COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XXVI DÉDIÉ À M. WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI 1972

ESPACE À STRUCTURE CONFORME PRESQUE SYMPLECTIQUE

PAR

RADU MIRON (JASSY)

Les structures presque symplectiques et conformes presque symplectiques ont été définies et étudiées par Ehresman, Lee [1], Liberman [2], Lichnerowicz [3] et Tondeur [9]. Le Professeur W. Ślebodziński [8] a apporté des contributions remarquables à la théorie des espaces doués de telles structures.

Dans une note publiée en 1967 (voir [4]), j'ai étudié les connexions linéaires compatibles avec les structures conformes presque symplectiques et quelques cas subordonnés. Cette note ne contenait que des résultats. Ici, la théorie des connexions compatibles avec une structure conforme presque symplectique sera présentée en détail et quelques résultats nouveaux sur les structures conformes presque symplectiques, presque symplectiques et conformes symplectiques seront établis. Certains résultats de [4] ont été developpés par Oproiu [7].

1. Notations. Soit M une C^∞-variété de dimension $2n$, $\mathfrak{F}(M)$ l'algèbre des C^∞-fonctions, $\tau_q^p(M)$ le $\mathfrak{F}$-module des champs de tenseurs du type (p, q), $\mathfrak{X}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs, $\mathfrak{X}^*(M)$ le $\mathfrak{F}$-module des champs de 1-formes et $\Lambda^q(M)$ le $\mathfrak{F}$-module des champs de q-formes sur M.

Si $\Omega \in \Lambda^2(M)$, posons

$$(1.1) \qquad g(X, Y) = \langle X \wedge Y, \Omega\rangle \quad \text{où } X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$

g sera appelé *tenseur de la forme* Ω.

Posons aussi

$$(1.2) \qquad K(X, Y, Z) = \langle X \wedge Y \wedge Z, d\Omega\rangle \quad \text{pour } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

on a, comme on sait,

$$(1.3) \qquad K(X, Y, Z) = Xg(Y, Z)+Yg(Z, X)+Zg(X, Y)- \\ -g([X, Y], Z)-g([Y, Z], X)-g([Z, X], Y).$$

Si $B \in \tau_q^2(M)$ et $\Theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, considérons $\Theta B \in \tau_q^1(M)$ et $\Theta \cdot B \in \tau_q^1(M)$; posons (voir [5])

$$(1.4)\qquad \begin{aligned}(\Theta B)(X_1, \ldots, X_q; \tau) &= B(X_1, \ldots, X_q; \Theta, \tau),\\ (\Theta \cdot B)(X_1, \ldots, X_q; \tau) &= B(X_1, \ldots, X_q; \tau, \Theta)\end{aligned}$$

pour $\tau \in \mathfrak{X}^*(M)$ et $X_i \in \mathfrak{X}(M)$.

Aussi, lorsque $B \in \tau_0^2(M)$ et $A \in \tau_2^0(M)$, on a avec $AB \in \tau_1^1(M)$ et $A \cdot B \in \tau_1^1(M)$

$$(1.5)\qquad \begin{aligned}(AB)(X; \Theta) &= A(X, \Theta \cdot B),\\ (A \cdot B)(X; \Theta) &= A(X, \Theta B) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{X}(M).\end{aligned}$$

Soit encore

$$(1.6)\qquad P_X(X_2, \ldots, X_q) = P(X, X_2, \ldots, X_q) \quad \text{pour } P \in \tau_q^p(M).$$

Alors, en conséquence des ces notations, si $\Phi \in \tau_2^2(M)$ et $P \in \tau_2^1(M)$, on a pour $\Phi P \in \tau_2^1(M)$

$$(1.7)\qquad (\Phi P)(X, Y; \Theta) = (\Theta \cdot \Phi)(Y, P_X),$$

où $(\Theta \cdot \Phi)(Y, P_X)$ est la valeur du tenseur $\Theta \cdot \Phi$ par rapport à $Y \in \mathfrak{X}(M)$ et à $P_X \in \tau_1^1(M)$. Dans un système de coordonnés locales, on a $(\Phi P)_{ij}^l = \Phi_{jh}^{kl} P_{ik}^h$.

Enfin, si Φ, $\Psi \in \tau_2^2(M)$, considérons le tenseur $\Phi\Psi \in \tau_2^2(M)$

$$(\Phi\Psi)(X, Y; \Theta, \tau) = (\Theta \cdot \Phi)\big(X, (\tau\Psi)_Y\big),$$

qui, dans un système de coordonnés locales, a la forme $(\Phi\Psi)_{ij}^{lk} = \Phi_{ih}^{mk} \Psi_{mj}^{lh}$.

