0, j_0} et touche C . On a $E(\sum_{j \in F_n} Z_{n,j}) = O(n^{-v2^{v-1}/(2^v-1)d})$.

COROLLAIRE 3.5. Soit $n_0 \geq 1$, $j \in \{1, 2, \dots, v_{n_0}\}$ et C une cloison de $I_{n,j}$. Désignons par F_n l'ensemble des j tels que $I_{n,j}$ soit contenu dans I_{n_0, j_0} et touche C . Alors, presque sûrement, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in F_n} Z_{n,j} = 0.$$

Démonstration. Cela résulte du lemme précédent et du fait que $\sum_{j \in F_n} Z_{n,j}$ décroît.

PROPOSITION 3.6. Presque sûrement, il existe une unique mesure μ sur la tribu \mathcal{F} engendrée par les pavés $\{I_{n,j}\}_{1 \leq j \leq v_n}$ telle que l'on ait $\mu(I_{n,j}) = Z_{n,j}$.

Démonstration. Considérons l'arbre \mathcal{A} formé par les suites finies d'éléments de $\{1, 2, \dots, 2^v\}$. Soit $\mathcal{A} \cup \partial\mathcal{A}$ sa compactification naturelle. La donnée des $\{\varepsilon_j\}_{j \geq 1}$ définit une application φ de l'ensemble $\{(n, j); n \geq 1, 1 \leq j \leq v_n\}$ dans \mathcal{A} : si $I_{n,j}$ est, à l'instant n , coupé en 2^v pavés, les images par φ de ces pavés sont les descendants de $\varphi(n, j)$; de plus, si $I_{n,j} = I_{n',j'}$, alors $\varphi(n, j) = \varphi(n', j')$.

A chaque élément a de \mathcal{A} , on associe une partie \tilde{I}_a de $\partial\mathcal{A}$: \tilde{I}_a est constitué des éléments de $\{1, 2, \dots, 2^v\}^N$ qui commencent par a . En vertu du théorème de Carathéodory, il y a une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\partial\mathcal{A}$ telle que l'on ait $\tilde{\mu}(\varphi(n, j)) \sim Z_{n,j}$.

On définit une application ψ de $[0, 1]^d$ dans $\partial\mathcal{A}$: $\psi(x) = \bigcap_{n \geq 1} (\varphi(n, j_n))^\sim$ où $x \in I_{n, j_n}$. D'après 3.5, on a $\mu(\partial\mathcal{A} \setminus \psi([0, 1]^d)) = 0$. La mesure cherchée est l'image de μ par ψ^{-1} .

Dans un cas on peut obtenir un résultat plus précis, qui a comme conséquence que μ est presque sûrement une mesure de Borel.

PROPOSITION 3.7. *Supposons que $v = d$. Si l'on pose*

$$\sigma = \sup_{t > 1} \left[1 - \frac{2^{d-1}}{d} \sum_{k=1}^d E(W_k^t + (1 - W_k)^t) \right] / (2^d - 1)t,$$

on a, presque sûrement, $\sup_{n \geq 1} n^\sigma \sup_{1 \leq j \leq v_n} \text{diam } I_{n, j} < \infty$.

Démonstration. Elle est analogue à celle du lemme 2.4 de [9].

Nous allons maintenant étudier la mesure aléatoire μ (que nous noterons aussi μ_ω). Rappelons que nous supposons que les trois suites $\{\varepsilon_j\}$, $\{\eta_j\}$ et $(W(j))$ sont indépendantes et que les v.a. $W(j)$ sont indépendantes et équidistribuées avec une v.a. $W = (W_1, \dots, W_v)$.

Nous notons $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espace sur lequel les v.a. ε, η et W sont définies et \mathfrak{A}_n la tribu $\sigma((\varepsilon_j)_{1 \leq j < n}, (\eta_j)_{1 \leq j < n}, (W(j))_{1 \leq j < n})$. Etant donné un entier n , un élément A de \mathfrak{A}_n et un entier j dans $\{1, 2, \dots, v_n\}$ nous notons $V(A, n, j)$ l'ensemble $\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, 1]^d; \omega \in A \text{ et } t \in I_{n, j}\}$. Soit \mathcal{F}_n la tribu engendrée par $\{V(A, n, j); A \in \mathfrak{A}_n, 1 \leq j \leq v_n\}$ et \mathcal{F} la tribu engendrée par $\{V(A, n, j); n \geq 1, A \in \mathfrak{A}_n, 1 \leq j \leq v_n\}$. On peut observer que cette dernière famille est stable par intersection finie. Il existe donc une unique probabilité P sur \mathcal{F} telle que l'on ait $P(V) = \int (\int 1_V(\omega, t) d\mu_\omega(t)) dP(\omega)$ pour tout $V \in \mathcal{F}$. Dans ces conditions P -presque sûrement équivaut à presque sûrement, μ -presque partout.

