COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVI DÉDIÉ À M. FRANCISZEK LEJA 1967

SUR LA LIMITE DU POTENTIEL LOGARITHMIQUE DE COUCHE DOUBLE ÉTENDUE SUR UNE COURBE VARIABLE

PAR

Z. SZMYDT (KRAKÓW)

J'ai étudié dans mes publications antérieures [1] et [2] les propriétés intégrales du potentiel logarithmique de couche simple et celui de couche double étendues au contour Γ d'un domaine plan simplement connexe Ω. Soit $\{\Gamma_r\}$ une famille, dépendant du paramètre réel r, des courbes disjointes $\Gamma_0 = \Gamma$ et Γ_r, la courbe Γ étant la limite, dans un sens convenable, des courbes Γ_r lorsque r tend à zéro.

Le problème qui va être étudié est celui d'existence de la limite du potentiel logarithmique de couche double (de couche simple) étendue à la courbe Γ_r et de ses dérivées lorsque $r \to 0$. Dans les publications précitées, les courbes Γ_r étaient supposées parallèles à la courbe Γ. Cette hypothèse n'est pourtant pas nécessaire. Je vais démontrer à titre d'exemple (cf. § 3) le théorème concernant le potentiel logarithmique de couche double, analogue au théorème 2 de mon travail [1], mais dans lequel la famille de courbes Γ_r (introduite ici au § 1) ne se compose pas de courbes parallèles. La démonstration sera basée sur les lemmes 3 et 4 du travail [1].

1. NOTATIONS. Une courbe située sur le plan de la variable complexe $z = x+iy$ sera désignée par Γ et dite *courbe simple fermée* lorsqu'il en existe une représentation paramétrique $z = z(s)$ pour $0 \leqslant s \leqslant L$, où

(i) $z(s)$ est une fonction continue avec sa dérivée première $z'(s)$ et périodique de période $L > 0$,

(ii) on a $z(s_1) = z(s_2)$ où $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant L$ si et seulement si $s_1 = 0$ et $s_2 = L$.

Admettons en outre que

$$|z'(s)| = 1 \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant s \leqslant L. \tag{1}$$

La courbe Γ sera dite *de classe* C^n lorsque la fonction périodique $z(s)$ est de classe C^n. Si, en outre, la dérivée $z^{(n)}(s)$ satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant β, où $0 < \beta \leqslant 1$, la courbe Γ sera dite *de classe* C^n_β. La représentation paramétrique $z = z(s)$, où $0 \leqslant s \leqslant L$, de la courbe simple fermée de classe C^n (de classe C^n_β) s'appellera *normale* lorsque la fonction $z(s)$ est de classe C^n et satisfait aux conditions (i)-(ii) et (1).

Dans la suite, ϱ désignera un nombre positif, r un nombre réel arbitraire et m un nombre entier non négatif.

2. LEMME. *Soit Γ: $z = z(s)$, où $0 \leqslant s \leqslant L$, une courbe simple fermée de classe C^1_1. Soit*

$$(2) \qquad w(r, s) = \alpha(r, s) + i\beta(r, s)$$

une fonction continue pour $-\varrho_0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$ où $\varrho_0 > 0$ et périodique de période L par rapport à la variable s, telle que

$$(3) \qquad w(0, s) = iz'(s) \quad \textit{lorsque} \quad 0 \leqslant s \leqslant L$$

et pour laquelle il existe une constante $a > 0$ telle que

$$(4) \qquad |w(r, s) - w(\tilde{r}, \tilde{s})| \leqslant a(|s-\tilde{s}| + |r-\tilde{r}|)$$

lorsque $|r|$ et $|\tilde{r}| \leqslant \varrho_0$ (¹).

Soient A_ϱ le rectangle $|r| \leqslant \varrho, 0 \leqslant s < L$ où $0 < \varrho \leqslant \varrho_0$ et P_ϱ son image par la transformation

$$(5) \qquad z = z(s) + rw(r, s) \quad \textit{où} \quad z = x+iy.$$

Enfin, soit S_ϱ l'arc décrit par le point $z(0)+rw(r, 0)$ lorsque $|r| \leqslant \varrho$.

