COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXX 1974 FASC. 2

# *ENSEMBLES DE FRÉQUENCES ET FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES*

PAR

FRANÇOIS GRAMAIN ET YVES MEYER (ORSAY)

On sait qu'une fonction bornée de variable réelle à valeurs complexes, dont le spectre $\Lambda$ est un compact dénombrable est presque-périodique au sens de Bohr. Ce résultat est généralement en défaut si $\Lambda$ est un fermé dénombrable. Nous allons étudier certains cas particuliers où il subsiste.

PROPOSITION. *Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels linéairement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$. Soit $\varphi$ une fonction continue (de variable réelle à valeurs complexes) telle que*

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \textit{avec} \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \ \textit{et} \ \mathrm{Spec}\, f_n \subset a_n \boldsymbol{Z}.$$

*Alors, pour tout $n$, $f_n$ est égale presque partout à une fonction continue (et par suite $\varphi$ est presque-périodique).*

On en déduit le

THÉORÈME 1. *Soit $\{a_n\}$ une suite tendant vers $+\infty$ de nombres réels linéairement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$. Toute fonction continue bornée dont le spectre est contenu dans $\bigcup_{n\in N} a_n \boldsymbol{Z}$ est presque-périodique.*

Alors un peu d'arithmétique permet d'appliquer ce théorème au cas particulier suivant:

COROLLAIRE. *Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Toute fonction continue bornée dont le spectre est contenu dans l'ensemble des racines $n$-ièmes des entiers naturels est presque-périodique.*

Toutes les fonctions considérées sont de variable réelle, et dans tout ce qui suit $\{a_n\}$ (resp. $\{\beta_n\}$) est une suite de nombres réels linéairement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$. Pour démontrer la proposition, on utilise les lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit $\{s_n\}$ une suite de fonctions continues, périodiques de période 1, à valeurs réelles, telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|s_n\|_\infty < +\infty.$$

*Alors on a*

$$\sup_{t\in R}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(\beta_n t)\Big] = \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t\in R} s_n(t)$$

*et l'équation analogue pour* inf *au lieu de* sup.

C'est une conséquence immédiate du théorème de Kronecker.

LEMME 2. *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions réelles de* $L^\infty(\boldsymbol{R})$ *telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \quad \textit{et} \quad \operatorname{Spec} f_n \subset a_n \boldsymbol{Z}.$$

*Si on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \geqslant 0$$

*presque partout, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \inf \operatorname{ess} f_n \geqslant 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N$ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon/2.$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_n(t) \geqslant -\varepsilon/2$$

presque partout. Soit $K_\nu$ un noyau de sommation (par exemple le noyau de Fejér). La fonction $f_n * K_\nu$ est continue et bornée et son spectre est contenu dans $a_n \boldsymbol{Z}$ (c'est même un polynôme trigonométrique). Comme $K_\nu$ est positif et d'intégrale 1, on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_n * K_\nu \geqslant -\varepsilon/2.$$

Le lemme 1 montre que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \inf(f_n * K_\nu) \geqslant -\varepsilon/2.$$

Quand $\nu \to +\infty$, la fonction $f_n * K_\nu$ tend faiblement vers $f_n$ dans la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} \inf \operatorname{ess} f_n \geqslant -\varepsilon/2$$

et par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \inf \operatorname{ess} f_n \geqslant \sum_{n=0}^{N-1} \inf \operatorname{ess} f_n - \varepsilon/2 \geqslant -\varepsilon$$

ce qui démontre le lemme 2.

Pour prouver la proposition, on se ramènera au cas où les $f_n$ et $\varphi$ sont réelles, en séparant les parties réelles et imaginaires des fonctions $f_n$ (leur spectre est encore contenu dans $a_n\mathbf{Z}$). On montrera qu'alors l'oscillation essentielle

$$\Omega(f_n, x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\operatorname*{sup\,ess}_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} f_n - \operatorname*{inf\,ess}_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} f_n)$$

est partout nulle. Pour cela il suffira qu'elle soit nulle en un point et nous allons montrer qu'elle est nulle presque partout.

