COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVI DÉDIÉ À M. FRANCISZEK LEJA 1967

LA MESURE PARABOLIQUE ET LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION LINÉAIRE PARABOLIQUE NORMALE

PAR

M. KRZYŻAŃSKI † (KRAKÓW)

1. En considérant la relation entre la solution du problème de Dirichlet dans un domaine borné, régulier par rapport à ce problème, et la fonction intervenant dans la condition aux limites, on a introduit grâce au théorème de F. Riesz sur la représentation d'une fonctionnelle linéaire, la notion de mesure harmonique (voir Brelot [2] et [3]; aussi Ciesielski et Semadeni [4]). Cette notion a été étendue ensuite aux solutions des problèmes aux limites relatifs à d'autres classes d'équations, en particulier à celle des équations paraboliques (voir Bauer [1], Doob [5], Hunt [7], Ciesielski et Semadeni [4]).

Dans le présent travail, il est question de l'équation linéaire normale parabolique homogène

$$\mathscr{F}(u) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,X)u''_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k(t,X)u'_{x_k} + c(t,X)u - u'_t = 0 \tag{1}$$
$$(a_{ij} = a_{ji},\ i = 1, \ldots, m),$$

dont les coefficients sont définis dans une couche $\mathscr{C}_0: 0 < t < T_0$, $X \in \mathscr{E}^m$, $\mathscr{E}^m$ étant l'espace euclidien à m dimensions et T_0 un nombre positif. Ces coefficients sont supposés des fonctions réelles. Ils sont assujettis à deux conditions suivantes:

1° $a_{ij}(t,X)$ sont bornés dans $\mathscr{C}_0$ — plus précisement,

$$|a_{ij}(t,X)| \leqslant A_0 \quad \text{pour} \quad i,j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

A_0 étant un nombre positif — et la forme

$$\mathfrak{A}(\Lambda) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,X)\lambda_i\lambda_j$$

est définie positive,

2° $b_k(t,X)$ et $c(t,X)$ satisfont dans $\mathscr{C}_0$ aux inégalités

$$|b_k(t,X)| \leqslant A_1|X| + B_1, \qquad c(t,X) \leqslant A_2|X|^2 + B_2, \tag{3}$$

$A_1 \geqslant 0$, $B_1 \geqslant 0$, A_2 et B_2 étant des nombres réels.

Le problème traité sera celui de Cauchy, à savoir celui de trouver pour l'équation (1) une solution $u(t, X)$ régulière dans une couche $\overline{\mathscr{C}}: 0 \leqslant t \leqslant T, X \in \mathscr{E}^m$ (c'est-à-dire continue dans cette couche et ayant les dérivées $u'_{x_i}, u''_{x_i x_j}$ (où $i, j = 1, \ldots, m$) et u'_t continues dans la couche $\mathscr{C}^*: 0 < t \leqslant T, X \in \mathscr{E}^m$), où $T \leqslant T_0$, et satisfaisant à une condition initiale de la forme

$$(4) \qquad u(0, X) = \varphi(X) \quad \text{pour} \quad X \in \mathscr{E}^m,$$

où $\varphi(X)$ est une fonction continue dans $\mathscr{E}^m$.

Considérons d'abord la famille $\{\varphi(X)\}$ des fonctions $\varphi(X)$ continues dans $\mathscr{E}^m$ et à supports contenus dans une sphère K_0 de $\mathscr{E}^m$ (c'est-à-dire des fonctions s'annulant en dehors de K_0). Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation (1), régulière et bornée dans $\overline{\mathscr{C}}$, satisfaisant à la condition initiale (4), $\varphi(X)$ étant une fonction de la famille $\{\varphi(X)\}$. En supposant qu'une telle solution $u(t, X)$ de (1) existe, il résulte des théorèmes connus qu'elle est unique (voir par exemple mes communications [10] et [11]). Ayant fixé un point $(t, X) \in \overline{\mathscr{C}}$, on a $u = F(\varphi)$ où F est une fonctionnelle linéaire, définie dans la famille $\{\varphi(X)\}$. En vertu du théorème I (voir [10], théorème 1) qui sera cité au n° 2 du présent travail, $\varphi \geqslant 0$ entraine $F(\varphi) \geqslant 0$ dans K_0; donc $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ y entraîne $F(\varphi_1) \leqslant F(\varphi_2)$. La fonctionnelle $F(\varphi)$ est par conséquent non négative et isotone. D'après le théorème de F. Riesz il existe une mesure unique $\mu(t, X; E)$ régulière dans la classe des ensembles boreliens $E \subset K_0$ et telle que

