COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVI DÉDIÉ À M. FRANCISZEK LEJA 1967

ÜBER DIFFERENTIALKOMITANTEN ERSTER ORDNUNG, I

VON

S. GOŁĄB (KRAKÓW)

Einleitung. Der Begriff der Komitante einer geometrischen Größe erschien in der mathematischen Literatur schon lange her, obwohl die ersten exakten Definitionen viel später präzisiert wurden.

Neben den so genannten algebraischen Komitanten ([2], [1]), die man betrachten kann für geometrische Objekte, die in einem Punkte des Raumes erklärt sind, existieren auch Differentialkomitanten, die für Objektfelder definiert sind ([9], [10]).

Das Problem, alle algebraischen bzw. differentiellen Komitanten eines gegebenen Objektfeldes zu bestimmen, ist noch weit von der endgültigen Lösung. Die systematische Theorie der Differentialkomitanten kann als kaum begonnen betrachtet werden, obwohl Schouten und van Dantzig [12] bereits im J. 1935 ausdrücklich die Neuformulierung des Programms für moderne Geometrie als Entwicklung der Komitantentheorie erfaßt haben (1).

Im J. 1959 habe ich mir den Plan gestellt die Differentialkomitanten erster Ordnung für die einfachsten geometrischen Objekte systematisch zu bestimmen. Die ersten (aber nicht systematischen) Spuren dieser Theorie sind in der Monographie [1] zu finden. Im J. 1959 habe ich zugleich [3] das Problem gestellt, den Begriff der Lieschen Ableitung eines Objektfeldes Ω in Bezug auf ein fixiertes Feld von kontravarianten Vektoren v, aus den Differentialkomitanten erster Ordnung vom Paare der Objekte (Ω, v) unter gewissen zusätzlichen Annahmen über die Gestalt der gesuchten Ableitung $\pounds_v \Omega$ abzuleiten. Dieses Problem habe ich mit analytischen Mitteln zu lösen begonnen. Zu gleicher Zeit hat I. Makai das von mir gestellte Problem mit einer anderen Methode angegriffen und ist zu gewissen Resultaten gekommen, die eben im Druck erschienen [11]. Die Methode von Makai ist (wegen ihres algebraischen

(1) Wir lesen dort auf Seite 32: „Es ist ein endliches oder unendliches System von Transformationsgruppen gegeben, sowie gewisse in bezug auf diese Gruppen definierte geometrische Objekte. Es ist die Theorie der Komitanten zu entwickeln".

Charakters) einerseits kürzer und andererseits auch allgemeiner, da sie mit geringeren Regularitätsannahmen auskommt. Es soll aber betont worden, daß die Methode von Makai etwas künstlich ist und gewissermaßen nur dann schneller zum Resultat führt, wenn man von vornherein das Endergebnis erraten kann.

Aus obigem Grunde habe ich auf Publizierung meiner bisjetzigen Resultate in ursprünglicher Fassung verzichtet. Die erwähnte Arbeit von Makai hat jedoch keinen Anspruch auf eine systematische Untersuchung der Differentialkomitanten. Dem Hauptziel folgend, eine neue Definition der Lieschen Ableitung aufzustellen, hat Herr Makai lediglich die Differentialkomitanten erster Ordnung von Paaren der Objekte (Ω, v) bestimmt, wo Ω die einfachsten Objektfelder wie Skalare, Dichten, kontra-und kovariante Vektoren durchläuft.

Inzwischen hat mein Schüler A. Szybiak das von mir gestellte Problem einer axiomatischen Definition der Lieschen Ableitung in gewisser Richtung gelöst [13]. Er geht von zwei Forderungen aus, die der Begriff der Lieschen Ableitung $Ł_v\Omega$ eines Objektfeldes r-ter Klasse in Bezug auf v erfüllen soll und beweist, daß unter diesen Bedingungen die klassische Definition die einzige Lösung ist. Die Forderungen lauten folgendermaßen:

