COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXVI 1976 FASC. 2

PRODUITS TENSORIELS PROJECTIFS D'ESPACES DE BANACH FAIBLEMENT SÉQUENTIELLEMENT COMPLETS

PAR

FRANÇOISE LUST (ORSAY)

On montrera que le produit tensoriel projectif de deux Banach faiblement séquentiellement complets dont l'un a une base inconditionnelle est encore faiblement séquentiellement complet. On étudiera en particulier certains sous-espaces de $L^p(T)\hat{\otimes}L^q(T)$ pour $1 < p,\ q < +\infty$, et on donnera quelques indications sur la propriété U définie par Pełczyński. On verra que $C_0\hat{\otimes}C_0$ ne la possède pas.

On note E' le dual d'un espace de Banach E. La topologie faible de E est la topologie $\sigma(E, E')$.

Etant donnés deux Banach E et F, on note $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F muni de sa norme naturelle. On note $E\check{\otimes}F$ le sous-espace fermé de $\mathscr{L}(E', F)$ engendré par les atomes de $E\otimes F$, appelé *produit tensoriel injectif* de E et de F; on note $E\hat{\otimes}F$ le produit tensoriel projectif de E et de F [4], dont le dual est isomorphe à $\mathscr{L}(E, F')$.

D'après un théorème de Rosenthal et Dor (voir [14] et [3]) un Banach E est faiblement séquentiellement complet (ce qu'on notera f.s.c.) si et seulement si de toute suite bornée dans E on peut extraire une sous-suite faiblement convergente ou une sous-suite (e_n) telle que

$$\forall (a_n)\in C^\infty \quad \Big\|\sum a_n e_n\Big\|_E \sim \sum |a_n|.$$

On appellera *suite de Sidon* une telle suite, qui est équivalente à la base canonique de l^1.

Ceci explique l'importance de la recherche de telles suites, et par dualité l'importance de la recherche des suites équivalentes à la base canonique de C_0.

Définitions et rappels. On utilisera les notions de bases et de suites bases exposées dans [1] et [11].

Une suite (e_n) dans un Banach E est une *base* si pour tout e dans E il existe une suite unique (a_n) dans C telle que

$$(1) \qquad e = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

la série convergeant en norme.

Une suite (x_n) dans E est une *suite base* si c'est une base du sous--espace fermé de E qu'elle engendre, qu'on note $[x_n]$.

Deux suites bases (x_n) et (y_n) sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme T de $[x_n]$ sur $[y_n]$ tel que $T(x_n) = y_n$.

Dans un Banach E une base (e_n) est *rétractante* si dans E' la suite (e'_n) des formes linéaires coordonnées $e \to a_n$ (où a_n est défini par (1)) est une base.

Une base est „*boundedly complete*" si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ est un élément de E dès que $\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\|$ est uniformément borné. Une base (e_n) dans E est rétractante si et seulement si (e'_n) est „boundedly complete".

Une suite (x_n) est une *suite base inconditionnelle* si c'est une suite base et si pour tout $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ dans $[x_n]$ la série converge en norme pour toute permutation des indices. Cette propriété est équivalente à la suivante:

aucun terme de la suite (x_n) n'est nul, et il existe une constante $K \geqslant 1$ telle que pour tout entier p, toutes suites (θ_n), (t_n) dans C^∞

$$(2) \qquad \left\|\sum_{n=1}^{p} \theta_n t_n x_n\right\| \leqslant K \sup_n |\theta_n| \left\|\sum_{n=1}^{p} t_n x_n\right\|.$$

Une suite (x_n) dans un Banach E définit une série $\sum x_n$ *faiblement inconditionnellement convergente* (ce qu'on notera f.i.c.) si

$$(3) \qquad \forall e' \in E' \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e', x_n\rangle| < +\infty.$$

(Il est clair qu'alors la suite (x_n) converge faiblement vers 0.) Cette propriété est équivalente à la suivante:

il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout entier p et toute suite (θ_n) dans C^∞

$$(4) \qquad \left\|\sum_{n=1}^{p} \theta_n x_n\right\| \leqslant K \sup_n |\theta_n|.$$

Il en résulte que si une suite base (x_n) est inconditionnelle et si

$$\sup_p \left\| \sum_{n=1}^{p} x_n \right\| < +\infty \tag{5}$$

la série $\sum x_n$ est f.i.c.