Alors il existe un nombre positif $\varrho_1 \leqslant \varrho_0$ tel que la transformation (5), continue dans A_{ϱ_1}, a la transformation inverse

$$(6) \qquad r = \lambda(x, y), \quad s = \mu(x, y)$$

définie dans P_{ϱ_1} et continue dans $P_{\varrho_1} \setminus S_{\varrho_1}$.

En admettant en outre que

$$(7) \qquad (x_n, y_n) \in P_{\varrho_1}, \quad r_n = \lambda(x_n, y_n), \quad s_n = \mu(x_n, y_n) \quad \textit{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y) \in S_{\varrho_1} \quad \textit{et} \quad r = \lambda(x, y),$$

la suite $\{(r_n, s_n)\}$ a tout au plus deux points d'accumulation, à savoir $(r, 0)$ et (r, L).

Démonstration. Il est évident que la transformation (5) est continue dans A_{ϱ_0}. Pour établir l'existence de la transformation inverse dans un rectangle A_{ϱ_1} où $\varrho_1 \leqslant \varrho_0$, supposons par l'impossible qu'il existe des suites $\{(r_{1n}, s_{1n})\}$ et $\{(r_{2n}, s_{2n})\}$ telles que

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} r_{1n} = \lim_{n\to\infty} r_{2n} = 0, \quad 0 \leqslant s_{1n} < L, \quad 0 \leqslant s_{2n} < L,$$

$$(9) \qquad (r_{1n}, s_{1n}) \neq (r_{2n}, s_{2n}) \quad \text{et} \quad z(s_{1n}) + r_{1n} w(r_{1n}, s_{1n}) = z(s_{2n}) + r_{2n} w(r_{2n}, s_{2n})$$

pour $n = 1, 2, \ldots$

(¹) Les hypothèses (3) et (4) entraînent à elles seules que la courbe Γ est de classe C^1_1 et que la fonction w est continue.

On peut admettre sans restreindre la généralité que

$$0 \leqslant s_{1n} \leqslant s_{2n} < L \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{1n} = s_1, \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s_2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant L.$$

On a d'après (9) et (5)

$$z(s_{2n}) - z(s_{1n}) + r_{2n} w(r_{2n}, s_{2n}) - r_{1n} w(r_{1n}, s_{1n}) = 0, \tag{11}$$

d'où $z(s_2) = z(s_1)$ en vertu de (8) et (10). L'hypothese (ii), satisfaite par la fonction $z(s)$, entraîne donc l'alternative $s_2 = s_1$ ou bien $s_1 = 0$ et $s_2 = L$. Posons pour $n = 1, 2, \ldots$

$$\Delta_n = \sigma_n + i(r_{2n} - r_{1n})$$

où

$$\sigma_n = \begin{cases} s_{2n} - s_{1n} & \text{lorsque} \quad s_1 = s_2, \\ s_{2n} - L - s_{1n} & \text{lorsque} \quad s_1 = 0,\ s_2 = L. \end{cases}$$

Il est évident que

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0 \quad \text{et} \quad |\Delta_n| > 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

et, vu (3), l'égalité (11) peut être mise sous la forme

$$z'(s_{1n})\sigma_n + (r_{2n} - r_{1n})[w(r_{2n}, s_{2n}) - w(0, s_{1n})] + \tag{13}$$
$$+ i(r_{2n} - r_{1n}) z'(s_{1n}) + r_{1n}[w(r_{2n}, s_{2n}) - w(r_{1n}, s_{1n})] = o(\sigma_n).$$

La fonction $w(r, s)$ ayant été supposée périodique de période L par rapport à la variable s, on déduit de (13), (1), (4) et (12) l'inégalité

$$1 \leqslant a\left\{(|r_{1n}| + |r_{2n}|)\frac{|r_{2n} - r_{1n}|}{|\Delta_n|} + (|r_{1n}| + |r_{2n} - r_{1n}|)\frac{|\sigma_n|}{|\Delta_n|}\right\} + \frac{|o(\sigma_n)|}{|\Delta_n|},$$

ce qui entraîne $1 \leqslant 0$ en vertu de (12). L'existence de la transformation (6), inverse à la transformation (5), considérée dans le rectangle A_{ϱ_1}, est ainsi établie.