I. $Ł_v\Omega^a = v^i\partial_i\Omega^a + \Psi^a(\Omega; \partial v, \ldots, \partial^r v)$,

II. $\overline{Ł_v\Omega^a} = Ł_v\Omega^b D_b^{\bar{a}}$.

Die kurzen Symbole $\partial^k v$ stehen für die Gesamtheit der partiellen Derivierten

$$\frac{\partial^k v^i}{\partial\xi^{a_1}\ldots\partial\xi^{a_k}}.$$

II stellt nichts anderes dar als die Transformationsformel der Bestimmungszahlen von $Ł_v\Omega^a$, wenn man von einem Koordinatensystem ξ_i zu einem anderen $\bar{\xi}^i$ übergeht. Wenn die Transformationsregel für Ω lautet wie folgt

$$\overline{\Omega^a} = \Phi^a(\Omega; A)$$

(der Buchstabe A steht hier kürzehalber für die Gesamtheit der partiellen Derivierten der Koordinatentransformation), so sind die $D_b^{\bar{a}}$ einfach definiert durch die Formel

$$D_b^{\bar{a}} = \frac{\partial\Phi^a}{\partial\Omega^b}.$$

Es soll bemerkt werden, daß inzwischen auch die Theorie der Differentialkomitanten zweiter Ordnung zu einigen schönen Teilergebnissen geführt hat. Als Beispiel seien die Arbeiten von Walker [16] und Ślebodziński [14] erwähnt.

Neben der Methode von Makai hat mein Schüler Topa [15] auch eine neue Methode entwickelt, die auf das Komitantenproblem angewandt werden kann. Sie ist weniger künstlich, viel allgemeiner, aber noch nicht gänzlich in allen Einzelheiten ausgearbeitet.

Da die Resultate von Makai meinen ursprünglichen Plan vom J. 1959 nicht erschöpfen, so ist das Programm immer aktuell. Ich werde ihm in einer Serie von Artikeln Rechnung tragen. Die vorliegende Arbeit soll die erste aus dieser Folge sein. Einige frühere Ergebnisse [2], [5], [1], die ohne Beweis bzw. in abgekürzter Fassung publiziert worden sind, sind hier in ausgedehnter Form dargestellt.

§ 1. Bezeichnungen. Wegen der Bezeichnungen verweisen wir auf die Monographie [1]. Nichtsdestoweniger führen wir unten die wichtigsten Bezeichnungen kurz ein.

Die Koordinaten des laufenden Punktes werden mit ξ^i bezeichnet. Der Übergang von dem Koordinatensystem (ξ^i) zu einem anderen zulässigen $(\bar{\xi}^i)$ wird mittels der Transformation

$$\bar{\xi}^i = \bar{A}^i(\xi^1, \ldots, \xi^n) \tag{1}$$

erledigt, wobei die Funktionen $\bar{A}^i$ von der Regularitätsklasse $\mathscr{C}^r$ sind $(r \geqslant 1)$ und die Jacobische Determinante J dieser Transformation von Null verschieden ist

$$J = \det \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \xi^k} = \det \bar{A}^i_k \neq 0. \tag{2}$$

Die partiellen Derivierten der reziproken Transformation werden mit A^k_i bezeichnet:

$$A^k_i = \frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i}. \tag{3}$$

Wir setzen weiter (für $r \geqslant 2$):

$$\bar{A}^k_{ij} = \frac{\partial^2 \bar{\xi}^k}{\partial \xi^i \partial \xi^j}, \qquad A^k_{ij} = \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i \partial \bar{\xi}^j}. \tag{14}$$

Es ist klar, daß die Symmetriebedingungen

$$\bar{A}^k_{ij} = \bar{A}^k_{ji}, \qquad A^k_{ij} = A^k_{ji} \tag{5}$$

erfüllt sind.

§ 2. Die Definition einer Komitante. Wegen der Definition der Komitante verweisen wir den Leser auf die Monographie [1]. Es ist schwer festzustellen wo dieses Wort zum ersten Mal gebraucht wurde. Bei Weitzenböck [17] lesen wir auf S. 29 die folgende Erläuterung:

„Alle die hier angeführten Bildungen: Invarianten, Kovarianten, Kontravarianten und Zwischenformen werden zweckmäßig mit dem Sammelbegriff „Komitanten" zusammengefaßt".

Eine Definition die auf dem Begriff des geometrischen Objektes basiert, erscheint zum ersten Mal bei Schouten und van Dantzig [12]. Die Verfasser sagen (S. 31): „darunter verstehen wir (allgemeiner als üblich) ein nur von den gegebenen Objekten abhängiges Objekt".

Seit dem J. 1938 [2] kann dieser Begriff als ein präzis definierter Begriff gelten.