L'importance de la notion de série f.i.c. s'explique par les lemmes suivants:

Lemme 1 [1]. *Soit (x_n) une suite vérifiant les conditions suivantes:*

(6) $\sum x_n$ *est une série f.i.c.,*

(7) $\inf_n \|x_n\| > 0$.

Alors il existe une sous-suite (x_{n_i}) qui est équivalente à la base canonique de C_0.

Lemme 2. *Soient E et F des espaces vectoriels normés en dualité tels que*

$$\forall f \in F \ \|f\| = \sup_{e \in E, \|e\| \leqslant 1} |\langle f, e \rangle|.$$

Soient $\sum y_n$ une série f.i.c. dans F et (x_n) une suite bornée dans E telles que

$$|\langle y_n, x_n \rangle| \geqslant 1 \quad \textit{pour tout } n.$$

Alors (x_n) contient une sous-suite de Sidon.

Démonstration. Il existe d'après le lemme 1 une sous-suite (y_{n_i}) qui est équivalente à la base canonique de C_0. Le dual de $[y_{n_i}]$ est isomorphe au quotient Y' de E'' par $[y_{n_i}]^{\perp}$ et est isomorphe à l^1. L'hypothèse entraîne que l'image $(\dot{x}_{n_i})$ de la suite (x_{n_i}) dans Y' ne peut converger en norme, ni aucune de ses sous-suites. D'après une propriété bien connue de l^1, $(\dot{x}_{n_i})$ contient une sous-suite de Sidon dans Y', donc dans E.

Beaucoup d'espaces f.s.c. vérifient en fait la propriété suivante:

Définition 1 [13]. Un Banach E a la *propriété V^** si pour toute partie bornée M dans E on a l'alternative suivante: ou bien M est relativement $\sigma(E, E')$ compacte ou bien il existe une série f.i.c. $\sum y_n$ dans E' telle que (y_n) ne converge pas uniformément sur M.

Remarque 1. D'après un théorème de Šmulian une partie bornée est relativement $\sigma(E, E')$ compacte si et seulement si de toute suite bornée on peut extraire une suite faiblement convergente. On peut donc se ramener pour vérifier la propriété V^* au cas d'une suite bornée.

Lemme 3. *Un Banach qui a la propriété V^* est faiblement séquentiellement complet.*

Le lemme 3 est une conséquence immédiate de la remarque 1 et du lemme 2.

Exemples. Tout espace L abstrait a la propriété V^* [13]. En particulier, le dual de l^∞ a la propriété V^*, ainsi que tous les espaces $\mathscr{L}_1$ séparables définis dans [8] qui en sont des sous-espaces. D'après [2] l'espace $L^1(\boldsymbol{T})/\boldsymbol{H}_0^1$ a aussi la propriété V^*.

Toujours suivant Pełczyński on introduit la définition suivante:

Définition 2 [13]. Un Banach E a la *propriété U* si pour toute suite de Cauchy faible (x_n) dans E il existe une série f.i.c. $\sum u_k$ dans E telle que la suite $\left(x_n - \sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ converge faiblement vers 0.

Tout espace f.s.c. possède évidemment la propriété U.

Si E' est séparable, dire que E a la propriété U signifie que tout élément $\xi \in E''$ s'écrit $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ où $\sum u_k$ est f.i.c. et où la série converge faiblement sur E'.

On rappelle que tout sous-espace d'un espace qui a la propriété U la possède encore et que tout espace à base inconditionnelle a la propriété U.