$$(5) \qquad u(t, X) = F(\varphi) = \int_{\mathscr{E}^m} \varphi(Y) \mu(t, X; dy)$$

pour toute fonction $\varphi(X)$ de la famille $\{\varphi(X)\}$ (voir Halmos [6], § 52 et § 6). Il est aisé de voir que le domaine d'existence de la mesure μ, en tant que fonction de E, s'étend à la classe de tous les ensembles boreliens de $\mathscr{E}^m$ et que (5) est valable lorsque la fonction $\varphi(X)$ est continue dans $\mathscr{E}^m$ au support borné et la solution $u(t, X)$ de l'équation (1), satisfaisant à la condition (4), existante et unique par hypothèse, est bornée dans la couche $\overline{\mathscr{C}}$. Il sera démontré que si la fonction $\varphi(X)$ est continue dans $\mathscr{E}^m$ et satisfait à une condition concernant l'ordre de sa croissance à l'infini, il existe dans une couche $\overline{\mathscr{C}}$ la solution du problème de Cauchy donnée par la formule (5).

2. Citons et envisageons à présent les théorèmes concernant les solutions du problème de Cauchy pour l'équation (1) et qui interviendront dans la suite. Ces théorèmes ont été établis dans mes travaux [9]-[11]. Toutes les hypothèses sur les coefficients de l'équation (1), admises au n° 1, sont à maintenir.

I. *Soit* $u(t,X)$ *une fonction régulière de classe* E_2 (¹) *dans la couche* $\overline{\mathscr{C}}$ *et telle que* $\mathscr{F}(u) \leqslant 0\,[\mathscr{F}(u) \geqslant 0]$ *dans la couche* $\mathscr{C}^*: 0 < t \leqslant T,\ X \in \mathscr{E}^m$. *Si* $u(0,X) \geqslant 0$ $[u(0,X) \leqslant 0]$ *pour* $X \in \mathscr{E}^m$, *on a aussi* $u(t,X) \geqslant 0$ $[u(t,X) \leqslant 0]$ *pour* $(t,X) \in \overline{\mathscr{C}}$. *En particulier, si* $u(0,X) = 0$ *pour* $X \in \mathscr{E}^m$, *on a* $u(t,X) \equiv 0$ *dans* $\overline{\mathscr{C}}$.

On déduit aussitôt du théorème I l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (1) dans la classe E_2. On déduit également (voir [10], théorème 2) le théorème qui suit.

II. *Outre les hypothèses admises au n°* 1, *admettons que* $c(t,X) \leqslant 0$ *dans* $\mathscr{C}_0$. *Soit* $u(t,X)$ *une solution de l'équation* (1), *régulière et de classe* E_2 *dans la couche* $\overline{\mathscr{C}}$. *Si* $u(0,X) \leqslant M$ $[u(0,X) \geqslant -M]$ *pour* $X \in \mathscr{E}^m$, M *étant une constante non négative, on a* $u(t,X) \leqslant M$ $[u(t,X) \geqslant -M]$ *pour* $(t,X) \in \overline{\mathscr{C}}$.

Avant de passer aux autres théorèmes, il est nécessaire d'introduire une hypothèse supplémentaire sur l'équation (1).