Pour achèver la démonstration du lemme admettons en outre les hypothèses (7) et supposons que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$. Soit $r = \lambda(x, y)$,

$$s = \mu(x, y), \quad \text{où} \quad 0 \leqslant s < L.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} [z(s_n) + r_n w(r_n, s_n)] = z(s) + rw(r, s)$$

et chaque point d'accumulation $(\tilde{r}, \tilde{s})$ de la suite $\{(r_n, s_n)\}$ satisfait à l' égalité $z(\tilde{s}) + \tilde{r} w(\tilde{r}, \tilde{s}) = z(s) + rw(r, s)$. Il en résulte que $\tilde{s} = s$ et $\tilde{r} = r$

si $s > 0$, et si $s = 0$ on a ou bien $\tilde{s} = 0$ et $\tilde{r} = r$, ou bien $\tilde{s} = L$ et $\tilde{r} = r$. Le lemme se trouve ainsi complètement démontré.

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du lemme, il existe un nombre $\varrho_1 \leqslant \varrho_0$ tel que toute courbe*

$$(14) \qquad \Gamma_r\colon z = z_r(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant L \text{ où } z_r(s) = z(s)+rw(r, s) \text{ et } |r| \leqslant \varrho_1$$

est fermée et n'a pas de points doubles.

3. THÉORÈME. Avant d'énoncer le théorème concernant le potentiel logarithmique de couche double, faisons correspondre à toute fonction p définie sur la courbe $\Gamma_0 = \Gamma\colon z = z(s)$ où $0 \leqslant s \leqslant L$ une fonction $\tilde{p}(s) = p[z(s)]$ où $-\infty < s < +\infty$ et appelons *p fonction de classe $C^m(\Gamma)$* lorsque la fonction périodique $\tilde{p}(s)$ est de classe C^m. Ceci convenu, prolongeons la fonction p dans l'image P_{ϱ_1} du rectangle A_{ϱ_1} (cf. (5)) de manière à avoir conformément à (14)

$$p[z_r(s)] = p[z(s)] \quad \text{lorsque} \quad 0 \leqslant s \leqslant L \text{ et } |r| \leqslant \varrho_1.$$

Désignons par n_{rz} le vecteur normal au point $z \in \Gamma_r$ dirigé vers l'intérieur du domaine limité par la courbe Γ_r et considérons les potentiels logarithmiques de couche double dus à la densité p

$$v_r(\zeta) = \int_{\Gamma_r} p(z)\frac{\partial}{\partial n_{rz}}\log|z-\zeta|\,ds_{rz}\ \text{(2)} \qquad \text{où} \qquad |r| \leqslant \varrho_1.$$

On a alors le théorème suivant:

Soient $m \geqslant 0$ un entier, $\{\Gamma_r\}$ la famille, dépendant du paramètre r où $|r| \leqslant \varrho_0 > 0$, composée de courbes définies par (14), *la courbe $\Gamma_0 = \Gamma$: $z = z(s)$ où $0 \leqslant s \leqslant L$ étant de classe C^{m+2}. Admettons que la fonction $w(r, s)$ définie par* (2) *est continue lorsque $|r| \leqslant \varrho_0$, périodique de période L par rapport à la variable s et assujettie aux conditions* (3) *et* (4). *Enfin, admettons que les dérivées $(\partial^j/\partial s^j)w(r, s)$, où $j = 1, \ldots, m+1$, existent, sont continues par rapport à s et que pour $r \to 0$*

$$(15) \qquad \frac{\partial^j}{\partial s^j}w(r, s) = O(1) \quad \textit{pour} \quad j = 1, \ldots, m+1.$$

---

(2) Le symbole ds_{rz} employé ici au lieu du symbole ds_r, usuel pour désigner l'élément d'arc de la courbe Γ_r, sert à indiquer que c'est le point z qui varie dans l'intégration. Si $r = 0$, on peut mettre simplement

$$v(\zeta) = v_0(\zeta) = \int_{\Gamma} p(z)\frac{\partial}{\partial n_z}\log|z-\zeta|\,ds_z,$$

car $\Gamma = \Gamma_0$.

