

ÜBER DIE KONSTRUKTION VON METRISCH-AFFINEN
RÄUMEN VON REKURRENTER KRÜMMUNG

VON

ARTHUR MOÓR (SOPRON)

1. Einleitung. Unter einem *metrisch-affinen Raum* \mathfrak{R}_n^* verstehen wir im folgenden eine n -dimensionale Punktmannigfaltigkeit in der eine Metrik durch einen symmetrischen Grundtensor $g_{ik}(x^1, \dots, x^n)$ und eine lineare Übertragung der Vektoren durch die Übertragungsparameter $L_{i^j_k}(x^1, \dots, x^n)$ festgelegt ist. $L_{i^j_k}$ ist unabhängig von den g_{ij} angegeben und bildet mit dem metrischen Grundtensor zusammen die Fundamentalgroßen des Raumes \mathfrak{R}_n^* .

Bezeichnen wir durch $\Gamma_{i^j_k}$ die durch g_{ij} bestimmten Übertragungsparameter, d.h. die Christoffelschen Symbole zweiter Art,

$$\Gamma_{i^j_k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g^{jr} (\partial_k g_{ir} + \partial_i g_{rk} - \partial_r g_{ik}),$$

so kann man offensichtlich $L_{i^j_k}$ in der Form

$$(1.1) \quad L_{i^j_k}(x) = \Gamma_{i^j_k}(x) + A_{i^j_k}(x)$$

schreiben, wo $A_{i^j_k}$ einen Tensor dritter Stufe bedeutet. Es bedeutet x in (1.1) und auch im folgenden die Mannigfaltigkeit $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Die durch $L_{i^j_k}$ und $\Gamma_{i^j_k}$ bestimmten kovarianten Ableitungen hängen miteinander durch die Formeln

$$(1.1a) \quad f^i|_k = f^i_{,k} + A_{j^i_k} f^j,$$

$$(1.1b) \quad f_i|_k = f_{i,k} - A_{i^j_k} f_j$$

zusammen, wo das Komma bzw. der Strich die durch die $\Gamma_{i^j_k}$ bzw. $L_{i^j_k}$ bestimmte kovariante Ableitung des Vektors f^i bedeutet.

In den \mathfrak{R}_n^* -Räumen kann zu g_{ik} auch g^{ik} in der gewöhnlichen Weise definiert werden und mit ihrer Hilfe können die Indizes der Tensoren herauf und heruntergezogen werden, ebenso, wie in den Riemannschen Räumen; doch es werden dadurch die kovarianten Ableitungen im allgemeinen verändert. Es ist nämlich, wegen $g_{ij,k} = 0$,

$$(1.2) \quad g_{ij}|_k = -A_{ijk} - A_{jik}, \quad A_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} g_{jt} A_{i^t_k},$$

woraus folgt, daß die durch (1.1) bestimmte kovariante Ableitung nur im Falle

$$(1.3) \quad A_{ijk} + A_{jik} = 0$$

metrisch ist, was wir im folgenden aber nicht annehmen wollen.

Der zu dem Übertragungsparameter Γ_{ik}^j bzw. L_{ik}^j gehörige Krümmungstensor bezeichnen wir mit R_{jkl}^i bzw. $R_j^*{}^i{}_{kl}$. Es gilt

$$(1.4) \quad R_j^*{}^i{}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_l L_{jk}^i + L_{jk}^l L_{li}^i - k|l,$$

wo $k|l$ den vorigen Ausdruck, aber mit vertauschten Indizes k und l bedeutet. Auf Grund von (1.1) kann leicht der Zusammenhang zwischen R_{jkl}^i und $R_j^*{}^i{}_{kl}$ bestimmt werden. Es gilt

$$(1.5) \quad R_j^*{}^i{}_{kl} = R_{jkl}^i + 2A_{j[k,l]}^i + 2A_{j[k}^l A_{l]}^i,$$

wo wir der Kürze halber die Schoutensche Symbolik verwendet haben.

Zu einem orthonormierten kontravarianten n -Bein e^i ist das adjungierte orthonormierte kovariante n -Bein durch $e_i = g_{ij} e^j$ bestimmt.

Im vorliegenden Aufsatz wollen wir die Form des Krümmungstensors $R_j^*{}^i{}_{kl}$ bestimmen, falls das fundamentale n -Bein e^i von rekurrenter kovarianter Ableitung ist, ferner notwendige und hinreichende Bedingungen angeben dafür, daß der Krümmungstensor $R_j^*{}^i{}_{kl}$ rekurrente kovariante Ableitung habe.