Considérons un domaine borné D découpé de l'intérieur de la couche $\overline{\mathscr{C}}$ par une surface $\mathscr{S}$ de classe $\mathscr{C}^1$, orientée dans le temps (c'est-à-dire, non tangente nulle part à aucune caractéristique de l'équation (1)). Désignons par $\overline{D}$ la fermeture de D. Soit S_0 la partie de la frontière $\mathrm{Fr}(D)$ situé sur le plan $t = 0$. Posons $\sigma = \mathscr{S} \cap \mathrm{Fr}(D)$ et $\Sigma = S_0 \cup \sigma$. Le premier problème de Fourier relatif à l'équation (1) et au domaine D consiste à chercher une solution $u(t,X)$ de l'équation (1), régulière dans $\overline{D}$ (c'est-à-dire continue dans $\overline{D}$ et admettant des dérivées u'_{x_i}, $u''_{x_ix_j}$ (où $i,j = 1,\ldots,m$) et u'_t continues dans l'ensemble $\overline{D} \setminus \Sigma$) et satisfaisant à la condition

$$u(t,X) = \Phi(t,X) \qquad \text{pour} \qquad (t,X) \in \Sigma \tag{6}$$

où $\Phi(t,X)$ est une fonction continue dans Σ.

Le domaine D est dit *régulier par rapport au premier problème de Fourier* pour l'équation (1) avec la condition aux limites (6) (donnée sur Σ) lorsque ce problème a une solution quelle que soit la fonction $\Phi(t,X)$ continue sur Σ.

(¹) Une fonction $\psi(t,X)$ est dite de classe $E_a(M,K)$ dans la couche $\overline{\mathscr{C}}$ (a, M et K étant des constantes positives) lorsques

$$|u(t,X)| \leqslant M \exp K|X|^a \qquad \text{pour} \qquad (t,X) \in \overline{\mathscr{C}}.$$

Une fonction $\varphi(X)$ est dite de classe $E_a(M,K)$ dans $\mathscr{E}^m$ lorsque la fonction $\psi(t,X) \equiv \varphi(X)$ est de classe $E_a(M,K)$ dans $\overline{\mathscr{C}}$.

Une fonction $\psi(t,X)$ est de classe E_a dans la couche $\overline{\mathscr{C}}$ lorsqu'il existe deux constantes positives M et K, telles qu'elle est de classe $E_a(M,K)$ dans $\overline{\mathscr{C}}$.

L'hypothèse supplémentaire sur l'équation (1) est la suivante:

(H) La couche $\overline{\mathscr{C}}$ est supposée être une somme d'une suite croissante de domaines D_n découpés de $\overline{\mathscr{C}}$ par les surfaces $\mathscr{S}_n \varepsilon \mathscr{C}^1$ (où $n = 1, 2, \ldots$) orientées dans le temps et dont la distance de l'origine des coordonnées tend vers l'infini avec $n \to \infty$, chaque domaine D_n étant régulier par rapport au premier problème de Fourier pour l'équation (1).

On a le théorème suivant (voir [9] et [11]):

III. *Soit $\varphi(X)$ une fonction continue de classe $E_2(M, K)$ dans $\mathscr{E}^m$. Soit $\Phi(t, X)$ une fonction continue de classe $E_2(M, K)$ dans la couche $\overline{\mathscr{C}}$ et telle que $\Phi(0, X) = \varphi(X)$ pour $X \epsilon \mathscr{E}^m$. Soient $u_n(t, X)$ les solutions de l'équation* (1), *régulières dans D_n (où $n = 1, 2, \ldots$) et satisfaisant aux conditions*

$$u_n(t, X) = \Phi(t, X) \quad \text{pour} \quad (t, X) \epsilon \Sigma_n$$

où $\Sigma_n = \sigma_n \cup S^{(n)}$, les ensembles $S^{(n)}$ et σ_n étant contenus dans la partie de la frontière $\mathrm{Fr}(D)$ *du domaine D_n située sur le plan $t = 0$ et sur la surface $\mathscr{S}_n$ respectivement. Admettons que la hauteur T de la couche $\overline{\mathscr{C}}$ est inférieure à un nombre $\overline{T}$ dépendant des nombres A_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 qui interviennent dans* (2) *et* (3) *et du nombre K. Enfin, admettons l'hypothèse* (H).