Sous ces hypothèses pour chaque $p \in C^m(\Gamma)$ les dérivées tangentielles $(\partial^k/\partial s_\zeta^k) v_0(\zeta)$, où $k = 0, 1, \ldots, m$, existent, sont continues en tout point $\zeta \in \Gamma$ et

$$\lim_{\substack{\varrho\to 0\\ \varrho>0}} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Gamma_{\pm\varrho}} p(z_{\pm\varrho}) \frac{\partial}{\partial n_{\pm\varrho z}} \log|z_{\pm\varrho} - \zeta|\, ds_{\pm\varrho z}$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \{v_0(\zeta) \pm \pi p(\zeta)\} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

uniformément par rapport à $\zeta \in \Gamma$.

Démonstration. L'existence et la continuité des dérivées $\partial^k v_0(\zeta)/\partial s_\zeta^k$ pour $k = 0, 1, \ldots, m$ ont été établies dans mon travail précité (voir [1], p. 295). On n'a à considérer que les nombres r tels que $|r| \leqslant \varrho_1 > 0$ où ϱ_1 est un nombre défini dans le lemme. La suite de la démonstration se ramène alors à celle de la propriété

$$(16) \qquad \lim_{r\to 0} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Gamma_r} [p(z_r) - p(\zeta_r)] \frac{\partial}{\partial n_{rz}} \log|z_r - \zeta|\, ds_{rz}$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} \int_{\Gamma} [p(z) - p(\zeta)] \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z-\zeta|\, ds_z \qquad \text{où} \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

la convergence étant uniforme par rapport à $\zeta \in \Gamma$.

Soit ζ_0 un point arbitraire de la courbe Γ. Il suffit évidemment de montrer que les limites (16) éxistent uniformément dans un arc de Γ contenant ζ_0 et de longueur positive indépendante de ζ_0. Soit $z = z(s)$, où $0 \leqslant s \leqslant L$, la représentation paramétrique normale de la courbe Γ et telle que $\zeta_0 = z(L/2)$. Posons

$$(17) \qquad S(s, \sigma) = \int_0^1 x'[\sigma + \tau(s-\sigma)]\, d\tau, \qquad T(s, \sigma) = \int_0^1 y'[\sigma + \tau(s-\sigma)]\, d\tau,$$

$$R(s, \sigma) = S^2(s, \sigma) + T^2(s, \sigma).$$

On a alors

$$(18) \qquad |z(s) - z(\sigma)|^2 = R(s, \sigma)(s-\sigma)^2$$

et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(19) \qquad R(s, \sigma) \geqslant c$$

dans le rectangle

$$(20) \qquad 0 \leqslant s \leqslant L, \qquad L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5.$$

Il résulte de (17), (18) et (2) que

$$|z_r(s)-z(\sigma)|^2 = R(s,\sigma)(s-\sigma)^2+2r(s-\sigma)X(r,s,\sigma)+r^2|w(r,s)|^2, \tag{21}$$

où

$$X(r,s,\sigma) = S(s,\sigma)\alpha(r,s)+T(s,\sigma)\beta(r,s). \tag{22}$$

En vertu de (1)-(4) et (19)-(22), il existe des constantes ϱ_2 et c_1 assujetties aux conditions $0<\varrho_2\leqslant\varrho_1$, $c_1>0$ et

$$|z_r(s)-z(\sigma)|^2 \geqslant c_1[(s-\sigma)^2+r^2] \text{ dans l'ensemble (20) pour } |r|\leqslant\varrho_2. \tag{23}$$

Il est aisé à constater qu'il existe une fonction $Q(s,\sigma)$ de classe C^m telle que $-y'(s)S(s,\sigma)+x'(s)T(s,\sigma) = Q(s,\sigma)(s-\sigma)$. Compte tenu de ce que $z_r(s) = z(s)+rw(r,s)$, remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial n_{rz}}\log|z_r-\zeta| = \frac{[x(s)+r\alpha(r,s)-x(\sigma)][-y'(s)-r\beta_s(r,s)]}{|z_r(s)-z(\sigma)|^2|z_s'(r,s)|}+ \tag{24}$$

$$+\frac{[y(s)+r\beta(r,s)-y(\sigma)][x'(s)+r\alpha_s(r,s)]}{|z_r(s)-z(\sigma)|^2|z_s'(r,s)|},$$

et posons

$$\begin{cases} U(r,s,\sigma) = T(s,\sigma)\alpha_s(r,s)-S(s,\sigma)\beta_s(r,s), \\ V(r,s) = -\alpha(r,s)y'(s)+\beta(r,s)x'(s), \\ W(r,s) = \beta(r,s)\alpha_s(r,s)-\alpha(r,s)\beta_s(r,s). \end{cases} \tag{25}$$

