COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXI 1970 FASC. 2

О РАЗБИЕНИИ ПЛОСКИХ ФИГУР НА ЧАСТИ МЕНЬШЕГО ДИАМЕТРА

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ (МОСКВА)

В работе [1] К. Борсук поставил весьма интересную задачу, относящуюся к комбинаторной геометрии. Простота и изящество формулировки задачи сразу же привлекли к ней внимание геометров мира. Подкупало также и то, что в двумерном случае задача допускала необычайно красивое элементарно-геометрическое решение. Однако, несмотря на многие усилия, общее решение получить не удавалось. Лишь в 1955 году Эгглстон [2], а вслед за ним Грюнбаум [3] и Хеппеш [4] получили полное решение задачи Борсука в трехмерном случае. Для более высоких размерностей задача полностью не решена до сих пор; имеются лишь частные результаты ([5], [6] и др.).

Несмотря на то, что в двумерном и трехмерном случаях задача Борсука полностью решена, и в этих размерностях имеются некоторые нерешенные вопросы, связанные с задачей Борсука. Решению одного из таких вопросов (в двумерном случае) и посвящена эта заметка.

Прежде всего напомним формулировку задачи Борсука. Все выпуклые множества, рассматриваемые в дальнейшем, предполагаются замкнутыми, ограниченными и расположенными в конечномерном евклидовом пространстве. Через $d(F)$ будет обозначаться диаметр выпуклого множества F:

$$d(F) = \max_{x,y\in F} \varrho(x, y).$$

Далее, через $a(F)$ мы будем обозначать *число Борсука* выпуклого множества F, т.е. наименьшее из таких чисел m, что множество F может быть покрыто m множествами, каждое из которых имеет диаметр, меньший $d(F)$. Нередко говорят не о покрытии фигуры F множествами меньшего диаметра, а о разбиении фигуры F на части меньшего диаметра.

Борсук доказал [1], что для n-мерного шара число Борсука равно $n+1$. В частности, если Φ — круг (двумерный шар), то $a(\Phi) = 3$.

Более того, элегантное геометрическое рассуждение (воспроизведенное, например, в [7], стр. 9-12) показывает, что $a(F) \leqslant 3$ для любой плоской выпуклой фигуры F. Сопоставляя эти факты, Борсук и пришел к постановке следующей проблемы:

Задача Борсука. *Доказать, что для любого n-мерного выпуклого множества F имеет место неравенство $a(F) \leqslant n+1$.*

Как уже отмечалось, для $n = 2$ и 3 эта задача имеет положительное решение. Так как, кроме того, очевидно, что $a(F) > 1$ для любого выпуклого множества F, то, в частности, для двумерных выпуклых множеств мы получаем следующее утверждение: *для любой плоской выпуклой фигуры F число $a(F)$ равно 2 или 3.* Естественно возникает вопрос, как отделить плоские выпуклые фигуры, для которых $a(F) = 2$, от фигур, для которых $a(F) = 3$. Этот вопрос и решается в настоящей заметке.

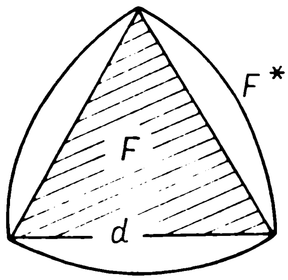

Рис. 1

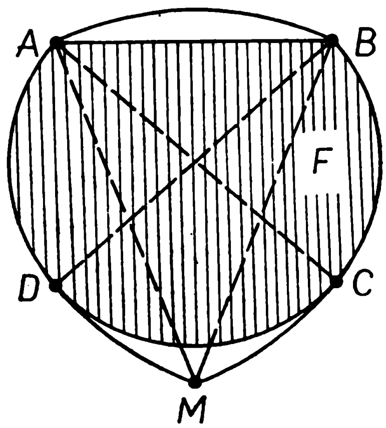

Рис. 2

Для того, чтобы сформулировать теорему, дающую решение указанного вопроса, мы напомним, что *всякая плоская выпуклая фигура диаметра d содержится в некоторой фигуре постоянной ширины d* (или, как мы будем говорить, может быть дополнена до фигуры постоянной ширины d). Этот факт (справедливый для выпуклых множеств произвольной размерности) доказан в работе [8]. Заметим, однако, что в некоторых случаях фигура диаметра d однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d (примером может служить равносторонний треугольник со стороной d, рис. 1). В других же случаях дополнение до фигуры постоянной ширины d неоднозначно (пусть, например, фигура F представляет собой круг, от которого отрезан небольшой сегмент; одной из фигур постоянной ширины d, содержащей F, является круг; другая показана на рис. 2, где каждая из дуг AB, MC, MD является дугой окружности радиуса d).