2. Structures conformes presque symplectiques. Un champ de 2-formes Ω sur M ayant la propriété $\Omega^n \neq 0$ définit d'après (1.1), un champ de tenseurs $g \in \tau_2^0(M)$, antisymétriques non dégénérés. Soit $\tilde{g} \in \tau_0^2(M)$ le champ donné par la condition

$$(2.1)\qquad g \cdot \tilde{g} = I.$$

Il est util de considérer le champ $\tilde{g}^* \in \tau_0^2(M)$ ayant la propriété

$$(2.2)\qquad \tilde{g}^* = -\tilde{g}.$$

On peut définir alors les *opérateurs d'Obata* [6]

$$(2.3)\qquad \Phi = \tfrac{1}{2}(I \otimes I - g \otimes \tilde{g}^*) \quad \text{et} \quad \Phi^* = \tfrac{1}{2}(I \otimes I + g \otimes \tilde{g})$$

ayant les propriétés

$$(2.4)\qquad \Phi + \Phi^* = I \otimes I, \quad \Phi\Phi = \Phi, \quad \Phi^*\Phi^* = \Phi^* \quad \text{et} \quad \Phi\Phi^* = \Phi^*\Phi = 0.$$

On démontre sans difficulté le

LEMME 2.1. *Pour qu'une équation tensorielle de la forme $\Phi^* P = Q$ ait des solutions, il faut et if suffit que $\Phi Q = 0$. La solution générale est $P = Q + \Phi V$ où $V \in \tau_2^1(M)$.*

Les transformations de $\Lambda^q(M)$ de la forme

$$\Omega' = e^{\varphi}\Omega \quad \text{où } \varphi \in \mathfrak{F}(M) \tag{2.5}$$

déterminent un groupe sur $\Lambda^q(M)$.

La relation binaire $\Omega \sim \Omega' \Leftrightarrow \Omega' = e^{\varphi}\Omega$ est une équivalence sur $\Lambda^q(M)$. La classe d'équivalence, dans $\Lambda^q(M)$, par rapport à $\sim$ s'appelle *q-pseudoforme sur M*. La classe de $\Omega \in \Lambda^q(M)$ sera désignée par $\hat{\Omega}$.

Définition 1. Une *structure conforme presque symplectique sur M*, désignée dorénavant en abrégé par c. p. s., est entendue comme celle définie par une C^{∞}-2-pseudoforme $\hat{\Omega}$ pour laquelle il existe un $\Omega \in \hat{\Omega}$ tel que l'on a $\Omega^n \neq 0$ sur M.

Si g est le tenseur de $\Omega \in \hat{\Omega}$ et g' est le tenseur de $\Omega' \in \hat{\Omega}$, on a

$$g' = e^{\varphi} g \tag{2.6}$$

et réciproquement. On a en outre

$$\tilde{g}' = e^{-\varphi}\tilde{g}. \tag{2.6'}$$

Par conséquent, les opérateurs (2.3) dépendent de la structure c. p. s. $\hat{\Omega}$ et ne dépend pas de $\Omega \in \hat{\Omega}$.

3. Connexions compatibles avec la structure $\hat{\Omega}$.

PROPOSITION 1. *Lorsque, ∇ étant une connexion linéaire, il existe un $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ tel que*

$$\nabla_X g = 2\omega(X) g \quad \textit{pour } X \in \mathfrak{X}(M) \tag{3.1}$$

et g étant le tenseur de $\Omega \in \hat{\Omega}$, on a en vertu de (2.6)

$$\nabla_X \tilde{g}' = 2(\omega + \tfrac{1}{2} d\varphi)(X) g'. \tag{3.2}$$

Définition 2. Une connexion linéaire ∇ s'appelle *compatible avec la structure c. p. s.* $\hat{\Omega}$ s'il existe un $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ satisfaisant à l'équation (3.1) où g est le tenseur de la forme $\Omega \in \hat{\Omega}$.

PROPOSITION 3.2. *∇ étant une connexion linéaire compatible avec la structure $\hat{\Omega}$ on a*

$$\nabla_X \tilde{g} = -2\omega(X)\tilde{g}, \quad \nabla_X \Phi = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_X \Phi^* = 0 \quad \textit{pour } X \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.3}$$

Le problème se pose de savoir s'il existe une connexion linéaire ∇ satisfaisant à l'équation (3.1).