Vu (24), (21) et (25), il est aisé à vérifier que pour établir la propriété (16), il suffit de démontrer la suivante:

$$\lim_{r\to 0}\frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L[\tilde{p}(s)-\tilde{p}(\sigma)]\frac{Q(s-\sigma)^2+r(s-\sigma)U+rV+r^2W}{R(s-\sigma)^2+2r(s-\sigma)X+r^2|w|^2}ds \tag{26}$$

$$= \frac{d^k}{d\sigma^k}\int_0^L[\tilde{p}(s)-\tilde{p}(\sigma)]\frac{Q(s,\sigma)}{R(s,\sigma)}ds \quad \text{pour} \quad k=0,1,\ldots,m$$

uniformément par rapport à σ dans l'intervalle fermé $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$. La démonstration de (26) est par ailleurs analogue à celle du lemme 5 de mon travail [1].

Soient

(27) $$M_1(r, s) = V(r, s), \qquad M_2(r, s) = |w(r, s)|^2,$$

(28) $$\begin{cases} N_1(r, s, \sigma) = K_1(s, \sigma) = [\tilde{p}(s) - \tilde{p}(\sigma)]Q(s, \sigma), \\ N_2(r, s, \sigma) = K_2(s, \sigma) = R(s, \sigma), \\ N_3(r, s, \sigma) = X(r, s, \sigma), \\ N_4(r, s, \sigma) = [\tilde{p}(s) - \tilde{p}(\sigma)]\, U(r, s, \sigma), \\ N_5(r, s, \sigma) = [\tilde{p}(s) - \tilde{p}(\sigma)] W(r, s), \end{cases}$$

(29) $$\begin{aligned} P_1(r, s, \sigma) &= N_1(s-\sigma)^2 + r(s-\sigma)N_4 + r^2 N_5 + r[\tilde{p}(s) - \tilde{p}(\sigma)]M_1, \\ P_2(r, s, \sigma) &= N_2(s-\sigma)^2 + 2r(s-\sigma)N_3 + r^2 M_2. \end{aligned}$$

On a

(30) $$P_2(r, s, \sigma) = |z_r(s) - z(\sigma)|^2$$

et la propriété (26) qu'il s'agit de montrer prend la forme

(31) $$\begin{aligned} &\lim_{r \to 0} \frac{d^k}{d\sigma^k} \int_0^L \frac{P_1(r, s, \sigma)}{P_2(r, s, \sigma)}\, ds \\ &= \frac{d^k}{d\sigma^k} \int_0^L [\tilde{p}(s) - \tilde{p}(\sigma)] \frac{Q(s, \sigma)}{R(s, \sigma)}\, ds \qquad \text{pour} \qquad k = 0, 1, \ldots, m \end{aligned}$$

uniformément par rapport à σ dans l'intervalle $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$.

Soient

(32) $$\begin{aligned} &M_{\nu 0}(r, s) = M_\nu(r, s), \qquad M_{\nu j}(r, s) = \frac{\partial M_{\nu, j-1}}{\partial s} \qquad \text{pour} \qquad \nu = 1, 2, \\ &N_{\nu 0}(r, s, \sigma) = N_\nu(r, s, \sigma), \qquad N_{\nu j} = \frac{\partial N_{\nu, j-1}}{\partial s} + \frac{\partial N_{\nu, j-1}}{\partial \sigma} \\ &\hspace{20em} \text{pour} \qquad \nu = 1, \ldots, 5, \\ &P_{\nu 0}(r, s, \sigma) = P_\nu(r, s, \sigma), \qquad P_{\nu j} = \frac{\partial P_{\nu, j-1}}{\partial s} + \frac{\partial P_{\nu, j-1}}{\partial \sigma} \\ &\hspace{20em} \text{pour} \qquad \nu = 1, 2 \end{aligned}$$

où $j = 1, \ldots, m$.