Теперь мы можем сформулировать основной результат:

Теорема. *Пусть F—плоская фигура диаметра d. Равенство $a(F) = 3$ имеет место в том и только в том случае, если фигура F однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.*

Для получения этого результата мы введем вспомогательное понятие *d-расширения* и докажем ряд лемм. Пусть F—произвольная плоская фигура диаметра, не превосходящего d. Ясно, что можно найти круг радиуса d, целиком содержащий фигуру F (например, если $A \in F$, то круг радиуса d с центром A целиком содержит фигуру F).

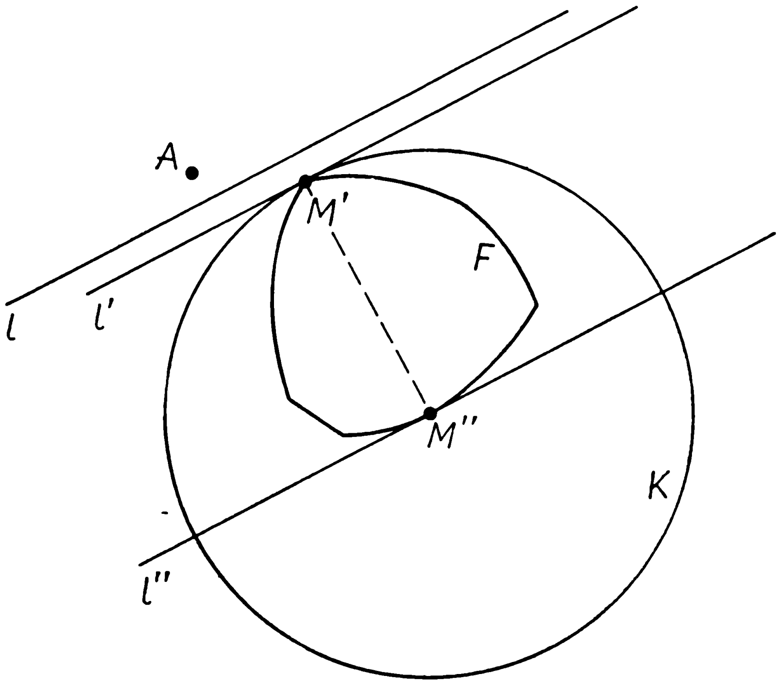

Рис. 3

Пересечение всех кругов радиуса d, содержащих фигуру F, мы обозначим через F^* и назовем *d-расширением* фигуры F. Например, если F есть равносторонний треугольник со стороной d, то F^*—треугольник Релло (рис. 1). Из определения ясно, что d-расширение выпуклой фигуры F (диаметра $\leqslant d$) само является выпуклой фигурой.

Лемма 1. *Если F—фигура постоянной ширины d, то ее d-расширение совпадает с ней самой.*

Доказательство. Ясно, что $F^* \supset F$. Докажем обратное включение. Пусть A—точка, не принадлежащая фигуре F. Тогда существует прямая l, отделяющая точку A от фигуры F (рис. 3). Сдвинув параллельно прямую l, мы получим опорную прямую l' фигуры F, относительно которой точка A и фигура F лежат по разные стороны. Другую опорную прямую, параллельную l', обозначим через l''. Точки, в которых прямые l', l'' встречают границу фигуры F, обозначим через M', M''. Так как F — фигура постоянной ширины, то отрезок

$M'M''$ равен d и перпендикулярен прямым l', l''. Рассмотрим круг K радиуса d с центром в точке M''. Ясно, что $F \subset K$ (ибо $M'' \in F$ и $d(F) = d$). Следовательно, K есть один из кругов, дающих в пересечении фигуру F^*, и потому $F^* \subset K$. Но круг K не содержит точки A, и потому точка A не принадлежит фигуре F^*. Таким образом, $F^* \subset F$.