Alors la suite $\{u_n(t, X)\}$ converge presque uniformément dans $\overline{\mathscr{C}}$ (c'est-à-dire uniformément dans tout sous-ensemble fermé et borné de $\overline{\mathscr{C}}$) vers une fonction $u(t, X)$ qui est une solution de l'équation (1), *régulière dans la couche $\overline{\mathscr{C}}$, de classe $E_2(\overline{M}, \overline{K})$ dans cette couche et satisfaisant à la condition initiale*

$$u(0, X) = \Phi(0, X) = \varphi(X) \quad \text{pour} \quad X \epsilon \mathscr{E}^m,$$

les nombres positifs $\overline{M}$ et $\overline{K}$ ne dépendant que des nombres A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, M et K (le nombre $\overline{K}$ étant indépendant de M).

3. Considérons une suite $\{\varphi_n(X)\}$ de fonctions continues dans $\mathscr{E}^m$ de classe $E_2(M, K)$, M et K étant des constantes positives. Admettons que la suite $\{\varphi_n(X)\}$ converge presque uniformément dans $\mathscr{E}^m$ vers une fonction $\varphi_0(X)$. Cette fonction est continue et de classe $E_2(M, K)$ dans $\mathscr{E}^m$. L'hypothèse (H) étant également admise, on déduit du théorème III l'existence d'une suite $\{u_n(t, X)\}$ de solutions de l'équation (1), régulières de classe E_2 dans une couche commune $\tilde{\overline{\mathscr{C}}}$: $0 \leqslant t \leqslant \tilde{T}$, $X \epsilon \mathscr{E}^m$, et satisfaisant aux conditions

$$u_n(0, X) = \varphi_n(X) \quad \text{pour} \quad X \epsilon \mathscr{E}^m \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

de même que l'existence d'une solution $u_0(t, x)$ régulière de classe E_2 dans la même couche et satisfaisant à la condition initiale

$$u_0(0, X) = \varphi_0(X) \quad \text{pour} \quad X \epsilon \mathscr{E}^m. \tag{8}$$

THÉORÈME 1. *La suite* $\{u_n(t, X)\}$ *converge vers la fonction* $u_0(t, X)$ *presque uniformément dans une couche* $\overline{\mathscr{C}}$: $0 \leqslant t \leqslant T$, $X \in \mathscr{E}^m$.

Démonstration. Introduisons une fonction

$$(9) \qquad H(t, X; k) = \exp\left[\frac{k|X|^2}{1-\mu(k)t} + \nu(k)t\right],$$

où k est un paramètre positif dont $\mu(k)$ et $\nu(k)$ sont des fonctions positives convenablement choisies. Une valeur du paramètre k étant fixée, la fonction $H(t, X; k)$ est régulière et positive dans une couche Γ_k: $0 \leqslant t \leqslant \overline{T}_k$, $X \in \mathscr{E}^m$ $\big($où $\overline{T}_k < 1/\mu(k)\big)$. Choisissons les fonctions $\mu(k)$ et $\nu(k)$ de façon que l'on ait $\mathscr{F}(H) \leqslant 0$ à l'intérieur de Γ_k (voir (9) et (10]).

Considérons une couche $\overline{\mathscr{C}}_k$: $0 \leqslant t \leqslant T_k$, $X \in \mathscr{E}^m$ où $T_k = \min(T, \overline{T}_k)$ et posons

$$(10) \qquad v_n(t, X; k) = u_n(t, X)/H(t, X; k) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Les fonctions $v_n(t, X; k)$ satisfont à l'intérieur de $\overline{\mathscr{C}}_k$ à une équation de la forme

$$(11) \qquad \overline{\mathscr{F}}(v) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, X)v''_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^{m} \bar{b}_k(t, X)v'_{x_k} + \bar{c}(t, X)v - v'_t = 0$$

où les coefficients $\bar{b}_k(t, X)$ et $\bar{c}(t, X)$ satisfont aux inégalités analogues à (3) et

$$\bar{c}(t, X) = \frac{1}{H}\mathscr{F}(H) \leqslant 0.$$

En choisissant $k = K$, on déduit de (7), (10) et (9) l'inégalité $|v_n(0, X; K)| \leqslant M$ pour $X \in \mathscr{E}^m$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$, d'où