Lemme 4 [13]. *Soit E un Banach ayant la propriété U et dont le dual E' est séparable. Alors E' a la propriété V^*.*

On donne de ce lemme une démonstration différente de celle de Pełczyński, qui sera utile par la suite.

Démonstration. Comme E' est séparable, E l'est aussi. Etant donnée une suite bornée (φ_n) dans E', on peut (quitte à la remplacer par une sous-suite et à la translater) supposer qu'elle converge vers 0 pour $\sigma(E', E)$. Ou bien elle est relativement compacte pour $\sigma(E', E'')$ ou bien (quitte à la remplacer par une sous-suite) on a

$$\exists \xi \in E'' \quad \xi \notin E \quad \forall n \quad |\langle \varphi_n, \xi \rangle| \geq 1.$$

Par hypothèse ξ est la somme pour $\sigma(E'', E')$ d'une série f.i.c. $\sum e_k$ avec e_k dans E pour tout k. Il suffit de construire une série f.i.c. dont les termes ne convergent pas uniformément sur (φ_n). On utilise la méthode de la bosse glissante en se servant de ce que

$$\forall k \lim_{n\to+\infty} \langle \varphi_n, e_k \rangle = 0,$$

$$\forall n \lim_{N\to+\infty} \left\langle \varphi_n, \sum_{k=1}^{N} e_k \right\rangle = \langle \varphi_n, \xi \rangle.$$

Etant donnée φ_1, il existe un entier M_1 tel que

$$\left|\left\langle \varphi_1, \sum_{k=1}^{M_1} e_k \right\rangle\right| > \frac{1}{3}.$$

Il existe $\varphi_{(2)}$ telle que

$$\left|\left\langle \varphi_{(2)}, \sum_{k=M_1+1}^{\infty} e_k \right\rangle\right| > \frac{1}{2}.$$

Il existe un entier $M_2 > M_1$ tel que

$$\left|\left\langle \varphi_{(2)}, \sum_{k=M_1+1}^{M_2} e_k \right\rangle\right| > \frac{1}{3}.$$

En continuant ainsi on construit une suite strictement croissante d'entiers M_n et une sous-suite $(\varphi_{(n)})$ telles que

$$\forall(n)\left|\left\langle \varphi_{(n)}, \sum_{k=M_{n-1}+1}^{M_n} e_k \right\rangle\right| > \frac{1}{3}.$$

La série de terme général $\sum_{k=M_{n-1}+1}^{M_n} e_k$ est la série f.i.c. cherchée.

Remarque 2. Il résulte des lemmes 3 et 4 que le dual d'un sous--espace à base inconditionnelle rétractante est f.s.c.

THÉORÈME 1. *Soient H et F des Banach faiblement séquentiellement complets, H ayant de plus une base inconditionnelle. Alors $H\hat{\otimes}F$ est faiblement séquentiellement complet.*

On verra avec le théorème 2 qu'on peut affaiblir la deuxième condition imposée à H mais on ne sait pas si on peut la supprimer.

On rappelle [11] que, sous la deuxième condition, H a une base „boundedly complete", donc est isomorphe au dual E' d'un espace séparable E à base inconditionnelle rétractante. On notera $H = E'$.

On aura besoin du lemme suivant:

LEMME 5. *Soient G un Banach, E un Banach à base inconditionnelle rétractante. Alors tout élément de l'espace $\mathscr{L}(E', G')$ est somme pour $\sigma\big(\mathscr{L}(E', G'), E'\hat{\otimes}G\big)$ d'une série faiblement inconditionnellement convergente dont les termes appartiennent à $E\hat{\hat{\otimes}}G'$.*