Лемма 2. *Пусть F — плоская выпуклая фигура диаметра d и Φ — фигура постоянной ширины d, содержащая F. Тогда $F^* \subset \Phi$.*

Доказательство. Из включения $F \subset \Phi$ вытекает, что $F^* \subset \Phi^*$. Но, согласно лемме 1, $\Phi^* = \Phi$, и потому $F \subset \Phi^*$.

Лемма 3. *Пусть F — плоская выпуклая фигура диаметра d. Тогда $d(F^*) = d$.*

Доказательство. Пусть Φ — фигура постоянной ширины d, содержащая F. Тогда, согласно лемме 2, мы имеем $F \subset F^* \subset \Phi$. Следовательно, $d(F) \leqslant d(F^*) \leqslant d(\Phi)$. Так как, далее, $d(F) = d$, $d(\Phi) = d$, то также $d(F^*) = d$.

Лемма 4. *Пусть F — плоская выпуклая фигура диаметра d. Если существует такой круг радиуса d, который содержит фигуру F, и центр которого не принадлежит фигуре F^*, то фигура F неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.*

Доказательство. Пусть K — круг диаметра d, содержащий фигуру F, центр A которого не принадлежит фигуре F^*. Так как F^* есть пересечение всех кругов радиуса d, содержащих фигуру F, и так как F^* не содержит точки A, то найдется круг K' радиуса d, содержащий фигуру F и не содержащий точки A. Центр круга K' обозначим через B. Ясно, что длина отрезка AB больше d (ибо круг K' не содержит точки A).

Присоединим теперь к фигуре F точку A. Мы получим несвязную фигуру $F \cup \{A\}$, диаметр которой, как легко видеть, равен d (действительно, расстояние от „новой" точки A до любой точки фигуры F не превосходит d, так как $F \subset K$). Точно так же, присоединяя к фигуре F точку B, мы получим несвязную фигуру $F \cup \{B\}$, диаметр которой равен d. Выберем теперь какую-нибудь фигуру Φ постоянной ширины d, содержащую $F \cup \{A\}$, и какую-нибудь фигуру Φ' постоянной ширины d, содержащую $F \cup \{B\}$. Ясно, что фигуры Φ и Φ' не могут совпадать (ибо $AB > d$, и потому никакая фигура постоянной ширины d не может содержать обе точки A, B). В то же время каждая из фигур Φ, Φ' содержит фигуру F. Таким образом, F неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.

Лемма 5. *Пусть F — плоская выпуклая фигура диаметра d и F^* — ее d-расширение. Пусть, далее, M — произвольная граничная точка фигуры F^* и l — проходящая через M опорная прямая фигуры F^*. Обо-*

значим через K_l круг радиуса d, касающийся прямой l в точке M и расположенный по ту же сторону от l, что и фигура F^*. Тогда $K_l \supset F^*$. Если при этом точка M не принадлежит фигуре F, то найдутся такие две точки A, B фигуры F, лежащие на окружности круга K_l, что дуга $\cup AB$ этой окружности (меньшая полуокружности) содержит точку M (рис. 4).