On peut supposer que $f_n$ est une fonction borélienne bornée $2\pi/a_n$ périodique et que $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ presque partout. Soient

$$\omega_d'(f_n, x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\{\operatorname*{sup\,ess}_{[x,x+\varepsilon]} f_n(t) - f_n(x)\} \geqslant 0 \text{ presque partout,}$$

$$\omega_d''(f_n, x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\{f_n(x) - \operatorname*{inf\,ess}_{[x,x+\varepsilon]} f_n(t)\} \geqslant 0 \text{ presque partout.}$$

On définit de manière analogue $\omega_g'$ et $\omega_g''$ en changeant $\varepsilon$ en $-\varepsilon$ et l'on pose

$$\Omega(f_n, x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\{\operatorname*{sup\,ess}_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} f_n(t) - \operatorname*{inf\,ess}_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} f_n(t)\}$$
$$\leqslant \omega_d'(f_n, x) + \omega_d''(f_n, x) + \omega_g'(f_n, x) + \omega_g''(f_n, x).$$

De $\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ on déduit

$$\operatorname*{inf\,ess}_{[x-\varepsilon,x]} f_i + \sum_{j\neq i} \operatorname*{sup\,ess}_{[x-\varepsilon,x]} f_j \geqslant \operatorname*{inf\,ess}_{[x-\varepsilon,x]} \varphi.$$

Comme $\varphi$ est continue, son oscillation partielle $\omega_g''(\varphi, x)$ est nulle on a donc

$$(1) \qquad -\omega_g''(f_i, x) + \sum_{j\neq i} \omega_g'(f_j, x) \geqslant 0 \text{ presque partout.}$$

Si on avait $\omega_g'(f_j, x) \geqslant a > 0$ presque partout, la fonction $f_j$ ne serait pas bornée. On a donc $\operatorname{inf\,ess} \omega_g'(f_j, x) = 0$. D'autre part, comme les $f_n$ sont $2\pi/a_n$-périodiques, il en est de même de $\omega_g''(f_n, x)$ et de $\omega_g'(f_n, x)$. Le lemme 2 peut donc être appliqué à (1) et il fournit $\operatorname{inf\,ess}[-\omega_g''(f_i, x)] \geqslant 0$ et par suite $\omega_g''(f_i, x) = 0$ presque partout.

Un raisonnement analogue montre que $\omega_d'(f_i, x) = \omega_d''(f_i, x) = \omega_g'(f_i, x) = 0$ presque partout. Par combinaison linéaire de ces oscillations partielles, on obtient que $\Omega(f_i, x) = 0$ presque partout.

Montrons que $\Omega(f_i, x) = 0$ partout. Prenons, par exemple $i = 0$. Puisque $\Omega(f_j, x) = 0$ presque partout, il existe $x_j$ tel que $\Omega(f_j, x_j) = 0$

pour $j \neq 0$. Si $\Omega(f_0, x)$ n'est pas partout nulle, il existe $x_0$ tel que $\Omega(f_0, x_0) = 4\varepsilon > 0$. Alors, il existe un entier $N$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < \varepsilon,$$

donc

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \Omega(f_n, x) < 2\varepsilon$$

pour tout $x$ réel. Les $a_j/a_0$ et 1 sont linéairement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$. D'après le théorème de Kronecker, pour tout $\eta > 0$ il existe des entiers $p_0, p_1, \ldots, p_N$ tels que

$$\left| p_0 \frac{a_j}{a_0} - (x_j - x_0) \frac{a_j}{2\pi} - p_j \right| \leqslant \eta \quad \text{pour } j = 1, \ldots, N.$$

Soit

$$\xi = x_0 + p_0 \frac{2\pi}{a_0} = x_j + p_j \frac{2\pi}{a_j} + t_j.$$

On a

$$|t_j| \leqslant \eta \frac{2\pi}{|a_j|}.$$

La périodicité de $f_0$ entraîne que $\Omega(f_0, \xi) = 4\varepsilon$. D'autre part, l'oscillation essentielle d'une fonction bornée est semi-continue supérieurement; donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\Omega(f_j, x_j + t_j) < \frac{\varepsilon}{N} \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant N \text{ et } |t_j| \leqslant \eta \frac{2}{|a_j|}.$$

Alors la périodicité des $f_j$ entraîne que $\Omega(f_j, \xi) < \varepsilon/N$. Or

$$f_0 = \varphi - \sum_{j=1}^{N} f_j - \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n,$$

donc

$$\Omega(f_0, \xi) \leqslant N \frac{\varepsilon}{N} + 2\varepsilon < 4\varepsilon.$$

On a donc une contradiction avec l'hypothèse $\Omega(f_0, x_0) = 4\varepsilon$ et pour tout indice $i$ on a $\Omega(f_i, x) = 0$ pour tout $x$ réel.