On vérifie aisément que, dans l'intervalle fermé $L/5 \leqslant \sigma \leqslant 4L/5$,

(33) $$\frac{P_{\nu j}(r, L, \sigma)}{P_{20}(r, L, \sigma)} = \frac{P_{\nu j}(r, 0, \sigma)}{P_{20}(r, 0, \sigma)} \qquad \text{pour} \qquad 0 < |r| \leqslant \varrho_2 \text{ et } \nu = 1, 2,$$

(34) $$\frac{K_{\nu j}(L, \sigma)}{K_{20}(L, \sigma)} = \frac{K_{\nu j}(0, \sigma)}{K_{20}(0, \sigma)} \qquad \text{pour} \qquad \nu = 1, 2$$

où $j = 0, 1, \ldots, m$ (cf. (28)).

Il résulte de (23) et (30) que

$$(35)\qquad P_2(r,s,\sigma)\geqslant c_1r^2>0 \text{ dans le rectangle (20) si } 0<|r|<\varrho_2.$$

En vertu de (33), (35) et du lemme 3 de [1], il existe des constantes $A^j_{a_1\ldots a_k}$, indépendantes des fonctions P_1 et P_2, et telles que

$$(36)\qquad \frac{d^k}{d\sigma^k}\int\limits_0^L \frac{P_1(r,s,\sigma)}{P_2(r,s,\sigma)}ds=\int\limits_0^L \varphi(r,s,\sigma;k)ds \quad \text{lorsque} \quad L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$$

pour $k=0,1,\ldots,m$ et $0<|r|\leqslant\varrho_2$ où

$$\varphi(r,s,\sigma;0)=\varphi(r,s,\sigma)=P_1(r,s,\sigma)/P_2(r,s,\sigma),$$

$$(37)\qquad \varphi(r,s,\sigma;k)=\sum_{j=0}^{k}\sum_{a_1\ldots a_k}A^j_{a_1\ldots a_k}\frac{P_{1j}}{P_{20}}\left(\frac{P_{21}}{P_{20}}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{P_{2k}}{P_{20}}\right)^{a_k}$$

dans l'ensemble (20) lorsque $0\leqslant a_i\leqslant k$ pour $i=1,\ldots,k$ et $a_1+2a_2+\ldots+$ $+ka_k=k-j$ [4].

Les fonctions $P_{1j}(r,s,\sigma), P_{2j}(r,s,\sigma)$ où $j=0,1,\ldots,m$ étant aussi définies pour $r=0$, il est évident que le membre droit de (37) définit pour $r=0$ des fonctions des variables s et σ dans l'ensemble $-\infty<s<\infty$, $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$, où $s\neq\sigma\pm nL$ pour $n=0,1,\ldots$, et pour $k=0,1,\ldots,m$. Ces fonctions seront désignées dans la suite par $\varphi(0,s,\sigma;k)$.

En vertu de (34), (28), (19) et du lemme 3 de [1], on a dans l'intervalle fermé $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$

$$\frac{d^k}{d\sigma^k}\int\limits_0^L [\tilde{p}(s)-\tilde{p}(\sigma)]\frac{Q(s,\sigma)}{R(s,\sigma)}ds=\int\limits_0^L\varphi(0,s,\sigma;k)ds \quad \text{pour} \quad k=0,1,\ldots,m.$$

Pour que (31) soit démontré, il ne reste donc qu'à démontrer (cf. (36)) que

$$(38)\qquad \lim_{r\to 0}\int\limits_0^L\varphi(r,s,\sigma;k)ds=\int\limits_0^L\varphi(0,s,\sigma;k)ds \qquad \text{pour} \qquad k=0,1,\ldots,m$$

uniformément dans l'intervalle fermé $L/5\leqslant\sigma\leqslant 4L/5$.