THÉORÈME 3.3. *Les champs* $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ *et* $\Omega \in \hat{\Omega}$ *étant fixés, l'ensemble de toutes les connexions compatibles avec la structure c. p. s.* $\hat{\Omega}$ *est donné par la formule*

(3.4) $\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}(\nabla_X g)_Y \cdot \tilde{g} - \omega(X) Y + \Phi_Y V_X$ *pour* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

où $\overset{\circ}{\nabla}$ *est une connexion linéaire fixée sur* M *et* $V \in \tau_2^1(M)$ *est arbitraire.*

En effet, en posant $\nabla = \overset{\circ}{\nabla} + A$, on a d'après (3.1)

$$(\Phi^* A)(X, Y) = \tfrac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}_X g)_Y \cdot \tilde{g} - \omega(X) Y$$

et le lemme 2.1 entraîne (3.4).

COROLLAIRE 3.4. *Si la connexion* ∇ *satisfait à* (3.1) *pour les champs* $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ *et* $\Omega \in \hat{\Omega}$ *donnés, toutes les connexions* ∇' *satisfaisant à* (3.1) *pour les mêmes champs sont données par la formule*

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y - (\omega' - \omega)(X) Y + \Phi_Y w_X \tag{3.5}$$

où $w \in \tau_2^1(M)$ *et* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

COROLLAIRE 3.5. *L'équation* (3.5) *équivaut à la suivante:*

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + p(X) Y + p(Y) X - g(X, Y)(p\tilde{g}) + \Phi_Y V'_X. \tag{3.6}$$

En effet, (3.5) conduit à (3.6) pour $V = 2I \otimes p + V'$ et réciproquement, (3.6) entraîne (3.5) d'une manière analogue.

COROLLAIRE 3.6. (i) $p \in \mathfrak{X}^*(M)$ *étant arbitraire,* (3.6) *détermine des transformations* $\nabla \to \nabla'$ *qui, par rapport au produit des transformations, est un groupe commutatif* $\mathcal{G}$.

(ii) *Il existe un épimorphisme naturel* h *du groupe additif* $\mathfrak{X}^*(M) \oplus \tau_2^1(M)$ *sur* $\mathcal{G}$.

(iii) *On a* $\ker h = (0) \oplus \overset{\circ}{\tau}{}_2^1(M)$ *où les* $V \in \overset{\circ}{\tau}{}_2^1(M)$ *satisfont à la condition* $\Phi V = 0$.

4. La courbure d'une connexion compatible avec une structure c. p. s.

LEMME 4.1. *On a pour tout* $g \in \tau_2^0(M)$

$$\begin{aligned}([\nabla_X, \nabla_Y] g)(U, V) &= -g\big(R(X, Y) U, V\big) - g\big(U, R(X, Y) V\big) + (\nabla_{[X,Y]} g)(U, V) \\ &\qquad \text{où } X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(M),\end{aligned} \tag{4.1}$$

R *étant la courbure de* ∇.

La démonstration est élémentaire en partant de la formule

$$(\nabla_X L)(X_1, \ldots, X_q) = X L(X_1, \ldots, X_q) - \sum_{i=1}^{q} L(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_q)$$

où $L \in \tau_q^0(M)$.

Lemme 4.2. *Si la connexion ∇ satisfait à* (3.1), *on a*

$$(4.2)\qquad (d\omega)(X, Y) = -\operatorname{trace} R(X, Y) \quad \textit{pour } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

On a en effet d' après (4.1) et (3.1)

$$(4.3)\qquad 2g(U, V)(d\omega)(X, Y) = -g\big(R(X, Y)U, V\big) - g\big(U, R(X, Y)V\big)$$

et (4.3) entraîne (4.2) en vertu de (2.1).

Posons

$$(4.4)\qquad R^*(X, Y) = R(X, Y) - \frac{1}{2n} I \operatorname{trace} R(X, Y) \quad \text{pour } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Théorème 4.4. *On a pour toute connexion ∇ compatible avec une structure c. p. s. $\hat{\Omega}$*

$$(4.5)\qquad \Phi^* R^*(X, Y) = 0, \quad \Phi^* \nabla_{X_1} R^*(X, Y) = 0, \ldots,$$
$$\Phi^* \nabla_{X_p} \ldots \nabla_{X_1} R^*(X, Y) = 0, \ldots \quad \textit{où } X, Y, X_i \in \mathfrak{X}(M).$$