Wir erwähnen noch folgendes:

Ist eine endliche Anzahl k von geometrischen Objekten

$$\underset{1}{\Omega}, \ldots, \underset{k}{\Omega} \tag{6}$$

gegeben, so bildet der Inbegriff aller Komponenten

$$(\underset{1}{\Omega}^{a_1}, \ldots, \underset{k}{\Omega}^{a_k}) \tag{7}$$

offenbar ein geometrisches Objekt, das durch Vereinigung der Objekte (6) entstanden ist. Auf diese Weise kann eine Komitante von mehreren Objekten immer als Komitante des entsprechenden Vereinigungsobjektes angesehen werden [1].

§ 3. Komitanten erster Ordnung eines Skalarfeldes σ. Es sei in einem Gebiete G des Raumes X_n ein Skalarfeld σ gegeben. Bekanntlich ist jede Funktion $f(\sigma)$ wiederum ein Skalarfeld, also eine Komitante (von nullter Ordnung) des Feldes σ.

Setzen wir nun voraus, daß σ von der Klasse $\mathscr{C}^1$ ist. Diese Voraussetzung garantiert uns die Existenz des Gradienten grad σ [4]. Der Gradient stellt ein Feld von kovarianten Vektoren dar, also eine Differentialkomitante erster Ordnung von σ. In diesem Abschnitt werden wir alle Differentialkomitanten erster Ordnung von σ aufsuchen, die entweder Skalarfelder oder Vektorfelder darstellen.

SATZ 1. *Setzen wir voraus, daß*

$$\varrho = F(\sigma; \partial_1\sigma, \ldots, \partial_n\sigma), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial\xi^i}, \tag{8}$$

ein Skalarfeld ist. Bezeichnen wir weiter mit A bzw. B die Menge derjenigen Punkte von G, in welchen grad σ *ein Nullvektor bzw. kein Nullvektor ist. Es existieren dann zwei Funktionen $f(p)$, $g(p)$ so, daß*

$$\varrho = \begin{cases} f(\sigma) & \textit{für} \quad \xi \in A, \\ g(\sigma) & \textit{für} \quad \xi \in B \end{cases} \tag{9}$$

gilt. Umgekehrt, wenn ϱ durch die Relationen (9) *definiert wird, wo f und g ganz beliebig gewählt sind, so ist ϱ eine Differentialkomitante (erster Ordnung) des Feldes σ.*

Beweis. Der Satz ohne Beweis wurde in [5] angegeben. Einen einfachen Beweis gab Aczél in [1]. Aus methodischen Gründen wollen wir hier den ursprünglichen Beweis (der länger, aber nicht so künstlich ist) wiedergeben. Der Beweis stützt sich auf einen Hilfssatz von algebraischer Natur, der sonst ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes ist [7]. Falls die Ableitungen identisch verschwinden, so ist der Satz trivial. Setzen wir also voraus, daß die Menge B nicht leer ist. Ist die Menge A leer, so besagt der Satz, daß es eigentlich keine skalaren Differentialkomitanten erster Ordnung gibt. Im folgenden werden wir also annehmen, daß auch die Menge A nicht leer ist. Wir setzen folglich

$$\begin{aligned} f(\sigma) &\overset{\text{df}}{=} F(\sigma; 0, \ldots, 0), \\ g(\sigma) &\overset{\text{df}}{=} F(\sigma; \mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_n), \end{aligned} \tag{10}$$

wo $\mathring{v}_i = \partial_i \sigma(\mathring{\xi})$ ($\mathring{\xi} \in B$, sonst beliebig). Voraussetzungsgemäß haben wir

$$F(\sigma; v_1, \ldots, v_n) = F(\sigma; A_1^k v_k, \ldots, A_n^k v_k), \tag{11}$$

wobei diese Identität (bei festem v) für alle diejenigen A_i^k erfüllt sein soll, für welche (2) gilt. Insbesondere haben wir

$$F(\sigma; \mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_n) = F(\sigma; A_1^k \mathring{v}_k, \ldots, A_n^k \mathring{v}_k). \tag{12}$$

Es sei $(y_1, \ldots, y_n)$ ein beliebiges System von Zahlen mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 > 0. \tag{13}$$