Or vu (29) et (32), il est facile de vérifier qu'il existe des constantes a_{ij} où $i=0,\ldots,j$, $j=0,\ldots,m$, $a_{mm}=1$ et

$$(39)\qquad \begin{aligned} P_{1j}(r,s,\sigma)&=N_{1j}(s-\sigma)^2+r(s-\sigma)N^*_{4j}+r^2N_{5j} \qquad \text{pour} \qquad j<m,\\ P_{1m}(r,s,\sigma)&=P^*_{1m}(r,s,\sigma)+r[\tilde{p}^{(m)}(s)-\tilde{p}^{(m)}(\sigma)]M_{10}(r,s)\end{aligned}$$

---

[4] Les valeurs numériques des constantes $A^j_{a_1\ldots a_k}$ et leur nombre ne jouent ici aucun rôle. Il importe uniquement que les constantes soient finies et que, pour chaque k, le membre droit de (37) ait un nombre fini de termes.

où

$$
(40)\quad
\begin{cases}
N_{4j}^{*}(r,s,\sigma) = N_{4j} + \sum\limits_{i=0}^{j} a_{ij} M_{1j-i} \int\limits_{0}^{1} \tilde{p}^{(i+1)}[\sigma+\tau(s-\sigma)]\,d\tau & \text{pour} \quad j < m, \\
N_{4m}^{*}(r,s,\sigma) = N_{4m} + \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_{im} M_{1,m-1-i} \int\limits_{0}^{1} \tilde{p}^{(i+1)}[\sigma+\tau(s-\sigma)]\,d\tau, & \\
P_{1m}^{*}(r,s,\sigma) = N_{1m}(s-\sigma)^2 + r(s-\sigma) N_{4m}^{*} + r^2 N_{5m}. &
\end{cases}
$$

L'hypothèse (15) entraîne l'existence d'un $C > 0$ tel que les conditions

$$
(41)\quad
\begin{cases}
|N_{\nu j}(r,s,\sigma)| \leqslant C \ \text{dans l'ensemble (20) pour}\ \nu = 1,2,3,5, \\
|N_{4j}^{*}(r,s,\sigma)| \leqslant C \ \text{dans l'ensemble (20)}, \\
|M_{\nu j}(r,s)| \leqslant C \ \text{dans l'intervalle fermé}\ 0 \leqslant s \leqslant L \ \text{pour}\ \nu = 1,2
\end{cases}
$$

sont satisfaites lorsque $|r| \leqslant \varrho_2$ et $j = 0, 1, \ldots, m$. En vertu de (39)-(41) et (29) on a

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
&|P_{1m}^{*}(r,s,\sigma)| \leqslant C[(s-\sigma)^2 + |r|\,|s-\sigma| + r^2], \\
&|P_{\nu j}(r,s,\sigma)| \leqslant C[(s-\sigma)^2 + |r|\,|s-\sigma| + r^2]
\end{aligned}
$$

pour $\nu = 1$ et $j = 0, 1, \ldots, m-1$ et pour $\nu = 2$ et $j = 0, 1, \ldots, m$. On voit que

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} P_{1m}^{*}(r,s,\sigma) = P_{1m}^{*}(0,s,\sigma) = N_{1m}(s-\sigma)^2, \qquad \lim_{r\to 0} M_{10} = V(0,s), \\
&\lim_{r\to 0} P_{\nu j}(r,s,\sigma) = P_{\nu j}(0,s,\sigma) = N_{\nu j}(s-\sigma)^2 \qquad \text{pour} \quad \nu = 1,2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et}\ j = 0, 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

uniformément dans l'ensemble (20).

Vu (37) et (39), il est aisé à constater que

$$
(44)\quad \varphi(r,s,\sigma;m) = A_{0\ldots 0}^{m} \left\{ \frac{P_{1m}^{*}(r,s,\sigma)}{P_{20}(r,s,\sigma)} + \frac{r[\tilde{p}^{(m)}(s) - \tilde{p}^{(m)}(\sigma)] M_{10}}{P_{20}(r,s,\sigma)} \right\} +
$$

$$
+ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{j} \frac{P_{1j}}{P_{20}} \left(\frac{P_{21}}{P_{20}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{P_{2m}}{P_{20}}\right)^{\alpha_m}.
$$

En vertu de (37), (44) et (42), (43), (30) et (23), on déduit (38) du lemme 4 du travail précité [1], ce qui achève la démonstration du théorème.

TRAVAUX CITÉS

[1] Z. Szmydt, *Sur l'approximation par des polynômes harmoniques sur le contour d'un domaine plan,* Annales Polonici Mathematici 11 (1962), p. 283-305.

[2] — *Propriétés intégrales du potentiel logarithmique et ses applications,* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série math., astr. et phys., 10 (1962), p. 139-144.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 29. 1. 1966