$$(12) \qquad |u_n(t, X)| \leqslant MH(t, X; K) \quad \text{pour} \quad (t, X) \in \overline{\mathscr{C}}_K \text{ et } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Choisissons un $\boldsymbol{T}$ tel que $0 < \boldsymbol{T} < T_K$. On a en vertu de (9) et (12)

$$|u_n(t, X)| \leqslant \overline{M} \exp \overline{K}|X|^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T} \text{ et } X \in \mathscr{E}^m, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

où $\overline{M}$ et $\overline{K}$ sont des constantes positives.

Pour établir la convergence de la suite $\{u_n(t, X)\}$ vers la fonction $u_0(t, X)$, choisissons une valeur $k' > K$ du paramètre k de façon à avoir $\boldsymbol{T} < T_{k'} < T_K$. Envisageons la suite $\{v_n(t, X; k')\}$ où $n = 1, 2, \ldots$ et la fonction $v_0(t, X; k')$. Les fonctions $v_n(t, X; k')$ sont régulières dans la couche $\overline{\mathscr{C}}_k$. Il résulte de (10), (12) et d'une propriété de la fonction $H(t, X; k)$ (démontrée dans mon travail [9], p. 150, lemme) qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $R > 0$ tel que $|X| \geqslant R$ entraîne $|v_n(t, X; k')| < \varepsilon/2$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et pour tout t tel que $0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T}$. Posons

$$w_n(t, X; k) = v_n(t, X; k') - v_0(t, X; k') \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

On a d'une part

$$w_n(t, X; k') < \varepsilon \text{ pour } |X| \geqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T} \text{ et } n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

D'autre part, la suite $\{\varphi_n(X)\}$ convergeant uniformément vers $\varphi_0(X)$ pour $|X| \leqslant R$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n(0, X; k') = 0$ uniformément pour $|X| \leqslant R$. Il existe par conséquent un $N > 0$ tel que

$$|w_n(0, X; k')| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |X| \leqslant R \text{ et } n > N. \tag{14}$$

Les fonctions w_n satisfaisant, elles aussi, à une équation de la forme (11) où $\bar{c} \leqslant 0$, on déduit de (13) (appliqué à $|X| = R$), de (14) et du principe d'extremum relatif aux solutions du premier problème de Fourier pour une équation normale parabolique (voir Il'in, Kalashnikov et Oleinik [8], § 1), l'inégalité

$$|w_n(t, X; k')| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |X| \leqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T} \text{ et } n > N, \tag{15}$$

d'où en vertu de (15) et (13)

$$|u_n(t, X; k') - u_0(t, X; k')| < \varepsilon H(t, X; k')$$

pour $X \in \mathscr{E}^m$, $0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T}$ et $n > N$.

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t, X) = u_0(t, X) \tag{16}$$

presque uniformément dans la couche $\overline{\mathscr{C}}$: $0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T}$, $X \in \mathscr{E}^m$, ce qui achève la démonstration.

Remarquons que $\boldsymbol{T}$ différant de T_K aussi peu que l'on veut, la convergence (16) est presque uniforme dans la couche $0 \leqslant t < T_K$, $X \in \mathscr{E}^m$.

4. Considérons maintenant une famille $\{\Phi(X)\}$ de fonctions continues dans $\mathscr{E}^m$ ayant les propriétés suivantes:

1° toute fonction $\Phi(X)$ est au support borné (voir n° 1),

2° toute fonction $\Phi(X)$ est de classe $E_2(M, K)$ dans $\mathscr{E}^m$, les constantes M et K étant communes pour toute la famille $\{\Phi(X)\}$.

D'après le théoréme III (voir n° 2), à chaque fonction $\Phi(X)$ vient correspondre une solution $\tilde{u}(t, X)$ de l'équation (1), satisfaisant à la condition $u(0, X) = \Phi(X)$ pour $X \in \mathscr{E}^m$ et toutes ces solutions sont régulières de classe $E_2(\overline{M}, \overline{K})$ dans une couche commune $\overline{\mathscr{C}}$: $0 \leqslant t \leqslant T$, $X \in \mathscr{E}^m$, les constantes $\overline{M}$ et $\overline{K}$ étant communes.