Wir behaupten, daß es eine Matrix A_i^k mit der Eigenschaft (2) gibt, so daß

$$A_i^k \mathring{v}_k = y_i \tag{14}$$

gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß

$$\mathring{v}_1 \neq 0. \tag{15}$$

Alsdann haben wir

$$A_k^1 = \frac{y_k - \sum_{j=2}^{n} A_k^j \mathring{v}_j}{\mathring{v}_1}. \tag{16}$$

Berechnen wir die Determinante J^{-1} durch die Entwicklung in Bezug auf die Elemente der ersten Spalte

$$\det A_k^i = \sum_{j=1}^{n} A_j^1 \Delta_j, \tag{17}$$

wo Δ_j die entsprechenden algebraischen Minoren bedeuten. Wenn mit β_k kurz die Ausdrücke

$$\beta_k \overset{\text{df}}{=} \sum_{j=2}^{n} A_k^j \overset{\circ}{v}_j \tag{18}$$

bezeichnet werden, so erhalten wir

$$J^{-1} = \det A_k^i = \frac{1}{\overset{\circ}{v}_1} \sum_{k=1}^{n} \Delta_k (y_k - \beta_k). \tag{19}$$

Die rechte Seite von (19) ist bei gegebenen $\overset{\circ}{v}_i$ und y_i ein Polynom der Veränderlichen A_k^i $(i = 2, \ldots, n; k = 1, \ldots, n)$. Wäre dieses Polynom identisch gleich Null, so würden alle seine Koeffizienten gleich Null, was aber auf Grund der Veraussetzung (2) unmöglich ist, und dies bedeutet, daß ein solches System der Werte A_i^k $(k = 2, \ldots, n; i = 1, \ldots, n)$ und also, nach (16), auch der Werte A_i^1 $(i = 1, \ldots, n)$ existiert, für welches die linke Seite in (12) und folglich auch die rechte Seite von Null verschieden ist. Daraus folgt, daß die Funktion $F(\sigma; y, \ldots, y_n)$ für alle Wertesysteme $(y_1, \ldots, y_n)$, für welche (13) gilt, konstant ist und gleich $g(\sigma)$. Der erste Teil des Satzes ist somit bewiesen worden. Der Beweis des zweiten Teiles ist trivial. Bemerken wir, daß falls die Menge A nicht leer ist, und wenn für wenigstens ein ξ der Menge A die Ungleichung $f(\sigma) \neq g(\sigma)$ gilt, so ist die Funktion

$$F(\sigma; y, \ldots, y_n)$$

nicht stetig und dann ist die Komitante ϱ tatsächlich eine Differentialkomitante erster Ordnung. Daraus folgt, daß es keine Skalarkomitanten erster Ordnung gibt, die stetige Funktionen aller $n+1$ Argumente $(\sigma; y_1, \ldots, y_n)$ wären.

Satz 2. *Die allgemeine stetige Differentialkomitante erster Ordnung eines Skalarfeldes σ, die ein Feld von kovarianten Vektoren darstellt, besitzt die Gestalt*

$$k_j = C(\sigma) \partial_j \sigma, \tag{20}$$

wo $C(\sigma)$ eine beliebige Funktion bedeutet.

Beweis. Setzen wir voraus, daß

$$k_j = F_j(\sigma; \partial, \sigma, \ldots, \partial_n \sigma), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

wobei wenigstens eine der Funktionen F_j von mindestens einer der Veränderlichen $y_k = \partial_k \sigma$ abhängt. Aus unseren Annahmen folgt, daß die Transformationsformeln

$$\bar{\sigma} = \sigma, \qquad \partial_{\bar{i}} \bar{\sigma} = A_i^k \partial_k \sigma$$

bestehen, woraus sich für die gesuchten Funktionen F_j folgendes Funktionalgleichungssystem

$$F_j(\bar{\sigma}; \partial_{\bar{1}}\bar{\sigma}, \ldots, \partial_{\bar{n}}\bar{\sigma}) = A_j^k F_k(\sigma; \partial, \sigma, \ldots, \partial_n \sigma) \tag{22}$$

ergibt. Setzen wir den Wert $\sigma = \overset{\circ}{\sigma}$ fest. Dann sei

$$y_j = \partial_j \sigma, \qquad f_j(y_1, \ldots, y_n) \overset{\mathrm{df}}{=} F_j(\overset{\circ}{\sigma}; y_1, \ldots, y_n). \tag{23}$$