On en déduit que $f_i$ est presque partout égale à une fonction continue grâce au résultat classique suivant:

LEMME 3. *Soit $f$ une fonction réelle de $L^\infty(\boldsymbol{R})$ dont l'oscillation essentielle est nulle en tout point. Alors $f$ est égale presque partout à une fonction continue.*

Cela achève la démonstration de la proposition. Celle du théorème 1 utilise le

LEMME 4. *Soit*

$$\varphi = a + \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

*où* $\{f_n\}$ *est une suite de fonctions continues à valeurs complexes telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \quad et \quad a \in \boldsymbol{C}.$$

*Si* Spec $f_n \subset a_n \boldsymbol{Z}^*$, *alors*

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant \frac{1}{5}\Big(|a| + \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty\Big).$$

Soit $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha$ et $\beta$ réels, et $f_n(t) = s_n(\beta_n t)$ avec $\beta_n = a_n/2\pi$. Soit

$$s_n(t) = \sigma_n(t) + i\tau_n(t),$$

les fonctions $\sigma_n$ et $\tau_n$ étant à valeurs réelles. Comme 0 n'est pas dans le spectre de $f_n$, on a

$$\int_0^1 \sigma_n = \int_0^1 \tau_n = 0,$$

donc

(2) $$\sup \sigma_n \geqslant 0 \geqslant \inf \sigma_n \quad \text{et} \quad \sup \tau_n \geqslant 0 \geqslant \inf \tau_n.$$

Soit

$$\mu = \sup_{t \in \boldsymbol{R}} \Big| \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n(t) \Big| \quad \text{et} \quad \nu = \sup_{t \in \boldsymbol{R}} \Big| \beta + \sum_{n=0}^{+\infty} \tau_n(t) \Big|.$$

D'après le lemme 1 on a

$$\mu \geqslant \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \sup \sigma_n \quad \text{et} \quad \mu \geqslant -\alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \sup(-\sigma_n).$$

Soit

$$\mu \geqslant -\alpha - \sum_{n=0}^{+\infty} \inf \sigma_n,$$

d'où

$$\mu \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\sup \sigma_n - \inf \sigma_n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \|\sigma_n\|_\infty$$

d'après l'inégalité (2).

On a un résultat analogue pour $\nu$, donc

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}(\mu + \nu) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (\|\sigma_n\|_\infty + \|\tau_n\|_\infty) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \|s_n\|_\infty = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty.$$

D'autre part, comme $\varphi$ est presque périodique, de moyenne $a$, on a $\|\varphi\|_\infty \geqslant |a|$, donc

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant \frac{1}{5}|a| + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_\infty = \frac{1}{5}\left(|a| + \sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_\infty\right).$$

Pour terminer la démonstration du théorème 1, appelons $K_j$ le noyau de Fejér d'ordre $j$. On a

$$\varphi * K_j = \varphi_j = a_j + \sum_{n=0}^{+\infty} P_{j,n} \quad \text{avec } a_j \in \boldsymbol{C},$$

$P_{j,n}$ polynôme trigonométrique à spectre contenu dans $\alpha_n \boldsymbol{Z}^*$, la somme étant en fait finie puisque $\alpha_n$ tend vers l'infini. Comme l'intégrale de $K_j$ est 1, on a

$$\left\| a_j + \sum_{n=0}^{+\infty} P_{j,n} \right\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty.$$

Le lemme 4 fournit alors

$$|a_j| + \sum^{\infty} \|P_{j,n}\|_\infty \leqslant 5\|\varphi\|_\infty.$$

En prenant au besoin une sous-suite, on peut supposer que $a_j$ tend vers $a$ et que $P_{j,n}$ tend faiblement vers un élément $f_n$ de $L^\infty(\boldsymbol{R})$ dont le spectre est contenu dans $\alpha_n \boldsymbol{Z}$. De plus

$$|a| + \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty \leqslant 5\|\varphi\|_\infty.$$

On vérifie alors immédiatement que $\varphi$ est presque partout égale à la somme $a + \sum_0^\infty f_n$ et la proposition s'applique.