Il existe (voir n° 1) une mesure non négative $\mu(t, X; E)$, telle que toute fonction $\tilde{u}(t, X)$ de cette famille est représentable par la formule

$$\tilde{u}(t, X) = \int_{E^m} \Phi(Y)\mu(t, X; dY).$$

Une fonction $\varphi(X)$ continue de classe $E_2(M, K)$ dans $\mathscr{E}^m$ étant donnée, il est aisé de construire une suite $\{\varphi_n(X)\}$ de fonctions qui appartiennent à la famille $\{\Phi(X)\}$ et qui convergent vers la fonction $\varphi(X)$ presque uniformément dans $\mathscr{E}^m$. Soient $u_n(t, X)$ où $n = 1, 2, \ldots$ et $u(t, X)$ des solutions de l'équation (1), régulières de classe $E_2(\overline{M}, \overline{K})$ dans $\overline{\mathscr{C}}$ et satisfaisant pour $X \in \mathscr{E}^m$ aux conditions initiales $u_n(0, X) = \varphi_n(X)$, $u(0, X) = \varphi(X)$ respectivement. On a

$$u_n(t, X) = \int_{\mathscr{E}^m} \varphi_n(Y)\mu(t, X; dY) \quad \text{pour} \quad (t, X) \in \overline{\mathscr{C}} \tag{17}$$

et il existe un $\boldsymbol{T}$ tel que $0 < \boldsymbol{T} \leqslant T$ et que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t, X) = u(t, X) \quad \text{pour} \quad (t, X) \in \overline{\mathscr{C}},\ 0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T} \text{ et } X \in \mathscr{E}^m \tag{18}$$

La fonction $u(t, X)$ est également représentable dans la couche $\overline{\mathscr{C}}$ sous la forme (5), ce qui va être établi.

5. Commençons par démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Il existe un nombre $\boldsymbol{T} > 0$ tel que*

$$\int_{\mathscr{E}^m} \exp(K|Y|^2)\mu(t, X; dY) < \infty \quad \textit{pour} \quad (t, X) \in \overline{\mathscr{C}},\ 0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T} \textit{ et } X \in \mathscr{E}^m,$$

K étant la constante introduite au n° 4.

Démonstration. Soit $\{\overline{\varphi}_n(X)\}$ une suite non décroissante de fonctions continues de classe $E_2(1, K)$ dans $\mathscr{E}^m$, aux supports bornés et telles que $\lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_n(X) = \exp K|X|^2$. Soit $\{\overline{u}_n(t, X)\}$ la suite de solutions de l'équation (1), régulières de classe E_2 dans la couche $\overline{\mathscr{C}}$ et telles que $\overline{u}(0, X) = \overline{\varphi}_n(X)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ D'une part, il existe en vertu du théorème 1 un nombre $\boldsymbol{T} \leqslant T$ (le même qui a été choisi au n° 4), tel que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{u}_n(t, X) = \overline{u}(t, X) \quad \text{pour} \quad (t, X) \in \overline{\mathscr{C}},\ 0 \leqslant t \leqslant \boldsymbol{T} \text{ et } X \in \mathscr{E}^m, \tag{19}$$

$\overline{u}(t, X)$ étant la solution de l'équation (1), régulière de classe E_2 dans $\overline{\mathscr{C}}$ et telle que $\overline{u}(0, X) = \exp K|X|^2$ pour $X \in \mathscr{E}^m$. D'autre part, on a

$$\overline{u}_n(t, X) = \int_{\mathscr{E}^m} \overline{\varphi}_n(Y)\mu(t, X; dY) \quad \text{pour} \quad (t, X) \in \overline{\mathscr{C}} \text{ et } n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