Dann nimmt das Gleichungssystem (22) folgende Form an:

$$f_j(A_1^k y_k, \ldots, A_n^k y_k) = A_j^k f_k(y_1, \ldots, y_n), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Um zu beweisen, daß die Funktion $f_1(y_1, \ldots, y_n)$ von den Veränderlichen $y_2, \ldots, y_n$ nicht abhängt, setzen wir in (24)

$$A_1^1 = 1, \qquad A_1^k = 0 \quad \text{für} \quad k = 2, \ldots, n$$

ein. Die erste Gleichung des Systems (24) nimmt dann die Form

$$f_1(y_1, A_2^k y_k, \ldots, A_n^k y_k) = f_1(y_1, \ldots, y_n)$$

an. Durch ein ähnliches Verfahren, wie beim Beweis des Satzes 1 folgert man nun die Existenz eines solchen Systems von Zahlen $A_i^k (k = 1, \ldots, n;$ $i = 2, \ldots, n)$, für welches die Relationen

$$A_i^k y_k = z_i$$

erfüllt sind, vorausgesetzt, daß

$$y_1^2 + \sum_{k=2}^{n} z_k^2 > 0,$$

wo y_i und z_i ganz beliebig sind. Daraus folgt, daß die Funktion f_1 tatsächlich von den Veränderlichen $y_2, \ldots, y_n$ nicht abhängt. In ähnlicher Weise stellt man fest, daß jede Funktion f_j nur von y_j abhängen kann. Das System (24) kann also in folgender einfacherer Form umgeschrieben werden

$$f_j(A_j^k y_k) = A_j^k f_k(y_k), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Bei fixiertem j kann

$$A_j^k = 1 \qquad \text{für} \qquad k = 1, \ldots, n$$

angenommen werden, wonach die Gleichung (25) in

$$f_j(y_1 + \ldots + y_n) = f_1(y_1) + \ldots + f_n(y_n) \tag{26}$$

übergeht. Da j beliebig gewählt wurde und die rechte Seite von (26) von j unabhängig ist, so folgt daraus, daß

$$f_j(y) = f(y) \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n, \tag{27}$$

und somit erfüllt die Funktion $f(y)$ die Funktionalgleichung

$$f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2). \tag{28}$$

Dies ist aber die Cauchy' sche Funktionalgleichung. Da wir die Stetigkeit der Funktionen F_j angenommen haben, was die Stetigkeit von f nach sich zieht, so erhalten wir endlich

$$f(y) = Cy \tag{29}$$

und

$$f_j(y_j) = Cy_j. \tag{30}$$

Daraus bekommen wir

$$F_j(\overset{\circ}{\sigma}; y_1, \ldots, y_n) = Cy_j. \tag{31}$$

C ist bei festem $\overset{\circ}{\sigma}$ eine Konstante. Bei beliebigem σ wird die Konstante C eine Funktion von σ, was zu der gewünschten Formel (20) führt. Umgekehrt stellt $C(\sigma)\partial_j\sigma$ bei beliebigem $C(\sigma)$ eine Differentialkomitante erster Ordnung des Feldes σ dar, die ein Feld von kovarianten Vektoren ist.

Satz 3. *Es existiert keine Differentialkomitante erster Ordnung des Skalarfeldes σ, die ein Feld von kontravarianton Vektoren wäre.*

Beweis. Zwecks Zurückführung ad absurdum nehmen wir an, daß es eine Differentialkomitante erster Ordnung des Feldes σ gibt, die ein Feld von kontravarianten Vektoren darstellt

$$k^j = F^j(\sigma; \partial, \sigma, \ldots, \partial_n\sigma). \tag{32}$$

Das Skalarfeld

$$\varrho \overset{\mathrm{df}}{=} k^j \partial_j \sigma \tag{33}$$

ist folglich eine Skalarkomitante erster Ordnung und besitzt auf Grund des Satzes 1 die Form

$$\varrho = \begin{cases} g(\sigma) & \text{für} \quad \partial_j\sigma = 0, \\ h(\sigma) & \text{für} \quad \operatorname{grad}\sigma \neq 0. \end{cases}$$

Daraus folgt erstens

$$g(\sigma) \equiv 0$$

und zweitens

$$h(\sigma) = \partial_j\sigma, F^j(\sigma; \partial_1\sigma, \ldots, \partial_n\sigma) \quad \text{für} \quad \sum_{j=1}^{n} (\partial_j\sigma)^2 > 0.$$

