COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVI DÉDIÉ À M. FRANCISZEK LEJA 1967

FUNKTIONALE DER VOLUMENMESSUNG

VON

W. MAIER UND A. EFFENBERGER (JENA)

Unter den Problemen der nichteuklidischen Geometrie fand die Frage nach der Inhaltsbestimmung von Polytopen noch keine erschöpfende Beantwortung. Wird in einem n-dimensionalen euklidischen Raum eine Hyperkugel vom Halbmesser 1 durch die Vektorgleichung $\mathfrak{x}^2 = 1$ beschrieben, so entsteht auf ihr eine $(n-1)$-dimensionale elliptische Geometrie. Ein n-Tupel von Einheitsvektoren $\mathfrak{x}_\nu$ mit $\nu = 1, \ldots, n$ spannt ein n-dimensionales euklidisches Simplex auf, dessen Volumen $L_n \neq 0$ vorausgesetzt werde. Nach Schläfli [4] kann man bekanntlich dem auf $\mathfrak{x}^2 = 1$ gelegenen nichteuklidischen Simplex, welches durch die Endpunkte von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ bestimmt ist, $(n-1)$-dimensionales Maß (nS_n) zuordnen. Das totale Differential dieses Volumenmaßes wurde als Linearform in Differentialen der Keilwinkel dargestellt (vgl. [3] und [4]). Die noch ausstehende Integration jener Differentialform wurde erst in den letzten Jahren durch Coxeter [2], Böhm [1] und andere wesentlich weitergeführt.

Der in Schläflis letzter Arbeit über unseren Gegenstand entwickelte Ansatz gibt durch die Theorie des Quotienten S_n/L_n einen weiteren Zugang zum Problem der Inhaltsmessung in nichteuklidischen Räumen. Schläfli gab in [4] für S_n/L_n den Ausdruck

$$(1)\qquad \frac{S_n}{L_n} =$$

$$\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,\Gamma\big((n+1)/2+\nu\big)}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-p_1-\ldots-p_n}\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_{ij}^0 p_i p_j\Big)^\nu dp_1\ldots dp_n,$$

wo x_{ij}^0 das Quadrat des euklidisch gemessenen halben Abstandes zwischen den Punkten P_i und P_j bezeichnet. Durch partielle Integration erhält man hieraus die Reihendarstellung

$$(2)\qquad \frac{S_n}{L_n} =$$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sum_{i_{1,2}=0}^{\infty}\cdots\sum_{i_{n-1,n}=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\sum\limits_{\varrho=1}^{n}i_{\varrho 1})\Gamma(1+\sum\limits_{\varrho=1}^{n}i_{\varrho 2})\ldots\Gamma(1+\sum\limits_{\varrho=1}^{n}i_{\varrho n})}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\sum\limits_{\substack{\varrho,\sigma=1\\ \varrho<\sigma}}^{n}i_{\varrho\sigma}\right)}\prod_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu<\nu}}^{n}\frac{(x^0_{\mu\nu})^{i_{\mu\nu}}}{(i_{\mu\nu})!}$$

$$(i_{\mu\nu}=i_{\nu\mu},\ i_{\nu\nu}=0),$$

was man wiederum als Residuensumme des $\binom{n}{2}$-fachen Schleifenintegrals

$$(3)\qquad \frac{S_n}{L_n} = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\Phi(x^0_{12},\ldots,x^0_{n-1,n})$$

$$= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{\binom{n}{2}}\int_{\infty}^{0+}\cdots\int_{\infty}^{0+}\prod_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu<\nu}}^{n} dt_{\mu\nu}\Gamma(-t_{\mu\nu})(-x^0_{\mu\nu})^{t_{\mu\nu}}\frac{\prod\limits_{\sigma=1}^{n}\Gamma(1+\sum\limits_{\varrho=1}^{n}t_{\varrho\sigma})}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\sum\limits_{\substack{\varrho,\sigma=1\\ \varrho<\sigma}}^{n}t_{\varrho\sigma}\right)}$$

erkennt, wobei $t_{\mu\nu}=t_{\nu\mu}$ und $t_{\nu\nu}=0$ gesetzt werden soll. Wir trachten nun danach, mit Hilfe der beiden Formeln

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0+}\frac{\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(c+t)}(-z)^t dt$$

$$= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-b)}\int_0^1 ds\cdot s^{b-1}(1-s)^{c-b-1}(1-sz)^{-a}$$

mit $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ und $0 < \operatorname{arc}(z-1) < 2\pi$,

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0+}\Gamma(a+u)\Gamma(-u)w^u du = \Gamma(a)\cdot(1+w)^{-a}$$

möglichst viele Integrationen in (3) auszuführen.