Démonstration. On note (e_n) la base de E, (e_n') la base de E' canoniquement associée à (e_n), (Π_N) la suite bornée des projections de E' définies par

$$\Pi_N(e') = \sum_{n=1}^{N} \langle e', e_n\rangle e_n'.$$

Tout élément l dans $\mathscr{L}(E', G')$ est limite pour $\sigma\big(\mathscr{L}(E', G'), E'\hat{\otimes}G\big)$ d'une suite

$$l\circ\Pi_N = \sum_{n=1}^{N} e_n\otimes g_n', \quad \text{où } g_n' = l(e_n').$$

Comme (e_n) est une base inconditionnelle, il existe une constante $K > 0$ telle que pour toute suite (t_n) dans C^∞, tout entier N et tout élément g dans G

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} t_n e_n \langle g'_n, g\rangle \Big\|_E \leqslant K \sup_n |t_n| \Big\| \sum_{n=1}^{N} e_n \langle g'_n, g\rangle \Big\|_E \leqslant K^2 \|l\| \|g\|.$$

Ceci signifie que pour tout entier N

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} t_n e_n \otimes g'_n \Big\|_{\mathscr{L}(E',G')} \leqslant K^2 \sup_n |t_n| \, \|l\|$$

ou encore que $\sum e_n \otimes g'_n$ est une série f.i.c.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1. Etant donnée une suite bornée (φ_n) dans $E' \hat{\otimes} F$, on montre d'abord que (φ_n) contient une sous-suite de Sidon ou une sous-suite convergeante sur $E \hat{\hat{\otimes}} F'$ vers un élément de $E' \hat{\otimes} F''$. (Pour cela on n'utilise pas le fait que E' a une base inconditionnelle.) On montre ensuite que dans le deuxième cas, si (φ_n) ne converge pas faiblement, c'est-à-dire pour $\sigma(E' \hat{\otimes} F'', \mathscr{L}(E', F'''))$, elle contient une sous-suite de Sidon. On construit en fait à l'aide du lemme 5 une série f.i.c. dans $E \hat{\hat{\otimes}} F'''$ dont les termes ne convergent pas uniformément sur (φ_n).

(a) Ou bien il existe e_k tel que $(\varphi_n(e_k))_{n=1}^{\infty}$ contienne une sous-suite de Sidon dans F. Alors (φ_n) contient une sous-suite de Sidon dans $E' \hat{\otimes} F$.

Ou bien, $(\varphi_n(e_k))_{n=1}^{\infty}$ pour tout e_k est relativement compact pour $\sigma(F, F')$. Son adhérence $\overline{\{\varphi_n(e_k)\}}$ pour la topologie $\sigma(F, F')$ est métrisable d'après le théorème de Šmulian. Le produit $\prod_k \overline{\{\varphi_n(e_k)\}}$ est encore compact et métrisable pour la topologie produit. Il existe une sous-suite $(\varphi_{n'})$ et une suite (f_k) dans F telles que

$$\forall e_k \ \varphi_{n'}(e_k) \to f_k \text{ pour } \sigma(F, F') \quad \text{lorsque } n' \to +\infty.$$

On définit φ comme *application linéaire* de E dans F par

$$\varphi\Big(\sum a_k e_k\Big) = \sum a_k f_k.$$

Comme $\varphi_{n'}$ converge vers φ en tout point de $E \otimes F'$ et comme les applications $\varphi_{n'}$ sont uniformément bornées dans $\mathscr{L}(E', F)$, φ est aussi bornée.

D'autre part, E' étant séparable, l'espace $E' \hat{\otimes} F''$ est d'après [4] le dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F'$. Les éléments $\varphi_{n'}$ étant uniformément bornés dans $E' \hat{\otimes} F''$, φ est aussi dans $E' \hat{\otimes} F''$. On remarque que $\varphi_{n'}$ converge vers φ sur $E \hat{\hat{\otimes}} F'''$.