Dorénavant nous noterons $I_n(x)$ l'intervalle $I_{n, j}$ qui contient x .

LEMME 3.8. *Presque sûrement, pour μ presque tout x , on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} n\mu(I_n(x))/\text{Log } n \leq 1$ et, pour toute suite croissante $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ telle que*

$$\sum_{n \geq 0} \alpha_{2^n}^{-2^v/(2^v-1)} \text{ soit fini, } \liminf_{n \rightarrow \infty} n\alpha_n \mu(I_n(x)) \geq 1.$$

Démonstration. Posons $M_n(x) = \mu(I_n(x))$. On a

$$\begin{aligned} P(n\alpha_n M_n < 1) &= \frac{v_n \Gamma(v_n/(2^v-1))}{\Gamma(1/(2^v-1)) \Gamma[(v_n-1)/(2^v-1)]} \int_0^{1/n\alpha_n} t^{1/(2^v-1)} (1-t)^{(v_n-1)/(2^v-1)-1} dt \\ &\sim \frac{n^{1+1/(2^v-1)}}{\Gamma[1+1/(2^v-1)]} \int_0^{1/n\alpha_n} t^{1/(2^v-1)} (1-t)^{n-2} dt = O(\alpha_n^{-1-1/(2^v-1)}). \end{aligned}$$

On utilise cette estimation et le lemme de Borel–Cantelli pour minorer $M_{[q^n]}$ ($q > 1$) et on déduit la seconde assertion du fait que M_n décroît.

Démontrons la première assertion. Soit $q > 1$ et $t > 1$. Posons $q_n = [q^n]$, $\beta_n = t(\text{Log } n)/q_n$ et $u = 1/(2^v - 1)$. On a

$$\begin{aligned} P(q_n M_{q_n} > t \text{Log } n) &= \frac{v_n \Gamma(q_n - 1 + u)}{\Gamma(u) \Gamma(q_n - 1)} \int_{q_n^{-1} t \text{Log } n}^1 t^u (1-t)^{q_n - 2} dt \\ &\leq C q_n^{1+u} \int_{q_n^{-1} t \text{Log } n}^1 t^u (1-t)^{q_n - 2} dt \end{aligned}$$

d'où $\sum_{j \geq n} u_n \leq C \int_0^1 \varphi(t) t^u dt$ où φ est constante sur $] \beta_n, \beta_{n-1} [$ et vaut $\sum_{j \geq n} q_j^{1+u} (1-t)^{q_j - 2}$ sur cet intervalle. On a donc

$$\sum_{n \geq n_0} u_n \leq C' \left[1 + \sum_{n \geq n_0} (\beta_{n-1}^{1+u} - \beta_n^{1+u}) (1 - \beta_n)^{q_n - 2} q_n^{1+u} \right] < \infty.$$

Par suite, presque sûrement, on a $\limsup_{n \rightarrow \infty} q_n M_{q_n} / \text{Log } n \leq 1$ et l'on termine comme précédemment.

Dans la suite nous utiliserons uniquement le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.9. *Presque sûrement, pour μ -presque tout x , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } \mu(I_n(x))}{\text{Log } n} = -1.$$

LEMME 3.10. *Notons $L_1(n)$ la fonction aléatoire $\sum_{j=1}^{v_n} |I_{n,j}|_1 1_{I_{n,j}}$ où $|I_{n,j}|_1$ désigne la longueur de la lième arête de $I_{n,j}$ (il n'y a pas de confusion à craindre avec les notations de la partie 2). Les variables $\{L_1(n+1)/L_1(n)\}_{n \geq 1}$ sont indépendantes relativement à \mathcal{P} et, pour tout $t \in [0, 1[$ on a*

$$P(L_1(n+1) \leq t L_1(n)) = \frac{2^{v-1}}{v_{n+1} d} \sum_{k=1}^v [P(W_k \leq t) + P(1 - W_k \leq t)].$$