Im ersten Schritt setzen wir in (3)

$$t_{n-1,n}=t,\qquad 1+\sum_{\varrho=1}^{n-2}t_{\varrho,n-1}=a,\qquad 1+\sum_{\varrho=1}^{n-2}t_{\varrho n}=b$$

und wenden (4) an. Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge setzen wir nacheinander

$$t_{\nu n} = u, \quad 1 + \sum_{\varrho=1}^{n} t_{\varrho\nu} = a \qquad (\nu = 1, \ldots, n-2)$$

mit jeweiliger Anwendung von (5). Wird in den drei Zeigern $\{g, \mu, \nu\}$, $g = 0, 1, \ldots,$ als Kürzung eingeführt

$$x_{\mu\nu}^{g} = \frac{1-s_g}{(1-x_{\mu,n-g+1}^{g-1} s_g)\cdot(1-x_{\nu,n-g+1}^{g-1} s_g)} \cdot x_{\mu\nu}^{g-1} \tag{6}$$

mit der stets erfüllten Ungleichung $x_{\mu\nu}^{g} < 1$, so lautet das für $n = 3$ entstehende Ergebnis

$$\Phi(x_{12}^0, x_{13}^0, x_{23}^0) \tag{7}$$

$$= \int_0^1 \frac{ds_1}{(1-x_{13}^0 s_1)(1-x_{23}^0 s_1)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{0^+} dt_{12} \Gamma(-t_{12})(-x_{12}^1)^{t_{12}} \frac{\Gamma(1+t_{12})^2}{\Gamma(1+t_{12})}$$

$$= \int_0^1 \frac{ds_1}{(1-x_{13}^0 s_1)(1-x_{23}^0 s_1) - x_{12}^0(1-s_1)}$$

Für $n > 3$ lassen sich (4) und (5) auf die gleiche Weise nochmals anwenden:

$$t_{n-2,n-1} = t, \quad 1 + \sum_{\varrho=1}^{n-3} t_{\varrho,n-2} = a, \quad 1 + \sum_{\varrho=1}^{n-3} t_{\varrho,n-1} = b$$

nebst (4) und

$$t_{\nu,n-1} = u, \quad 1 + \sum_{\varrho=1}^{n-1} t_{\varrho,\nu} = a \qquad (\nu = 1, \ldots, n-3)$$

mit mehrmaliger Anwendung von (5). Nach diesem weiteren Reduktionsschritt und (6) ergibt sich für $n = 5$

$$\Phi(x_{12}^0, \ldots, x_{45}^0) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \frac{1-s_1}{\prod_{\varkappa=1}^{3}(1-x_{\varkappa 4}^1 s_2) \prod_{\lambda=1}^{4}(1-x_{\lambda 5}^0 s_1)} \times \tag{8}$$

$$\times \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^3 \int_{\infty}^{0^+} \int_{\infty}^{0^+} \int_{\infty}^{0^+} \prod_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu<\nu}}^{3} dt_{\mu\nu} \Gamma(-t_{\mu\nu})(-x_{\mu\nu}^2)^{t_{\mu\nu}} \frac{\prod_{\sigma=1}^{3} \Gamma\left(1+\sum_{\varrho=1}^{3} t_{\varrho\sigma}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{\substack{\varrho,\sigma=1\\ \varrho<\sigma}}^{3} t_{\varrho\sigma}\right)}.$$

Hier läßt sich das reelle Integral (4) wegen der Zusatzbedingung $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ nicht weiter einführen. Wenn wir jedoch im Integral bezüglich t_{12} das Residuum bei 0 abspalten und die Schleife nur noch um den Punkt 1 herum legen, lassen sich (4) und (5) in der beschriebenen Weise weiter verwerten [5]. Nach diesem dritten Schritt erhalten wir z.B. im Sonderfall $n = 5$

$$\Phi_5 \mathrel{\overline{\cdot}} \Phi(x_{12}^0, \ldots, x_{45}^0) = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \prod_{\nu=1}^{2} \frac{(1-s_\nu)^{2-\nu}}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{5-\nu} (1-x_{\varkappa,6-\nu}^{\nu-1} s_\nu)} \cdot \prod_{\mu=1}^{2} \frac{1}{1-x_{\mu 3}^2} +$$

