COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVI DÉDIÉ À M. FRANCISZEK LEJA 1967

SUR UN SYSTÈME NON LINÉAIRE D'INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES PARABOLIQUES CONTENANT DES FONCTIONNELLES

PAR

J. SZARSKI (KRAKÓW)

Considérons un système d'inégalités différentielles de la forme suivante:

$$z_t^i \leqslant f^i\big(t, x, z, z_x^i, z_{xx}^i, \xi\big(z(t, \cdot)\big)\big) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $z = (z^1, \ldots, z^m)$, z_x^i est le gradient de la fonction $z^i(t, x)$ par rapport à x, z_{xx}^i est la matrice de ses secondes dérivées et $\xi(z) = \big(\xi_1(z), \ldots, \xi_p(z)\big)$, $\xi_l(z)$ étant pour $l = 1, \ldots, p$ une fonctionnelle dans l'espace des fonctions de x définies dans un ensemble G et dont les valeurs sont des points de l'espace à m dimensions.

Posons dans l'espace-temps $(t, x_1, \ldots, x_n)$

$$\Omega = (0, T)\times G \qquad \text{et} \qquad \Sigma = (0, T)\times \partial G,$$

où G est un ensemble ouvert et borné dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$ et $T \leqslant +\infty$. Etant donnée une fonction $a(t, x)$ définie dans Σ, désignons par Σ_a le sous-ensemble de Σ dans lequel $a(t, x) \neq 0$.

Soit $f^i(t, x, z, q, r, s)$ où $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $r = (r_{jk})$ est la matrice carrée à n dimensions et $s = (s_1, \ldots, s_p)$ une fonction définie pour $(t, x)\in\Omega$ et pour z, q, r et s arbitraires. Cette fonction sera dite *elliptique* par rapport à la fonctionnelle ξ et à la fonction $u(t, x) = \big(u^1(t, x), \ldots, u^m(t, x)\big)$ de classe C^1 dans Ω lorsque pour tout couple des matrices réelles et symétriques $r = (r_{jk})$, $\tilde{r} = (\tilde{r}_{jk})$ telles que $r \leqslant \tilde{r}$ (c'est-à-dire telles que la forme quadratique

$$\sum_{j,k=1}^{n} (r_{jk}-\tilde{r}_{jk})\lambda_j\lambda_k$$

n'est pas positive) on a pour $(t, x)\in\Omega$ l'inégalité

$$f^i\big(t, x, u(t, x), u_x^i(t, x), r, \xi\big(u(t, \cdot)\big)\big) \leqslant f^i\big(t, x, u(t, x), u_x^i(t, x), \tilde{r}, \xi\big(u(t, \cdot)\big)\big).$$

Ecrivons $z \leqslant \tilde{z}$ pour deux points $z = (z^1, \ldots, z^m)$ et $\tilde{z} = (\tilde{z}^1, \ldots, \tilde{z}^m)$ lorsque $z^j \leqslant \tilde{z}^j$ pour $j = 1, \ldots, m$. Enfin, désignons par $C_m(\overline{G})$ l'espace des fonctions continues dans $\overline{G}$ et dont les valeurs sont des points de l'espace à m dimensions, la norme pour $z(x) = \big(z^1(x), \ldots, z^m(x)\big) \epsilon\, C_m(\overline{G})$ étant définie par la formule

$$\|z\| = \max_i \max_{x \epsilon \overline{G}} |z^i(x)|.$$

THÉORÈME. *Admettons que*

1° *les fonctions* $f^i(t, x, z, q, r, s)$ *où* $i = 1, \ldots, m$ *sont définies pour* $(t, x) \epsilon\, \Omega$ (¹) *et pour* z, q, r *et* s *arbitraires, la fonction* f^i *étant croissante par rapport aux variables* $z^1, \ldots, z^{i-1}, z^{i+1}, \ldots, z^m, s_1, \ldots, s_p$;

2° *on a* $f^i(t, x, z, q, r, s) - f^i(t, x, \tilde{z}, q, r, \tilde{s}) \leqslant \sigma(t, \max_j (z^j - \tilde{z}^j) + \max_l |s_l - \tilde{s}_l|)$ *pour* $t > 0$ *et* $z \geqslant \tilde{z}$, *la fonction* $\sigma(t, y)$ *étant continue, croissante par rapport à* y *et non négative pour* $t > 0$ *et* $y \geqslant 0$, *et telle que la fonction* $y(t) \equiv 0$ *dans tout intervalle* $0 < t < \gamma$ *est l'unique solution de l'équation ordinaire* $dy/dt = \sigma\big(t, (1+L)y\big)$ *satisfaisant à la condition* $\lim_{t \to 0} y(t) = 0$;