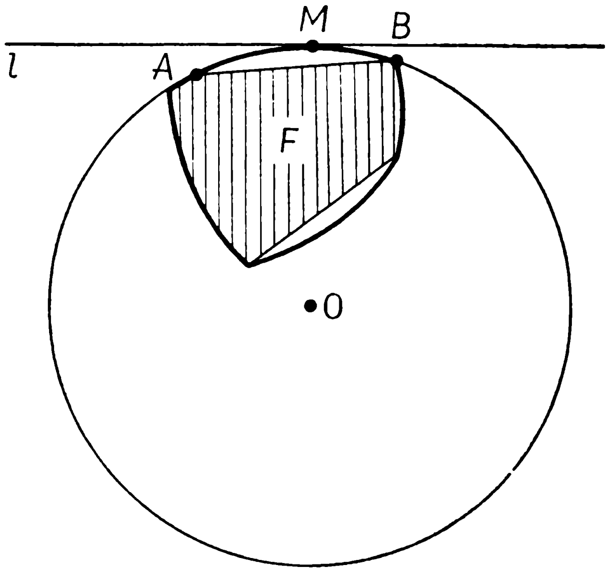

Рис. 4

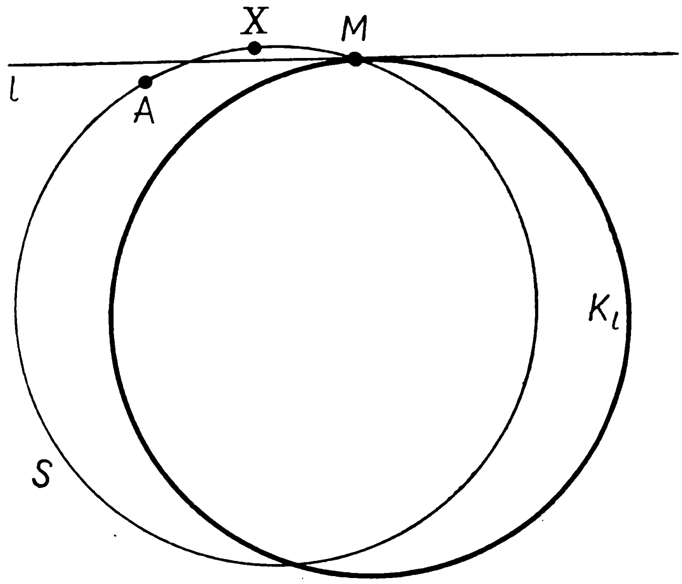

Рис. 5

Доказательство. Допустим, что круг K_l не содержит фигуру F^*, т.е. найдется точка $A \in F^*$, лежащая вне круга K_l. Проведем через точки M и A окружность S радиуса d, центр которой расположен по ту же сторону от l, что и фигура F^*. Так как окружность S отлична от окружности круга K_l, то она не касается прямой l в точке M, т.е. пересекает прямую l. Следовательно, дуга $\cup AM$ окружности S (меньшая полуокружности) пересекает прямую l, т.е. на дуге $\cup AM$ найдется точка X, лежащая по другую сторону от l, чем фигура F^* (рис. 5). Пусть теперь K — произвольный круг радиуса d, содержащий фигуру F. Тогда круг K содержит и фигуру F^* (ибо K входит в число кругов, дающих в пересечении фигуру F^*), и потому A, $M \in K$. Отсюда следует, что круг K содержит целиком и дугу $\cup AM$; в частности, $X \in K$. Итак, любой круг радиуса d, содержащий фигуру F, содержит также точку X, и потому $X \in F^*$. Но это противоречит тому, что l — опорная прямая фигуры F^*. Полученное противоречие доказывает, что $K_l \supset F^*$.