$$+ \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \int_0^1 ds_3 \prod_{\nu=1}^{3} \frac{(1-s_\nu)^{2-\nu}}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{5-\nu} (1-x_{\varkappa,6-\nu}^{\nu-1} s_\nu)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_\infty^{1^+} dt_{12} \Gamma(-t_{12})(-x_{12}^3)^{t_{12}} \frac{\Gamma(1+t_{12})^2}{\Gamma(t_{12})},$$

$$\Phi_5 = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \prod_{\nu=1}^{2} \frac{(1-s_\nu)^{2-\nu}}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{5-\nu} (1-x_{\varkappa,6-\nu}^{\nu-1} s_\nu)} \times \tag{9}$$

$$\times \left[x_{12}^2 \int_0^1 \frac{ds_3}{[(1-x_{13}^2 s_3)(1-x_{23}^2 s_3) - x_{12}^2(1-s_3)]^2} + \prod_{\mu=1}^{2} \frac{1}{1-x_{\mu 3}^2} \right].$$

Es fällt die Ähnlichkeit des inneren Integrals in (9) mit der Funktion

$$\Phi_3 \mathrel{\overline{\cdot}} \Phi(x_{12}^2, x_{13}^2, x_{23}^2)$$

auf: In (9) steht der gleiche Integrand quadriert. Wir wollen deshalb versuchen, das innere Integral in (9) durch eine Kombination von Φ_3 und den partiellen Ableitungen nach den Parametern auszudrücken. Es gilt

$$\Phi_3 = \int_0^1 ds_3 \frac{(1-x_{13}^2 s_3)(1-x_{23}^2 s_3) - x_{12}^2(1-s_3)}{[(1-x_{13}^2 s_3)(1-x_{23}^2 s_3) - x_{12}^2(1-s_3)]^2},$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_{12}^2} = \int_0^1 ds_3 \frac{1-s_3}{[(1-x_{13}^2 s_3)(1-x_{23}^2 s_3) - x_{12}^2(1-s_3)]^2},$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_{13}^2} = \int_0^1 ds_3 \frac{(1-x_{23}^2 s_3) \cdot s_3}{[(1-x_{13}^2 s_3)(1-x_{23}^2 s_3) - x_{12}^2(1-s_3)]^2},$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_{23}^2} = \int_0^1 ds_3 \frac{(1-x_{13}^2 s_3) \cdot s_3}{[(1-x_{13}^2 s_3)(1-x_{23}^2 s_3) - x_{12}^2(1-s_3)]^2}.$$

Wir bilden den Ausdruck

$$\Phi_3+(x_{12}^2-x_{13}^2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_{12}^2}+x_{13}^2\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_{13}^2}+\Phi_3+(x_{12}^2-x_{23}^2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_{12}^2}+x_{23}^2\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_{23}^2}$$
$$=(2-x_{13}^2-x_{23}^2)\int\limits_0^1\frac{ds_3}{[(1-x_{13}^2s_3)(1-x_{23}^2s_3)-x_{12}^2(1-s_3)]^2}.$$

Setzen wir dies in (9) ein, so folgt abschließend

$$\Phi_5=\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\prod_{\nu=1}^{2}\frac{(1-s_\nu)^{2-\nu}}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{5-\nu}(1-x_{\varkappa,6-\nu}^{\nu-1}s_\nu)}\times \tag{10}$$
$$\times\left[\frac{x_{12}^2}{2-x_{13}^2-x_{23}^2}\left\{\begin{aligned}&\Phi_3+(x_{12}^2-x_{13}^2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_{12}^2}+x_{13}^2\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_{13}^2}+\\&+\Phi_3+(x_{12}^2-x_{23}^2)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_{12}^2}+x_{23}^2\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_{23}^2}\end{aligned}\right\}+\frac{1}{(1-x_{13}^2)(1-x_{23}^2)}\right];$$

die Volumenquotienten Φ_3 und ihre Ableitungen führen demnach nach mehrfacher Integration auf den Quotienten Φ_5 und umgekehrt wird vermöge der Schläflischen Quotienten die Inhaltsbestimmung im R_5 zurückgeführt auf eine solche im R_3.

LITERATURNACHWEIS

[1] J. Böhm, *Zu Coxeters Integrationsmethode in gekrümmten Räumen*, Mathematische Nachrichten 27 (1964), S. 179-213.

[2] H. S. M. Coxeter, *The functions of Schläfli and Lobatchevsky*, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, 6 (1935), S. 13-29.

[3] L. Schläfli, *Gesammelte mathematische Abhandlungen, I*, Basel 1950.

[4] — *Gesammelte mathematische Abhandlungen, III*, Basel 1956.

[5] G. Seifert, *Diplomarbeit*, Jena 1960.

Reçu par la Rédaction le 9. 12. 1965