Démonstration. (4.1) et (3.1) entraînent (4.3). En remplaçant dans (4.3) $R(X, Y)$ et $d\omega$ par leurs valeurs de (4.4) et de (4.2) respectivement, il vient

$$-2g(U, V)\frac{1}{2n}\operatorname{trace} R(X, Y) = -g\Big(R^*(X, Y)U +$$
$$+\frac{U}{2n}\operatorname{trace} R(X, Y), V\Big) - g\Big(U, R^*(X, Y)V + \frac{V}{2n}\operatorname{trace} R(X, Y)\Big),$$

ce qui équivaut à

$$(4.5')\qquad g\big(R^*(X, Y)U, V\big) + g\big(U, R^*(X, Y)V\big) = 0,$$

où $\Phi^* R^*(X, Y) = 0$. Alors, les équations (4.5) résultent de la proposition 3.2.

Remarques. (a) Chacune des équations (4.5) est invariante par rapport aux transformations (2.5).

(b) Le système des équations (4.5) équivaut au suivant:

$$g\big(R^*(X, Y)U, V\big) + g\big(U, R^*(X, Y)V\big) = 0,$$
$$g\big(\nabla_{X_1} R^*(X, Y)U, V\big) + g\big(U, \nabla_{X_1} R^*(X, Y)V\big) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En appliquant un théorème connu d'Eisenhart, on en déduit l'existence locale d'un champ $g \in \tau_2^0$ qui détermine une structure c. p. s. compatible avec un connexion linéaire ∇ donné.

5. Connexions compatibles avec les structures presque symplectiques.

Définition 3. Une connexion linéaire ∇ compatible avec une structure c. p. s. $\hat{\Omega}$ s'appelle *connexion presque symplectique* (p. s.), lorsque il existe un champs $\Omega' \in \hat{\Omega}$ avec le tenseur g' tel que

$$\nabla_X g' = 0 \quad \text{pour } X \in \mathfrak{X}(M). \tag{5.1}$$

Proposition 5.1. *Pour qu'une connexion ∇ compatible avec la structure $\hat{\Omega}$ soit une connexion p. s., il faut et il suffit qu'il existe pour tout champs $\Omega \in \hat{\Omega}$ une fonction $\varphi \in \mathfrak{F}(M)$ telle que*

$$\nabla_X g = -(X\varphi) g \quad \textit{pour } X \in \mathfrak{X}(M), \tag{5.2}$$

g étant le tenseur de Ω.

En effet, (5.1) et (2.5) entraînent (5.2). Réciproquement, (5.2) entraîne $\nabla_X(e^{\varphi} g) = 0$.

Si l'on fixe le champs $\Omega' \in \hat{\Omega}$ pour lequel on a (5.1), la structure est presque symplectique sur M.

En posant $\omega = 0$ dans le théorème 3.3, on obtient la formule de Tondeur [9].

Proposition 5.2. *Pour qu'une connexion ∇ vérifiant l'équation* (3.1) *soit une connexion p. s., il faut et il suffit que ω soit une forme exacte sur M.*

C'est une conséquence de (3.2).

Proposition 5.3. *Si ∇ est une connexion p. s., sa courbure a les propriétés suivantes:*

(a) trace $R(X, Y) = 0$,

(b) $\Phi^* R(X, Y) = 0$, $\Phi^* \nabla_{X_1} R(X, Y) = 0, \ldots, \Phi^* \nabla_{X_p} \ldots \nabla_{X_1} R(X, Y) = 0, \ldots$

C'est une conséquence du lemme 4.2.

Réciproquement, si le groupe de cohomologie $H^1(M)$ est trivial, toute 1-forme fermée est exacte et, par suite, $d\omega = 0$ implique $\omega = d\varphi$. En appliquant le lemme 4.2, on en déduit la

Proposition 5.4. *Si la connexion ∇, compatible avec la structure c. p. s. $\hat{\Omega}$, a la propriété* (a) *pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et le premier groupe de cohomologie de la variété M est trivial, ∇ est une connexion p. s.*

6. Connexions compatibles avec les structures conformes symplectiques. Une autre classe de structures c. p. s. $\hat{\Omega}$, intéressante par ses applications, est celle des structures conformes symplectiques.