La suite $\{\bar{u}_n(t, X)\}$ est monotone non décroissante et on a d'après (19) $\bar{u}_n(t, X) \leqslant \bar{u}(t, X)$ pour $(t, X) \epsilon \bar{\mathscr{C}}$ et $n = 1, 2, \ldots$ Par suite, le point $(t, X) \epsilon \bar{\mathscr{C}}$ étant fixé, la suite des intégrales formant le membre droit de (20) est bornée supérieurement. On a en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites monotones (voir Saks [12], p. 28, et Halmos [6], § 27)

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{E}^m} \exp K |Y|^2 \mu(t, X; dY) &= \lim \bar{u}_n(t, X) \\ &= \bar{u}(t, X) < \infty \qquad \text{pour} \qquad (t, X) \epsilon \bar{\mathscr{C}}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démontration.

THÉORÈME 3. *Soit $\varphi(X)$ une fonction continue de classe $E_2(M, K)$. Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation* (1), *régulière et de classe E_2 dans la couche $\bar{\mathscr{C}}$* (voir théorème 2). *On a l'égalité* (5), *c'est-à-dire*

$$u(t, X) = \int_{\mathscr{E}^m} \varphi(Y) \mu(t, X; dY) \qquad \textit{pour} \qquad (t, X) \epsilon \bar{\mathscr{C}},$$

$\mu(t, X; E)$ étant la mesure définie au n° 4.

Démonstration. On a, comme il a été montré au n° 3, les égalités (17), la suite $\{u_n(t, X)\}$ de solutions de l'équation (1) satisfaisant aux conditions (7) où $\varphi_n(X)$ sont des fonctions de classe $E_2(M, K)$ aux supports bornés. Il résulte du théorème 2 que les fonctions $\varphi_n(X)$ sont bornées par une fonction commune, sommable (intégrable) par rapport à la mesure $\mu(t, X; E)$. D'une part, on a en vertu du second théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme (voir Saks [12], p. 29, et Halmos [6], § 26)

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t, X) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{E}^m} \varphi_n(Y) \mu(t, X; dY) = \int_{\mathscr{E}^m} \varphi(Y) \mu(t, X; dY).$$

D'autre part, on a (18) et par conséquent l'égalité (5) pour $(t, X) \epsilon \bar{\mathscr{C}}$.

Remarque. La mesure $\mu(t, X; E)$ dépend évidemment des coefficients de l'équation (1). En apparence, elle dépend aussi du nombre K, mais la façon dont elle a été introduite (voir n° 1) montre qu'il n'en est pas ainsi. Par contre, le domaine de la validité de la formule (5), c'est-à-dire la couche $\bar{\mathscr{C}}$, dépend en général du nombre K.

TRAVAUX CITES

[1] H. Bauer, *Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen*, Mathematische Annalen 146 (1962), p. 1-59.

[2] M. Brelot, *Familles de Perron et le problème de Dirichlet*, Acta Scientiarum Mathematicarum 9 (1939), p. 133-153.

[3] — *Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 35 (1956), p. 297-335.

[4] Z. Ciesielski et Z. Semadeni, *Przegląd niektórych nowszych metod w teorii potencjału, I*, Prace Matematyczne 8 (1964), p. 147-191 (en polonais).

[5] J. L. Doob, *Probability approach to the heat equation*, Transactions of the American Mathematical Society 80 (1955), p. 216-280.

[6] P. R. Halmos, *Measure theory*, New York 1950.

[7] G. A. Hunt, *Some theorems concerning Brownian motion*, Transactions of the American Mathematical Society 81 (1956), p. 224-319.

[8] A. Il'in, A. Kalashnikov and O. Oleinik, *Second order linear equations of parabolic type*, Russian Mathematical Surveys 17 (1962), n° 3, p. 1-143.

[9] M. Krzyżański, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 18 (1945), p. 145-156; note complémentaire, ibidem 20 (1947), p. 7-9.

[10] — *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques 7 (1959), p. 131-135.

[11] — *Solutions of a linear second order equation of parabolic type defined in an unbounded domain*, Differential equations and their applications, Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962, Prague 1963, p. 55-63.

[12] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa-Lwów 1937.

Reçu par la Rédaction le 13. 12. 1965