Démonstration. Soit A un borélien de $[0, 1[$ et $X = \sum_{j=1}^{v_n} X_j 1_{I_{n,j}}$ une v.a. bornée et \mathcal{F}_n -mesurable. On a

$$\begin{aligned} E[X 1_A(L_1(n+1)/L_1(n))] &= \frac{2^{v-1}}{v_{n+1} d} E(X_{e_n}) \sum_{k=1}^v [P(W_k \in A) + P(1 - W_k \in A)] \\ &= \frac{2^{v-1}}{v_{n+1} d} E(X) \sum_{k=1}^v [P(W_k \in A) + P(1 - W_k \in A)], \end{aligned}$$

d'où le lemme.

PROPOSITION 3.11. *Presque sûrement, pour μ -presque tout x , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } |I_n(x)|_d / \text{Log } n}{(2^v - 1)d} = \sum_{k=1}^v E[\text{Log } W_k(1 - W_k)].$$

Démonstration. Elle est analogue, à partir du lemme précédent, à celle de la proposition 3 de [10].

Notons $u_{n,j}$ le nombre d'ancêtres de $I_{n,j}$. Plus précisément, posons $u_{n,j} = \text{card} \{I_{m,k}; 1 \leq m \leq n, 1 \leq k \leq v_m, I_{n,j} \subset I_{m,k}, I_{n,j} \neq I_{m,k}\}$. On pose $u_n = \sum_{1 \leq j \leq v_n} u_{n,j} 1_{I_{n,j}}$.

LEMME 3.12. *Presque sûrement, pour μ -presque tout x , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{\log n} = \frac{2^v}{2^v - 1}.$$

Démonstration. Si $X = \sum_{j=1}^{v_n} X_j 1_{I_{n,j}}$ est une v.a. bornée et \mathcal{F}_n -mesurable, on a

$$E[(u_{n+1} - u_n) X] = E[(\mu(I_{n,\varepsilon_n}) X_{\varepsilon_n})] = \frac{2^v}{v_{n+1}} E(X_{\varepsilon_n}) = \frac{2^v}{v_{n+1}} E(X).$$

On achève la démonstration comme dans [10].

THÉORÈME 3.13. *Presque sûrement, il existe un élément A de la tribu \mathcal{F} engendré par les ensembles $\{I_{n,j}\}_{n \geq 1, 1 \leq j \leq v_n}$, tel que l'on ait $\mu(A) = 1$ et*

$$\dim A = D = -\frac{2^v - 1}{2^v} d / \sum_{1 \leq k \leq v} E[\text{Log } W_k(1 - W_k)].$$

De plus, si $v = d$, tout borélien F de dimension $< D$ est presque sûrement de μ -mesure 0.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. L. Adler and L. Flatto, *Uniform distribution of Kakutani's interval splitting procedure*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 38 (1977), p. 253–259.
- [2] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley.
- [3] D. A. Darling, *On a class of problems related to random subdivision of an interval*, Annals of Mathematical Statistics 24 (1953), p. 239–253.
- [4] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley.
- [5] S. Kakutani, *A problem of equidistribution on the unit interval [0, 1]*, Proceedings of Oberwolfach Conference on Measure Theory. Springer-Verlag (1976).
- [6] J. R. Kinney and T. S. Pitcher, *The dimension of the support of a random distribution function*, Bulletin of the American Mathematical Society 70 (1964), p. 161–164.
- [7] J. C. Lootgieter, *Sur une conjecture de L. E. Dubins*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (à paraître).

- [8] B. B. Mandelbrot, *Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences 278 (1974), p. 289–292.
- [9] J. Peyrière, *Calculs de dimensions de Hausdorff*, Duke Mathematical Journal 44 (1977), p. 591–604.
- [10] —, *A singular random measure generated by splitting $[0, 1]$* , Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 47 (1979), p. 289–297.
- [11] C. Tricot, Jr., *Sur la classification des ensembles boréliens de mesure de Lebesgue nulle*, Thèse no. 1921, Univ. Genève (1980).
- [12] W. R. Van Zwet, *A proof of Kakutani's conjecture on random subdivision of longest interval*, Annals of Mathematical Statistics 26 (1955), p. 532–536.
- [13] R. F. Voss, Communication personnelle.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (UA 757)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (BÂT. 425)
91405 ORSAY CEDEX

Reçu par la Rédaction le 12. 03. 1984