Définition 4. Une structure c. p. s. $\hat{\Omega}$ s'appelle *conforme symplectique*, en abrégé c. s., s'il existe pour tout $\Omega \in \hat{\Omega}$ un $\sigma \in \mathfrak{X}^*(M)$ tel que

$$d\Omega = \sigma \wedge \Omega. \tag{6.1}$$

LEMME 6.1. *Si une 2-forme $\Omega \in \hat{\Omega}$ vérifie* (6.1), *on a pour tout champs $\Omega' \in \hat{\Omega}$ tel que $\Omega' = e^{\varphi}\Omega$*

$$d\Omega' = \sigma' \wedge \Omega' \quad \text{où } \sigma' = \sigma + d\varphi.$$

LEMME 6.2. *Pour $n = 1$, toute structure c. p. s. $\hat{\Omega}$ est c. s.*

LEMME 6.3. (6.1) *équivaut à*

$$K(X, Y, Z) = \sigma(X)g(Y, Z) + \sigma(Y)g(Z, X) + \sigma(Z)g(X, Y) \quad \text{pour } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{6.2}$$

THÉORÈME 6.4. *Si $n > 1$, toute structure c. p. s. $\hat{\Omega}$ qui est c. s. est une structure intégrable.*

En effet, en éliminant σ de (6.2), on en tire par contraction (voir [7])

$$0 = C(X, Y, Z)$$
$$= K(X, Y, Z) - \frac{1}{2n-2}[H(Z)g(X, Y) + H(X)g(Y, Z) + H(Y)g(Z, X)],$$

où $H(X) = K(X, \tilde{g})$. Alors, d'après un résultat de Lee (voir [1]), la structure $\hat{\Omega}$ est intégrable.

Les structures c. s. peuvent être caractérisées à l'aide des connexions compatibles avec ces structures.

LEMME 6.5. *On a pour toute connexion ∇ vérifiant* (3.1)

$$K(X, Y, Z) - \{g(T(X, Y), Z) + g(T(Y, Z), X) + g(T(Z, X), Y)\}$$
$$= 2\{\omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(Z, X) + \omega(Z)g(X, Y)\} \quad \text{où } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{6.3}$$

T étant la torsion de la connexion ∇.

On arrive à ce résultat par la permutation cyclique de X, Y et Z dans l'équation $(\nabla_X g)(Y, Z) = 2\omega(X)g(Y, Z)$ et par l'addition membre à membre de toutes ces égalités.

LEMME 6.6. (6.3) *équivaut à*

$$(\tilde{g}K)(X, Y) - \{3T(X, Y) + 2\Phi_X T_Y - 2\Phi_Y T_X\}$$
$$= 2\{\omega(X)Y - \omega(Y)X + g(X, Y)(\omega\cdot\tilde{g})\} \tag{6.3'}$$

où

$$(\tilde{g}K)(X, Y; \Theta) = K(\Theta\tilde{g}, X, Y) \quad \text{pour } X, Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ et } \Theta \in \mathfrak{X}^*(M). \tag{6.3''}$$

Par rapport aux transformations (3.5) les tenseurs de torsion T at T' des connexions ∇ et ∇' se transforment comme suit:

$$T'(X, Y) = T(X, Y) + (\omega - \omega')(X)Y - (\omega - \omega')(Y)X + \Phi_Y w_X - \Phi_X w_Y.$$

Compte tenu de (6.3′) on a

$$(\tilde{g}K)(X, Y)-3\{T'(X, Y)+(\omega-\omega')(X)Y-(\omega'-\omega)(Y)X+ +\Phi_X w_Y-\Phi_Y w_X\}-2(\Phi_X T_Y-\Phi_Y T_X) = 2\{\omega(X)Y-\omega(Y)X+g(X, Y)(\omega\cdot\tilde{g})\}$$

et en y posant $w = \frac{2}{3}T$, il vient

$$(\tilde{g}K)(X, Y)-3\{T'(X, Y)-g(X, Y)\big((\omega'-\omega)\cdot\tilde{g}\big)\} = (3\omega'-\omega)(X)Y-(3\omega'-\omega)(Y)X+g(X, Y)(3\omega'-\omega)\cdot\tilde{g}. \tag{6.4}$$

LEMME 6.7. *Si la connexion ∇ satisfait à* (3.1), *il existe une connexion ∇' satisfaisant à l'équation $\nabla'_X\, g = 2\omega'(X)g$ et à* (6.4).

THÉORÈME 6.8. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la structure c. p. s. $\hat{\Omega}$ soit c. s. est l'existence d'une connexion ∇ compatible avec la structure $\hat{\Omega}$ et telle que*

$$H(X, Y) = T(X, Y)-g(X, Y)(\tau\cdot\tilde{g}) = 0, \tag{6.5}$$

où τ est la contraction de T.