2. Konstruktion eines orthonormalen rekurrenten n -Beins. Es sei e^i ein n -Bein, welches bezüglich der Metrik orthonormal ist, d. h. es gilt

$$(2.1) \quad g_{ij} e^i e^j \equiv e_i e_i = \delta_{ab},$$

wo δ_{ab} das Kroneckersche Symbol bedeutet. Auf Grund der Tensoralgebra folgt bekanntlich aus (2.1) auch

$$(2.2) \quad e^i e_j = \delta_j^i.$$

Zum n -Bein e^i wollen wir nun solche Übertragungsparameter L_{ik}^j konstruieren, daß das n -Bein e^i rekurrente kovariante Ableitung hat, d. h. es gilt:

$$(2.3) \quad e^i|_m = k_m(x) e^i,$$

wo $k_m(x)$ ein kovariantes Vektorfeld bedeutet.

Beachten wir den Zusammenhang zwischen den durch die Γ_{ik}^j und L_{ik}^j bestimmten kovarianten Ableitungen (vgl. die Formel (1.1a)), so wird in Hinsicht auf (2.3):

$$k_m e^i_{(a)} = e^i_{(a),m} + A_{h^i m} e^h_{(a)}.$$

Eine Überschiebung mit $e_j_{(a)}$ gibt wegen (2.2):

$$(2.4) \quad A_{j^i m} = k_m \delta_j^i - e^i_{(a),m} e_j_{(a)}.$$

Bezüglich des adjungierten kovarianten n -Beins $e_j_{(a)}$ gilt der folgende

SATZ 1. *Besteht für das kontravariante n -Bein $e^i_{(a)}$ die Relation (2.3), so gilt für das adjungierte kovariante n -Bein $e_j_{(b)}$*

$$(2.5) \quad e_j|_m_{(b)} = -k_m e_j_{(b)}.$$

Beweis. Aus (2.1) folgt nach kovarianter Differenzierung

$$e^i e_i|_m_{(a)(b)} = -e^i|_m e_i_{(b)}.$$

Beachten wir die Bedingungsgleichung (2.3), ferner (2.1), so wird

$$e^i e_i|_m_{(a)(b)} = -k_m \delta_{ab},$$

woraus nach einer Überschiebung mit $e_j_{(a)}$ in Hinsicht auf (2.2) die zu beweisende Relation (2.5) folgt.

Bemerkung. Bei der Konstruktion des orthonormalen rekurrenten n -Beins $e^i_{(a)}$ war wesentlich, daß das Vektorfeld $k_m(x)$, für jedes Vektor des n -Beins, dasselbe war. Wäre k_m auch vom Vektor $\vec{e}_{(a)}$ abhängig, so wäre für $A_{j^i m}$ die Formel (2.4) nicht gültig.

3. Bestimmung des Krümmungstensors mit Hilfe von $e^i_{(a)}$. Bildet man die Vertauschungsformeln für den Vektor $e^i_{(a)}$, so wird

$$(3.1) \quad e^i|_{k|l} - e^i|_l|_k = e^h R_{h^i kl} - 2e^i|_l S_{k^t l}^t,$$

wo $S_{k^t l}^t$ den Torsionstensor der Übertragung $L_{k^t l}^t$ bedeutet. Nach (1.1) ist somit

$$S_{k^t l}^t \stackrel{\text{def}}{=} L_{[k^t l]}^t \equiv A_{[k^t l]}^t.$$

Eine Überschiebung von (3.1) mit $e_j_{(a)}$ gibt nach (2.2).

$$(3.2) \quad R_{j^i kl}^* = (e^i|_{k|l} - e^i|_l|_k) e_j + 2e^i|_l e_j S_{k^t l}^t.$$

Auf Grund der Formeln (2.3) und (2.4) kann der folgende Satz leicht bewiesen werden:

SATZ 2. Zu beliebigen metrischen Übertragungsparametern $\Gamma_j^i k$ kann der Tensor $A_j^i k$ so bestimmt werden, daß

$$(3.3) \quad e^i |_{(a)k} = 0$$

und

$$(3.4) \quad R_j^*{}^i{}_{kl} = 0$$

gilt.

Beweis. Hat der Tensor $A_j^i k$ die Form (2.4), so gilt (2.3). Ist aber k_m in (2.4) der Nullvektor, so geht (2.3) in (3.3) über, und aus (3.3) folgt dann nach (3.2) die letzte zu beweisende Relation (3.4).

Überdies gilt der

SATZ 3. Hat das fundamentale kovariante n -Bein e^i rekurrente Ableitung, d.h. besteht (2.3), mit $k_m = \partial_m k$ (k bedeutet einen Skalar), so verschwindet der Krümmungstensor $R_j^*{}^i{}_{kl}$.