Fixieren wir den Wert $\sigma = \sigma_0$ und setzen

$$y_j = \partial_j \sigma, \qquad C = h(\sigma_0).$$

Dann erhalten wir

$$y_j F^j(\overset{\circ}{\sigma}; y_1, \ldots, y_n) = C.$$

Da für y_j bzw. F^j die folgenden Transformationsformeln bestehen,

$$\bar{y}_j = A_j^k y_k, \qquad \bar{F}^j = \bar{A}_k^j F^k,$$

so muß die folgende Funktionalgleichung erfüllt sein:

$$A_j^k y_k \bar{A}_i^j F^i(\sigma_0; A_1^k y_k, \ldots, A_n^k y_k) = C$$

oder, wegen der Relationen $A_j^k \bar{A}_i^j = \delta_i^k$, die Gleichung

$$y_i F^i(\sigma_0; A_1^k y_k, \ldots, A_n^k y_k) = C.$$

Wir wissen aber, daß durch entsprechende Wahl der Parameter A_i^k für $A_i^k y_k$ (mit $\Sigma(y_k)^2 > 0$) beliebige Werte angegeben werden können. Daraus folgt aber, daß F^j von den $y_1, \ldots, y_n$ nicht abhängen, entgegen der Voraussetzung, und damit ist der Satz bewiesen.

§ 4. Differentialkomitanten erster Ordnung von Dichten. Es sei ein Feld $\mathfrak{G}$ von G-bzw. W-Dichten vom Gewicht $(-p)$ gegeben

$$\bar{\mathfrak{G}} = \varepsilon |J|^p \cdot \mathfrak{G}, \tag{34}$$

wo

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad W\text{-Dichten}, \\ \operatorname{sgn} J & \text{für} \quad G\text{-Dichten}. \end{cases} \tag{35}$$

Nach Makai [11] gibt es keine Differentialkomitanten erster Ordnung von $\mathfrak{G}$, die ein Objekt erster Klasse darstellen.

Es können aber Differentialkomitanten erster Ordnung existieren, die ein geometrisches Objekt zweiter Klasse darstellen. Es existieren tatsächlich solche Komitanten. Z.B. (vgl. [2], S. 143 u. 144), wenn

$$\Omega_i \overset{\text{df}}{=} \Gamma \partial_i \log |\mathfrak{G}| \qquad (\Gamma = \text{Const}) \tag{36}$$

gesetzt wird, so bilden Ω_i eine Differentialkomitante erster Ordnung von $\mathfrak{G}$, die ein geometrisches Objekt zweiter Klasse ist mit der Transformationsformel

$$\bar{\Omega}_i = A_i^k \Omega_k + p \Gamma A_i^k \partial_k \log |J|. \tag{37}$$

Man bestätigt ohne Schwierigkeit, daß obige Transformationsformel die Gruppeneigenschaft besitzt und folglich Transformationsformel eines geometrischen Objektes darstellt. Es ist ein Objekt mit n (Anzahl der

Dimension) Komponenten und offenbar zweiter Klasse, da im Ausdruck $\partial_k \log|J|$ die zweiten Ableitungen A_{ij}^k stecken. Die Transformationsformel stimmt sonst überein mit derjenigen des kontrahierten Objektes des affinen Zusammenhanges, das noch mit $(-p\Gamma)$ multipliziert wird

$$-p\Gamma\Gamma_{ik}^k. \tag{38}$$

Man kann auch eine andere Differentialkomitante erster Ordnung von $\mathfrak{G}$ angeben, die sonst auch zweiter Klasse ist. Sie besitzt $n+1$ Komponenten und sie stellt ein so genanntes halbzusammengesetztes Objekt dar [8]. Wir setzen einfach

$$\Omega_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{g}, \qquad \Omega_i \overset{\mathrm{df}}{=} \partial_i \mathfrak{g}. \tag{39}$$

Ω_0 ist für sich ein geometrisches Objekt (erster Klasse). $\partial_i \mathfrak{g}$ stellen für sich kein geometrisches Objekt dar, da die Transformationsformel von $\partial_i \mathfrak{g}$ folgendermaßen lautet