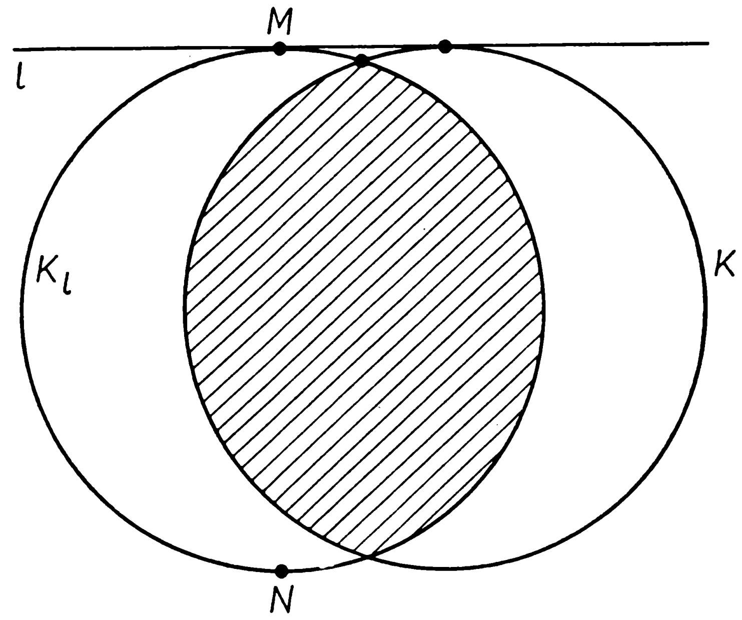

Рис. 6

Допустим теперь, что точка M не принадлежит фигуре F. Обозначим через N точку круга K_l, диаметрально противоположную точке M. Для простоты языка условимся считать прямую l „горизонтальной”, а круг K_l — лежащим „под” прямой l (рис. 6). Если бы левая полуокружность, определяемая точками M и N, не содержала ни одной точки фигуры F, то круг K_l можно было бы сдвинуть вправо, и сдвинутый круг K' все еще содержал бы фигуру F (а значит, и фигуру F^*). Но тогда фигура F^* содержалась бы в пересечении кругов K_l и K', и прямая l не могла бы быть опорной для фигуры F^*. Это рассуждение показывает, что левая полуокружность содержит (хотя бы одну) точку A фигуры F. Точно так же, правая полуокружность содержит точку B фигуры F. Далее, так как A, B, $M \in F^*$, то $AM \leqslant d$, $BM \leqslant d$, и потому та из двух дуг, определяемых на окружности круга K_l точками A и B, которая содержит точку M, будет меньше полуокружности (она даже не превосходит шестой части окружности, ибо $AB \leqslant d$).

Лемма 6. *Фигура F диаметра d в том и только в том случае однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d, если ее d-расширение F^* является фигурой постоянной ширины d.*

Доказательство. Предположим, что F^* есть фигура постоянной ширины d. Тогда любая фигура постоянной ширины d, содержащая F, должна содержать также и F^* (лемма 2) и, следовательно, должна совпадать с F^*. Поэтому F допускает однозначное дополнение до фигуры постоянной ширины d.

Пусть теперь F^* не есть фигура постоянной ширины d. Тогда можно провести две параллельные опорные прямые l, l' фигуры F^*, расстояние между которыми меньше d. Пусть M — точка, в которой прямая l встречает фигуру F^*. Обозначим через K_l круг радиуса d, касающийся прямой l в точке M и расположенный по ту же сторону прямой l, что и фигура F^*. Согласно лемме 5, $K_l \supset F^*$. Ясно при этом, что центр A круга K_l не принадлежит фигуре F^* (ибо фигура F^* лежит в полосе между прямыми l, l', а центр A лежит вне этой полосы). Но тогда, согласно лемме 4, фигура F неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d.

Лемма 7. *Если фигура F диаметра d неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d, то $a(F) = 2$.*

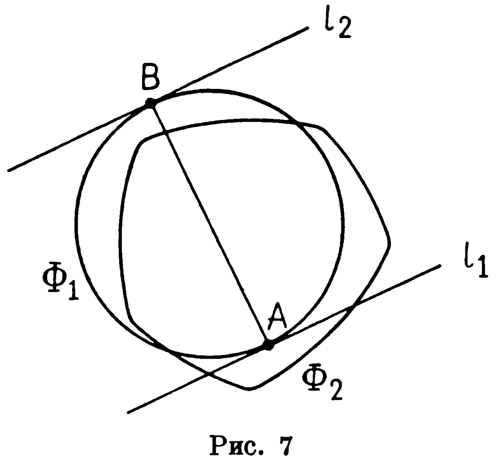

Рис. 7

Доказательство. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две различные фигуры постоянной ширины d, содержащие F. Ясно, что найдется граничная точка A фигуры Φ_1, лежащая внутри фигуры Φ_2 (в противном случае мы имели бы $\Phi_1 \supset \Phi_2$ и фигуры Φ_1, Φ_2 должны были бы совпадать). Через точку A можно провести опорную прямую l_1 фигуры Φ_1. Пусть l_2 — вторая опорная прямая фигуры Φ_1, параллельная l_1, а B — точка встречи этой опорной прямой с фигурой Φ_1 (рис. 7). Тогда прямая

AB перпендикулярна прямым l_1, l_2. Мы докажем, что прямая AB рассекает фигуру F на две части, каждая из которых имеет диаметр, меньший d.

Допустим, напротив, что какая-нибудь из этих частей имеет диаметр d, т.е. по одну сторону прямой AB найдутся точки $C, D \in F$, находящиеся друг от друга на расстоянии d. Тогда отрезки AB и CD являются диаметрами фигуры Φ_1 постоянной ширины (напомним, что $F \subset \Phi_1$), и потому отрезки AB и CD должны либо пересекаться в точке, являющейся внутренней для обоих отрезков AB, CD, либо же должны иметь общую концевую точку (см. [9], стр. 95, задача 83). Первое невозможно, поскольку точки C, D расположены по одну сторону прямой AB. Следовательно, отрезки AB и CD должны иметь общую концевую точку. Но точка B лежит вне фигуры Φ_2 (ибо A лежит внутри этой фигуры и $AB = d$), а значит и вне фигуры F, в то время как $C, D \in F$. Следовательно, точка B не может быть общим концом отрезков AB и CD. Наконец, точка, A, лежащая внутри Φ_2, отстоит от любой точки фигуры Φ_2 менее, чем на d, и потому не может совпадать с концом отрезка CD, расположенного в Φ_2 и имеющего длину d.