En effet, si l'on admet (6.5), on a en posant $T(X, Y) = g(X, Y)(\tau\cdot\tilde{g})$ dans (6.3)

$$K(X, Y, Z)-\{g(X, Y)\tau(Z)+g(Y, Z)\tau(X)+g(Z, X)\tau(Y)\} = 2\{\omega(X)g(Y, Z)+\omega(Y)g(Z, X)+\omega(Z)g(X, Y)\}.$$

Pour $\sigma = \tau+2\omega$, le lemme 6.3 s'applique et il en résulte que $\hat{\Omega}$ est une structure c. s.

Réciproquement, si l'on admet que la structure $\hat{\Omega}$ est c. s., le lemme 6.3 montre qu'il existe une forme $\sigma\in\mathfrak{X}^*(M)$ satisfaisant à (6.2). Par suite,

$$(\tilde{g}K)(X, Y) = \sigma(X)Y-\sigma(Y)X+g(X, Y)(\sigma\cdot\tilde{g}).$$

En appliquant le lemme 6.7, on trouve

$$3\{T'(X, Y)-g(X, Y)(\omega'-\omega)\cdot\tilde{g}\} = (\sigma+\omega-3\omega')(X)Y-(\sigma+\omega-3\omega')(Y)X+g(X, Y)(\sigma+\omega-3\omega')\cdot\tilde{g}.$$

Soit ∇' une connexion pour laquelle $\nabla'_X\, g = \frac{2}{3}(\sigma+\omega)(X)g$. Alors la formule précédente donne

$$T'(X, Y) = g(X, Y)(\omega'-\omega)\cdot\tilde{g}. \tag{6.6}$$

En même temps, $T' = g\otimes\big((\omega'-\omega)\cdot\tilde{g}\big)$, d'où (6.5).

Enfin quelques observations.

PROPOSITION 6.9. *L'équation*

$$H(X, Y) = T(X, Y) - g(X, Y)(\tau \cdot \tilde{g}) = 0$$

équivaut à

$$\tilde{H}(X, Y) = T(X, Y) - \frac{1}{2n} g(X, Y) T(\tilde{g}),$$

où $T(\tilde{g})$ est la valeur du T pour le bivecteur $\tilde{g}$.

PROPOSITION 6.10. *Les transformations de $\mathcal{G}$ qui sont projectives et qui conservent le tenseur H défini par* (6.5) *sont données par la formule*

$$V'_X Y = V_X Y + p(X) Y + p(Y) X - g(X, Y)(p\tilde{g}^*). \tag{6.7}$$

En effet, la propriété équivaut à ce que l'on ait $\Phi_X V_Y = -\Phi_Y V_X$ pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dans (3.6). En développant la dernière équation, en multipliant par g et en faisant quelques opérations algébriques simples, on obtient $\Phi V = 0$.

COROLLAIRE 6.11. *Les seules transformations de $\mathcal{G}$ qui sont projectives et qui sont compatibles avec une structure $\hat{\Omega}$ c. s. sont données par l'équation* (6.7).

TRAVAUX CITÉS

[1] H. C. Lee, *A kind of even-dimensional differential geometry and its application to exterior calculus*, American Journal of Mathematics 65 (1943), p. 433-438.

[2] P. Liberman, *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact*, Colloque de Géométrie Différentielle Globale, Bruxelles 1958, p. 37-59.

[3] A. Lichnerowicz, *Théorèmes de reductivité pour les algèbres d'automorphismes*, Rendiconti di Matematica 22 (1963), p. 197-244.

[4] R. Miron, *Connexions compatibles aux structures conformes presque symplectiques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 265 (1967), p. 685-687.

[5] — and V. Oproiu, *Almost cosymplectic and conformal almost cosymplectic connexions I, II*, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées 16 (1971), p. 893-912.

[6] M. Obata, *Affine connexions on manifolds with almost complex, quaternion or hermitian structure*, Japan Journal of Mathematics 26 (1956), p. 43-77.

[7] V. Oproiu, *Some remarks on the conformal almost symplectic connections*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi 15 (1969), p. 151-157.

[8] W. Ślebodziński, *Formes extérieures et leurs applications géometriques*, Warszawa, vol. I (1954), vol. II (1963).

[9] Ph. Tondeur, *Affine Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fastsymplektischer Struktur*, Commentarii Mathematici Helvetici 36 (1961), p. 234-244.

Reçu par la Rédaction le 10. 12. 1971