Le corollaire est l'application du théorème 1 au cas où les $\alpha_n$ sont l'unité et les racines $n$-ièmes des entiers naturels non divisibles par la puissance $n$ d'un entier supérieur ou égal à 2. En effet, leur indépendance linéaire sur $\boldsymbol{Q}$ résulte du théorème suivant dont la démonstration nous a été aimablement communiquée par Y. Pourchet.

THÉORÈME 2 (Pourchet). *Soit $\{t_i\}$ un ensemble de réels strictement positifs et $n \geqslant 2$ un entier naturel. Si $t_i^n \in \boldsymbol{Q}$ et si les $t_i^n$ ont des images distinctes dans $\boldsymbol{Q}^\times/\boldsymbol{Q}^{\times n}$, où $\boldsymbol{Q}^{\times n}$ désigne le groupe multiplicatif des puissances $n$ des rationnels non nuls, alors les $t_i$ sont linéairement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$.*

Soit $\sum \lambda_i t_i = 0$ une relation de dépendance linéaire sur $\boldsymbol{Q}$, liant un nombre fini de $t_i$. Supposons que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a

$$\lambda_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i \frac{t_i}{t_{i_0}} = 0$$

avec $t_i/t_{i_0}$ irrationnel (puisque $(t_i/t_{i_0})^n \notin \boldsymbol{Q}^{\times n}$).

Soit $k_i = \mathbf{Q}(t_i/t_{i_0})$ et $K$ une extension finie de $\mathbf{Q}$ contenant tous les $t_i/t_{i_0}$ intervenant dans la relation de dépendance considérée. Alors

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}\left(\frac{t_i}{t_{i_0}}\right) = \mathrm{Tr}_{k_i/\mathbf{Q}}\left[\mathrm{Tr}_{K/k_i}\left(\frac{t_i}{t_{i_0}}\right)\right] = [K\colon\, k_i]\,\mathrm{Tr}_{k_i/\mathbf{Q}}\left(\frac{t_i}{t_{i_0}}\right).$$

Si on a $\mathrm{Tr}_{k_i/\mathbf{Q}}(t_i/t_{i_0}) = 0$, pour tout $i$, on a donc $\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(\lambda_{i_0}) = 0$, ce qui est absurde. Il suffit donc de prouver que si $\theta$ est un réel positif tel que $\theta^n \in \mathbf{Q}^\times$ et $\theta^n \notin \mathbf{Q}^{\times n}$ on a $\mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}(\theta)/\mathbf{Q}}(\theta) = 0$ pour que le théorème 2 soit démontré.

Soit $a = \theta^n \in \mathbf{Q}^\times$ et soit $u$ l'ordre de $a$ dans $\mathbf{Q}^\times/\mathbf{Q}^{\times n}$. L'entier $u$ divise $n$ puisque $a^n \in \mathbf{Q}^{\times n}$ et $u \geqslant 2$ puisque $\theta^n \notin \mathbf{Q}^{\times n}$. Par définition de $u$, il existe $b \in \mathbf{Q}^\times$ strictement positif tel que $a^u = b^n = b^{uv}$. On a donc $(a/b^v)^u = 1$. Le rationnel $a/b^v$ est une racine de l'unité positive, c'est donc 1 et $a = b^v$, c'est-à-dire $\theta^{uv} = b^v$. Alors $\theta^u/b$ est une racine de l'unité réelle et positive, c'est donc 1 et $\theta^u = b$.

Montrons que le polynôme $X^u - b$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$, ce qui prouvera que $\mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}(\theta)/\mathbf{Q}}(\theta) = 0$. D'après le critère de Capelli (1), le polynôme $X^u - b$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$ si pour tout nombre premier $p$ divisant $u$, le nombre $b$ n'est pas dans $\mathbf{Q}^{\times p}$, et si lorsque 4 divise $u$, le nombre $b$ n'est pas dans $-4\mathbf{Q}^{\times 4}$. Soit $p$ un nombre premier divisant $u$; si on avait $b = c^p$ avec $c \in \mathbf{Q}^\times$, on aurait $a^u = c^{pn}$ et l'ordre de $a$ dans $\mathbf{Q}^\times/\mathbf{Q}^{\times n}$ serait inférieur ou égal à $u/p$. De plus, on ne peut avoir $b = -4c^4$ avec $c \in \mathbf{Q}^\times$ car $b$ est positif. Cela achève la démonstration du théorème 2.

---

(1) Voir S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley 1965, p. 219.

*Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1973*