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{k}} \bar{\mathfrak{g}} &= A_k^i \partial_i \bar{\mathfrak{g}} = A_k^i \partial_i [\varepsilon |J|^p \mathfrak{g}] = \varepsilon A_k^i \partial_i [\mathfrak{g} |J|^p] \\ &= \varepsilon A_k^i \{|J|^p \partial_i \mathfrak{g} + p\,|J|^{p-1} \operatorname{sgn} J,\, \mathfrak{g},\, \partial_i J\} = \varepsilon |J|^p A_k^i [\partial_i \mathfrak{g} + p \mathfrak{g} \partial_i \log|J|]. \end{aligned} \tag{40}$$

Die rechte Seite enthält außer $\partial_i \mathfrak{g}$ und außer der Paramater der Koordinatentransformation auch $\mathfrak{g}$, woras folgt, daß $\partial_i \mathfrak{g}$ *kein* geometrisches Objekt bilden. Nichtsdestoweniger besitzt die Transformationsformel (40) die Gruppeneigenschaft. Wir wollen das beweisen. Zu diesem Zweck nehmen wir noch ein drittes Koordinatensystem $\bar{\bar{\xi}}^i$ und bezeichnen dementsprechend die partiellen Derivierten

$$B_k^i = \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \bar{\bar{\xi}}^k}, \qquad C_k^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \bar{\bar{\xi}}^k}.$$

Es gelten folgende wohlbekannte Beziehungen

$$C_k^i = A_j^i B_k^j.$$

Außerdem, wenn

$$J^{-1} = \det A_k^i, \qquad J_1^{-1} = \det B_k^i, \qquad J_2^{-1} = \det C_k^i$$

gesetzt wird, so haben wir

$$J_2 = J \cdot J_1.$$

Wir haben also einerseits

$$\partial_{\bar{k}} \bar{\mathfrak{g}} = \varepsilon |J|^p A_k^i \{\partial_i \mathfrak{g} + p \mathfrak{g} \partial_i \log|J|\}, \tag{41}$$

andererseits

$$\partial_{\bar{\bar{k}}}\bar{\bar{\mathfrak{g}}} = \varepsilon_1 |J_1|^p B^i_k \{\partial_{\bar{i}}\bar{\mathfrak{g}} + p\bar{\mathfrak{g}}\partial_{\bar{i}}\log|J_1|\}, \tag{42}$$

und es ist zu beweisen, daß aus diesen zwei Formeln die dritte

$$\partial_{\bar{\bar{k}}}\bar{\bar{\mathfrak{g}}} = \varepsilon_2 |J_2|^p C^i_k \{\partial_i\mathfrak{g} + p\mathfrak{g}\partial_i\log|J_2|\} \tag{43}$$

folgt. Setzen wit die rechte Seite von (41) in die Gleichung (42) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{\bar{k}}}\bar{\bar{\mathfrak{g}}} &= \varepsilon_1 |J_1|^p B^i_k \{\varepsilon|J|^p A^j_i(\partial_j\mathfrak{g} + p\mathfrak{g}\partial_j\log|J|) + p\varepsilon|J|^p\mathfrak{g}\partial_{\bar{i}}\log|J_1|\} \\ &= \varepsilon\varepsilon_1|J_1|^p|J|^p\{B^i_kA^j_i(\partial_j\mathfrak{g} + p\mathfrak{g}\partial_j\log|J|) + p\mathfrak{g}B^i_k\partial_{\bar{i}}\log|J_1|\}.\end{aligned}$$

Aber es gilt

$$B^i_k\partial_{\bar{i}} = \frac{\partial\bar{\xi}^i}{\partial\bar{\bar{\xi}}^k}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}^i} = \frac{\partial}{\partial\bar{\bar{\xi}}^k}, \qquad B^i_kA^j_i = C^j_k$$

und folglich erhalten wir

$$\partial_{\bar{\bar{k}}}\bar{\bar{\mathfrak{g}}} = \varepsilon\varepsilon_1|J_2|^p\{C^j_k(\partial_j\mathfrak{g} + p\mathfrak{g}\partial_j\log|J|) + p\mathfrak{g}\partial_{\bar{\bar{k}}}\log|J_1|\}.$$