Полученное противоречие показывает, что каждая из частей, на которые прямая AB рассекает фигуру F, имеет диаметр, меньший d, и потому $a(F) = 2$.

Лемма 8. *Если F — плоская фигура постоянной ширины d, то $a(F) = 3$; более того, граница Γ фигуры F не может быть покрыта двумя множествами диаметра $< d$.*

Доказательство. Допустим, напротив, что $a(F) = 2$, и пусть $F = Q_1 \cup Q_2$, где Q_1, Q_2 — замкнутые множества, каждое из которых имеет диаметр, меньший d. Ясно, что граница Γ фигуры F не может целиком содержаться ни в одном из множеств Q_1, Q_2, так как диаметр множества Γ равен d. Следовательно, каждое из пересечений $\Gamma \cap Q_1$, $\Gamma \cap Q_2$ непусто. А так как множество Γ связно, то замкнутые множества $\Gamma \cap Q_1$, $\Gamma \cap Q_2$ должны пересекаться, т.е. существует точка $A \in \Gamma \cap Q_1 \cap Q_2$. Пусть AB — диаметр фигуры F постоянной ширины, имеющий A одним из своих концов, так что $B \in \Gamma$ и $AB = d$. Ясно, что если $B \in Q_1$, то $d(Q_1) = d$, а если $B \in Q_2$, то $d(Q_2) = d$. В любом случае мы получаем противоречие с предположением, что каждое из множеств Q_1, Q_2 имеет диаметр, меньший d.

Лемма 9. *Если F — плоская фигура, диаметр которой меньше d, то ее d-расширение F^* также имеет диаметр, меньший d.*

Доказательство. Обозначим диаметр фигуры F через d', так что $d' < d$. Далее, d'-расширение фигуры F обозначим через F', а d-расширение фигуры F будем по-прежнему обозначать через F^*.

Пусть точка M плоскости не принадлежит фируге F', т.е. существует круг K' радиуса d', содержащий фигуру F, но не содержащий точку M. Обозначим через A ближайшую к M точку круга K' и построим круг K радиуса d, содержащий круг K' и внутренним образом касающийся его в точке A. Ясно, что круг K также не содержит точку M (и содержит фигуру F), откуда следует, что M не принадлежит фигуре F^*. Итак, если $M \notin F'$, то $M \notin F^*$, и потому $F^* \subset F'$. Но d'-расширение F' фигуры F диаметра d' имеет, согласно лемме 3, диаметр d'. Следовательно, $d(F^*) \leqslant d(F') = d' < d$.

Лемма 10. *Если фигура F диаметра d однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d, то $a(F) = 3$.*

Доказательство. Допустим, напротив, что $a(F) = 2$, и пусть $F = Q_1 \cup Q_2$, где Q_1, Q_2 — замкнутые множества, каждое из которых имеет диаметр, меньший d. Так как F однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d, то F^* есть фигура постоянной ширины d (лемма 6). Обозначим d-расширения фигур Q_1, Q_2 через Q_1^*, Q_2^*. Согласно лемме 9, каждая из фигур Q_1^*, Q_2^* имеет диаметр, меньший d. Границу фигуры F^* обозначим через Γ. Мы докажем, что $\Gamma \subset Q_1^* \cup Q_2^*$, чем и будет установлено противоречие с выводами леммы 8.