3° *les fonctions* $u(t, x) = \big(u^1(t, x), \ldots, u^m(t, x)\big)$ *et* $v(t, x) = \big(v^1(t, x), \ldots, v^m(t, x)\big)$ *sont continues dans* $\overline{\Omega}$, *de classe* C^1 *dans* Ω *et possèdent des dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables* x *continues dans* Ω;

4° *les fonctionnelles* ξ_l *où* $l = 1, \ldots, p$, *définies dans l'espace* $C_m(\overline{G})$, *sont croissantes et satisfont à la condition de Lipschitz*

$$|\xi_l(z) - \xi_l(\tilde{z})| \leqslant L\, \|z - \tilde{z}\|;$$

5° *la fonction* f^j *est pour* $j = 1, \ldots, p$ *elliptique par rapport à la fonctionnelle* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ *et à la fonction* $u(t, x)$;

6° *l'inégalité différentielle*

$$u_t^j(t, x) - v_t^j(t, x) \leqslant f^j\Big(t, x, u(t, x), u_x^j(t, x), u_{xx}^j(t, x), \xi\big(u(t, \cdot)\big)\Big) - \\ - f^j\Big(t, x, v(t, x), v_x^j(t, x), v_{xx}^j(t, x), \xi\big(v(t, \cdot)\big)\Big)$$

est satisfaite en tout point $(t, x) \epsilon E_j$ *où*

$$E_j = \{(t, x) \epsilon\, \Omega \colon u^j(t, x) > v^j(t, x)\};$$

7° *on a* $u(0, x) \leqslant v(0, x)$ *pour* $x \epsilon \overline{G}$;

(¹) Le cylindre Ω peut d'ailleurs être remplacé par un ensemble beaucoup plus général (cf. [1]).

8° *les fonctions* $a^i(t,x)$ *sont non négatives dans* Σ *et les fonctions* $\varphi^i(t,x,y)$, *définies pour* $(t,x)\in\Sigma$ *et* y *arbitraires, sont strictement croissantes par rapport à* y;

9° *à tout point de* Σ_{ai} *vient correspondre une demidroite* l_i *issue de ce point, orthogonale à l'axe* t *et dont un segment initial est contenu dans* $\bar{\Omega}$;

10° *les fonctions* $u^j(t,x)$, $v^j(t,x)$ *ont leur dérivée suivant la demidroite* l_j *en tout point de* Σ_{aj} *et satisfont aux inégalités*

$$\varphi^j\big(t,x,u^j(t,x)\big)-\varphi^j\big(t,x,v^j(t,x)\big)$$

$$\leqslant a^j(t,x)\frac{d[u^j(t,x)-v^j(t,x)]}{dl_j} \quad \textit{pour} \quad (t,x)\in\Sigma_{aj},$$

$$u^j(t,x)-v^j(t,x)\leqslant 0 \quad \textit{pour} \quad (t,x)\in\Sigma\setminus\Sigma_{aj}.$$

Alors

(1) $$u(t,x)\leqslant v(t,x) \quad \textit{en tout point} \quad (t,x)\in\bar{\Omega}.$$

Démonstration. Posons

$$M^i(t)=\max_{x\in\bar{G}}[u^i(t,x)-v^i(t,x)] \quad \text{et} \quad M(t)=\max_i M^i(t).$$

La thèse (1) équivaut évidemment à la suivante:

(2) $$M(t)\leqslant 0 \quad \text{pour} \quad t\in[0,T),$$

qui sera établie dans la suite. Il est évident que

I. la fonction $M(t)$ est continue dans l'intervalle $[0,T)$, et que (cf. 7°)

II. on a $M(0)\leqslant 0$.

Commençons par démontrer que

III. $D_-M(t)\leqslant\sigma\big(t,(1+L)M(t)\big)$ pour $t\in E$, où $E=\{t\in(0,T): M(t)>0\}$, et D_- est la dérivée inférieure à gauche.