Es ist weiter

$$C^j_k\partial_j = \frac{\partial\xi^j}{\partial\bar{\bar{\xi}}^k}\partial_j = \frac{\partial}{\partial\bar{\bar{\xi}}^k},$$

was zu

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{\bar{k}}}\bar{\bar{\mathfrak{g}}} &= \varepsilon\varepsilon_1|J_2|^p\{C^j_k[\partial_j\mathfrak{g} + p\mathfrak{g}\partial_j\log|J| + p\mathfrak{g}\partial_j\log|J_1|]\} \\ &= \varepsilon\varepsilon_1|J_2|^p\{C^j_k(\partial_j\mathfrak{g} + p\mathfrak{g}\partial_j\log|J_2|)\}\end{aligned}$$

führt. Endlich bemerken wir, daß

$$\varepsilon = \begin{cases}1, \\ \operatorname{sgn} J,\end{cases} \qquad \varepsilon_1 = \begin{cases}1, \\ \operatorname{sgn} J_1,\end{cases} \qquad \varepsilon_2 = \begin{cases}1 & \text{für} \quad W\text{-Dichte}, \\ \operatorname{sgn} J_2 & \text{für} \quad G\text{-Dichte}\end{cases}$$

und daß

$$\operatorname{sgn} J_2 = \operatorname{sgn}(J, J_1) = \operatorname{sgn} J \ \operatorname{sgn} J_1$$

ist, woraus

$$\varepsilon_2 = \varepsilon\varepsilon_1$$

für beide Fälle folgt. Damit wurde gezeigt, daß (43) eine Folge von (41) und (42) ist, und so haben wir bewiesen, daß (39) tatsächlich ein geometrisches Objekt zweiter Klasse mit $n+1$ Komponenten darstellt.

Diese zwei Beispiele erschöpfen keineswegs alle Differentialkomitanten erster Ordung und zweiter Klasse einer Dichte. Die Ermittlung der weiteren ist jedoch keine leichte Frage. Auf diese werden wir in einer späteren Arbeit zurückkommen.

LITERATURNACHWEIS

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] S. Gołąb, *Sur quelques points concernant la notion du comitant*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 17 (1938), S. 177-192.

[3] — *Differentialkomitanten und Liesche Ableitungen*, Matematikai Lapok 10 (1959), S. 174.

[4] — *On the notion of gradient. I. Essentiality of regularity suppositions*, Annales Polonici Mathematici 8 (1960), S. 1-4.

[5] — *Sur les comitants scalaires du premier ordre des champs de scalaires*, Matematica 2 (1960), S. 253-255.

[6] — *Sur les comitants algébriques d'un objet de la connexion linéaire tensorielle*, Annali di Matematica Pura e Applicata 54 (1961), S. 13-21.

[7] S. Gołąb und A. Jakubowicz, *Über eine Frage, die der Theorie der Tensoren zugrunde liegt*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego 52 (1965), S. 17-19.

[8] S. Gołąb, A. Jakubowicz, M. Kucharzewski et M. Kuczma, *Sur l'objet géométrique représentant une direction munie d'un sens*, Annales Polonici Mathematici 15 (1964), S. 233-236.

[9] G. F. C. Griss, *Die Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet*, Compositio Mathematica 1 (1934), S. 238-247.

[10] — *Differentialinvarianten von relativen Vektoren*, ibidem 1 (1935), S. 420-428.

[11] I. Makai, *Über Differentialkomitanten erster Ordnung der homogenen linearen geometrischen Objekte in bezug auf ein kontravariantes Vektorfeld*, Publicationes Mathematicae 11 (1964), S. 191-240.

[12] J. A. Schouten und D. van Dantzig, *Was ist Geometrie?*, Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis II-III, Moskau 1935, S. 15-48.

[13] A. Szybiak, *On the Lie derivative of geometric objects from the point of view of functional equations*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego 11 (1966), S. 85-88.

[14] W. Ślebodziński, *Contribution à la géométrie différentielle d'un tenseur mixte de valence deux*, Colloquium Mathematicum 13 (1964), S. 49-54.

[15] S. Topa, *Determination of differential concomitants of the first class of a pair of covariant vectors in 2-dimensional space*, erscheint demnächst in Annales Polonici Mathematici 19 (1967).

[16] A. G. Walker, *Dérivation tensorielle et seconde courbure pour une structure presque complexe*, Comptes Rendus de l'Académie Paris 245 (1957), S. 1213-1215.

[17] R. Weitzenböck, *Invariantentheorie*, Groningen 1923.

Reçu par la Rédaction le 27. 12. 1965