Beweis. Aus (2.3) folgt

$$e^i |_{(a)l|m} = k_l |_{(a)m} e^i + k_l k_m |_{(a)} e^i.$$

Durch Vertauschung der Indizes l und m folgt

$$(3.5) \quad e^i |_{(a)l|m} - e^i |_{(a)m|l} = K_{lm} e^i - 2S_{lm}^t k_t e^i$$

mit

$$K_{lm} \stackrel{\text{def}}{=} 2\partial_{[m} k_{l]}.$$

Beachten wir nun die Formel (3.2) des Krümmungstensors, ferner die Relationen (2.2) und (3.5), so wird

$$(3.6) \quad R_j^*{}^i{}_{lm} = K_{lm} \delta_j^i, \quad K_{lm} = 2\partial_{[m} k_{l]},$$

woraus die Behauptung des Satzes unmittelbar folgt, da $K_{lm} = 0$ ist, wenn die Gleichung $k_l = \partial_l k$ besteht.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß eigentlich Folgendes bewiesen wurde:

Hat das fundamentale kovariante n -Bein e^i rekurrente kovariante Ableitung, d.h. gilt (2.3), so hat der Krümmungstensor die Form (3.6).

4. Rekurrenter Krümmungstensor. In diesem Abschnitt wollen wir solche Bedingungen bestimmen, die notwendig bzw. hinreichend sind dafür, daß der Krümmungstensor $R_j^*{}^i{}_{kl}$ rekurrente kovariante Ableitung hat. Wir werden immer annehmen, daß das fundamentale n -Bein e^i rekurrente kovariante Ableitung hat.

Bezüglich $R_j^{*i}{}_{kl}$ stellen wir die Bedingung, daß

$$(4.1) \quad R_j^{*i}{}_{kl}|_m = \kappa_m R_j^{*i}{}_{kl}$$

gilt, wo $\kappa_m = \kappa_m(x^1, \dots, x^n)$ ein Vektorfeld bedeutet. Offenbar drückt (4.1) aus, daß der \mathfrak{R}_n^* -Raum ein Raum von rekurrenter Krümmung ist.

Nach den Resultaten des vorigen Abschnitts hat der Krümmungstensor die Form (3.6), somit ist (4.1) äquivalent mit

$$(4.2) \quad K_{lm}|_r = \kappa_r K_{lm}.$$

Wir gehen zur Bestimmung des Vektorfeldes κ_r über. Aus (4.2) folgt:

$$(4.3) \quad K_{lm}|_r|_t - K_{lm}|_t|_r = (\kappa_r|_t - \kappa_t|_r) K_{lm}.$$

Auf Grund von (1.1b) wird

$$K_{lm}|_r|_t - K_{lm}|_t|_r = (\kappa_{r,t} - \kappa_{t,r} - 2S_r^s{}_t \kappa_s) K_{lm}.$$

Verwenden wir die Vertauschungsformeln auf K_{lm} , so wird

$$-K_{ls} R_m^{*s}{}_{rt} - K_{sm} R_l^{*s}{}_{rt} - 2K_{lm}|_s S_r^s{}_t = 2(\kappa_{[r,t]} - S_r^s{}_t \kappa_s) K_{lm}.$$

Nach (3.6) und (4.2) bekommt man aus dieser Gleichung

$$-2K_{lm} K_{rt} = 2\kappa_{[r,t]} K_{lm},$$

woraus wegen $K_{lm} \neq 0$ die Relation $K_{rt} = -\kappa_{[r,t]}$, d.h. mit Rücksicht auf die Definition von K_{rt}

$$(4.4) \quad \partial_{[t} k_{r]} = -\frac{1}{2} \partial_{[t} \kappa_{r]}$$

folgt.

Die Relationen (4.3) bzw. die damit gleichwertigen Relationen (4.4) sind eben die Integrierbarkeitsbedingungen von (4.2), d.h. wegen (3.6) die Integrierbarkeitsbedingungen von (4.1). Wir können also unsere Resultate im folgenden Satz zusammenfassen.

SATZ 4. *Hat der Krümmungstensor $R_j^{*i}{}_{kl}$ die Form (3.6), so ist (4.2) notwendig und hinreichend dafür, daß $R_j^{*i}{}_{kl}$ rekurrente kovariante Ableitung hat. Die Integrierbarkeitsbedingungen von (4.2) sind die Relationen (4.4).*

Aus (4.4) folgt unmittelbar das

KOROLLAR. *Es ist*

$$\partial_t k_r = -\frac{1}{2} \partial_t \kappa_r$$

hinreichend für die Gültigkeit der Relation (4.4).

Reçu par la Rédaction le 12. 6. 1971