Soit $t_0\in E$. Il existe un indice $j=1,\ldots,p$ et un point $x_0\in\bar{G}$ tels que

(3) $$M(t_0)=M^j(t_0)=u^j(t_0,x_0)-v^j(t_0,x_0),$$

(4) $$D_-M(t_0)\leqslant D^-M^j(t_0).$$

Les hypothèses 8°-10° impliquent (cf. [1]) que (t_0,x_0) est un point intérieur de Ω. Il en résulte d'après 3°, (3) et la définition de $M^j(t)$, que

(5) $$u_x^j(t_0,x_0)=v_x^j(t_0,x_0),$$

(6) $$u_{xx}^j(t_0,x_0)\leqslant v_{xx}^j(t_0,x_0).$$

Enfin (cf. [2], § 33)

(7) $$D^-M^j(t_0)\leqslant u_t^j(t_0,x_0)-v_t^j(t_0,x_0).$$

Vu que $t_0 \in E$ et, par conséquent, que $M(t_0) > 0$, il résulte de (3) que $(t_0, x_0) \in E_j$. On a donc en vertu de 6°, (4) et (7)

$$D_- M(t_0) \leqslant f^j\big(t_0, x_0, u(t_0, x_0), u_x^j(t_0, x_0), u_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(u(t_0, \cdot)\big)\big) -$$
$$- f^j\big(t_0, x_0, v(t_0, x_0), v_x^j(t_0, x_0), v_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(v(t_0, \cdot)\big)\big).$$

D'après (5), la dernière inégalité peut être écrite sous la forme suivante:

$$D_- M(t_0) \leqslant \Big[f^j\big(t_0, x_0, u(t_0, x_0), v_x^j(t_0, x_0) u_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(u(t_0, \cdot)\big)\big) -$$
$$- f^j\big(t_0, x_0, u(t_0, x_0), v_x^j(t_0, x_0), v_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(u(t_0, \cdot)\big)\big)\Big] +$$
$$+ \Big[f^j\big(t_0, x_0, u(t_0, x_0), v_x^j(t_0, x_0), v_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(u(t_0, \cdot)\big)\big) -$$
$$- f^j\big(t_0, x_0, v(t_0, x_0), v_x^j(t_0, x_0), v_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(v(t_0, \cdot)\big)\big)\Big].$$

En vertu de 5° et (6), la première différence entre crochets n'est pas positive, donc

$$(8) \qquad D_- M(t_0) \leqslant f^j\big(t_0, x_0, u(t_0, x_0), v_x^j(t_0, x_0), v_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(u(t_0, \cdot)\big)\big) -$$
$$- f^j\big(t_0, x_0, v(t_0, x_0), v_x^j(t_0, x_0), v_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(v(t_0, \cdot)\big)\big).$$

On a en vertu de la définition de $M(t)$ et de (3)

$$u^j(t_0, x_0) = v^j(t_0, x_0) + M(t_0),$$
$$u^i(t_0, x) \leqslant v^i(t_0, x) + M(t_0)$$

pour $x \in \bar{G}$ et pour $i = 1, \ldots, m$.

Les fonctions f^j étant monotones (cf. 1°), de même que les fonctionnelles ξ (cf. 4°), deux dernières formules impliquent en vertu de (8) que

$$(9) \qquad D_- M(t_0)$$
$$\leqslant f^j\big(t_0, x_0, v(t_0, x_0) + \bar{M}(t_0), v_x^j(t_0, x_0), v_{xx}^j(t_0, x_0), \xi[v(t_0, \cdot) + \bar{M}(t_0)]\big) -$$
$$- f^j\big(t_0, x_0, v(t_0, x_0), v_x^j(t_0, x_0), v_{xx}^j(t_0, x_0), \xi\big(v(t_0, \cdot)\big)\big),$$

où $\bar{M}(t) = \big(M(t), \ldots, M(t)\big)$. Comme $M(t_0) > 0$, il vient pour la fonction constante $\bar{M}(t_0)$

$$\|\bar{M}(t_0)\| = M(t_0),$$

et la formule (9) prend en vertu de 2° et 4° la forme

$$D_- M(t_0) \leqslant \sigma\big(t_0, (1+L) M(t_0)\big).$$

Le point $t_0 \in E$ étant arbitraire, la proposition III se trouve démontrée.

Or, les propositions I, II, III entraînent (cf. [2], § 14) l'inégalité (2), ce qui achève la démonstration de notre théorème.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Szarski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques*, Annales Polonici Mathematici 15 (1964), p. 15-22.

[2] — *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

Reçu par la Rédaction le 3. 1. 1966