Пусть M — произвольная точка кривой Γ. Если $M \in F$, то, очевидно, $M \in Q_1 \cup Q_2 \subset Q_1^* \cup Q_2^*$. Пусть теперь точка M не принадлежит множеству F. Проведем опорную прямую l фигуры F^*, проходящую через точку M, и построим круг K_l радиуса d, касающийся прямой l в точке M и расположенный по ту же сторону от l, что и фигура F^*. Центр N этого круга принадлежит фигуре F^* (ибо $MN \perp l$ и $MN = d$, т.е. MN есть диаметр фигуры F^* постоянной ширины d). Так как точка M не принадлежит фигуре F, то, согласно лемме 5, найдутся такие две точки A, B фигуры F, лежащие на окружности круга K_l, что дуга $\cup AB$ этой окружности (меньшая полуокружности) содержит точку M. Таким образом, $AN = BN = d$, т.е. AN и BN являются диаметрами фигуры F^* постоянной ширины d. Из этого следует, что N есть угловая точка линии Γ и вся дуга $\cup AB$ принадлежит кривой Γ (см. [9], стр. 95, задача 83), так что M есть обычная (неугловая) точка кривой Γ. Но тогда ясно, что точка N должна принадлежать фигуре F (ибо в противном случае, поменяв ролями M и N, мы с помощью аналогичного рассуждения получили бы, что M — угловая, а N — неугловая точка линии Γ).

Так как $N \in F$, то $N \in Q_1 \cup Q_2$. Допустим, для определенности, что $N \in Q_1$. Так как $AN = BN = d$, а множество Q_1 имеет диаметр, меньший d, то точки A, B не принадлежат множеству Q_1. А так как $A, B \in F = Q_1 \cup Q_2$, то $A, B \in Q_2$. Дуга $\cup AB$ радиуса d, содержащая точку M, очевидно, принадлежит любому кругу радиуса d, содержащему точки A и B. В частности, эта дуга принадлежит любому кругу радиуса d, содержащему фигуру Q_2. Отсюда вытекает, что $M \in Q_2^*$. (Аналогично, если $N \in Q_2$, то $M \in Q_1^*$). Таким образом, $M \in Q_1^* \cup Q_2^*$.

Итак, любая точка $M \in \Gamma$ (как принадлежащая, так и не принадлежащая фигуре F) содержится в $Q_1^* \cup Q_2^*$, что и доказывает лемму.

Из лемм 7 и 10 непосредственно вытекает справедливость сформулированной в начале заметки теоремы.

Заметим в заключение, что доказанная теорема может быть, согласно лемме 6, сформулирована следующим образом: *пусть F — плоская фигура диаметра d; равенство $a(F) = 3$ имеет место в том и только в том случае, если F^* является фигурой постоянной ширины d.* Отметим также следующий любопытный факт: *для любой плоской фигуры F диаметра d имеет место равенство $a(F) = a(F^*)$.* В самом деле, если $a(F) = 2$, то существуют две различные фигуры Φ_1, Φ_2 постоянной ширины d, содержащие F. Но тогда $F^* \subset \Phi_1$, $F^* \subset \Phi_2$, т.е. F^* также неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины d. Следовательно, $a(F^*) = 2$, т.е. $a(F^*) = a(F)$. Если же $a(F) = 3$, то, подавно, $a(F^*) = 3$.

Для случая пространственных (трехмерных) тел доказанная теорема непосредственно не обобщается. Так, например для *правильного тетраэдра F* с ребром d мы имеем, очевидно, $a(F) = 4$, т.е. $a(F)$ принимает свое максимальное значение. В то же время тело F неоднозначно дополняется до тела постоянной ширины d (ср. [9], стр. 103-104). Таким образом, равенство $a(F) = 4$ в случае пространственных тел диаметра d связано с какими-то более тонкими обстоятельствами, чем однозначность дополнения до тела постоянной ширины d.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), стр. 177-190.

[2] H. G. Eggleston, *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, Jurnal of the London Mathematical Society 30 (1955), стр. 11-24.

[3] B. Grünbaum, *A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 53 (1957), стр. 776-778.

[4] A. Heppes, *Térbeli ponthalmazok felosztása kisebb átmérőjü részhalmazok összegére*, Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményi 1 (1957), стр. 413-416.

[5] H. Hadwiger, *Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers*, Commentarii Mathematici Helvetici 18 (1945/46), стр. 73-75; Mitteilung betreffend meiner Note *Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers*, ibidem 19 (1946/47), стр. 72-73.

[6] H. Lenz, *Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers*, Archiv der Mathematik 6 (1955), стр. 413-416.

[7] В. Г. Болтянский и И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии,* Москва 1965.

[8] K. Reinhardt, *Über einen Satz von Herrn H. Tietze,* Jahres-Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 38 (1929), стр. 191-192.

[9] И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры,* Москва 1951.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА АН СССР

Reçu par la Rédaction le 12. 1. 1969