(b) Dans cette situation, ou bien la suite $(\varphi_{n'})$ converge vers φ pour $\sigma(E'\hat{\otimes}F'', \mathscr{L}(E', F'''))$ et alors φ est en fait dans $E'\hat{\otimes}F$ qui est un sous--espace fermé de $E'\hat{\otimes}F''$ [4], ou bien, il existe l dans $\mathscr{L}(E', F''')$ et une sous-suite $(\varphi_{n''})$ telles que

$$\forall n'' \quad |\langle \varphi_{n''} - \varphi, l\rangle| > 1.$$

D'après le lemme 5, l est la somme pour $\sigma(\mathscr{L}(E', F'''), E'\hat{\otimes}F'')$ d'une série f.i.c. $\sum e_k \otimes l(e_k')$ dans $E\hat{\hat{\otimes}}F'''$. Comme dans la démonstration du lemme 4, on construit une suite croissante d'entiers M_n tels que la suite $\left(\sum_{M_{n-1}+1}^{M_n} e_k \otimes l(e_k')\right)$ ne converge pas uniformément sur $(\varphi_{n''} - \varphi)$. D'après le lemme 2, $(\varphi_{n''} - \varphi)$, donc aussi $(\varphi_{n''})$, contient une sous-suite de Sidon.

COROLLAIRE 1. *Si F est un Banach faiblement séquentiellement complet, $l^1\hat{\otimes}F$ est faiblement séquentiellement complet.*

La démonstration peut bien sûr se faire directement. Avant de donner des applications du théorème 1 et du lemme 5 on va démontrer le

THÉORÈME 2. *Soient E un espace de Banach à base inconditionnelle rétractante et E_0 un sous-espace fermé de E. Soit F un Banach faiblement séquentiellement complet. Alors $E_0'\hat{\otimes}F$ est faiblement séquentiellement complet.*

Démonstration. D'après la démonstration du théorème 1, il suffit de voir que, pour tout Banach G, tout élément de $\mathscr{L}(E_0', G')$ est la somme pour $\sigma(\mathscr{L}(E_0', G'), E_0'\hat{\otimes}G)$ d'une série f.i.c. dans $E_0\hat{\hat{\otimes}}G'$ et d'appliquer ce résultat pour $G = F''$.

Les notations étant celles du lemme 5, on vérifie que tout élément l dans $\mathscr{L}(E', G')$ est limite de $(l\circ\pi_N)$ pour la topologie de la convergence simple sur $E'\hat{\otimes}G''$. Tout élément l dans $\mathscr{L}(E_0', G')$ est donc la somme pour $\sigma(\mathscr{L}(E', G'''), E'\hat{\otimes}G'')$ d'une série f.i.c. dans $E\hat{\hat{\otimes}}G'$. Comme E_0' et E' sont séparables, $E_0'\hat{\otimes}G''$ et $E'\hat{\otimes}G''$ sont respectivement les duals de $E_0\hat{\hat{\otimes}}G'$ et $E\hat{\hat{\otimes}}G'$. Pour achever la démonstration du théorème 2 il suffit donc d'utiliser les lemmes suivants:

LEMME 6 [12]. *Soit Y_0 un sous-espace fermé d'un Banach Y. Soit y_0'' un élément du sous-espace $Y_0^{\perp\perp}$ de Y'' (isomorphe à Y_0'') qu'on suppose être limite pour $\sigma(Y'', Y')$ d'une suite (y_n) dans Y. Alors y_0'' est limite pour $\sigma(Y_0^{\perp\perp}, Y'/Y_0^{\perp})$ d'une suite (z_n) dans Y_0.*

LEMME 7 [16]. *Soit Y_0 un sous-espace fermé d'un Banach Y. Soit (z_n) une suite de Cauchy faible dans Y_0, telle qu'il existe une série f.i.c. $\sum y_i$ dans Y avec $\left(z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ convergeant vers 0 pour $\sigma(Y, Y')$. Alors il existe une série f.i.c. $\sum y_i'$ dans Y_0 telle que $\left(z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i'\right)$ converge vers 0 pour $\sigma(Y_0, Y_0')$.*

On rappelle la construction de la nouvelle série f.i.c., construction dont on aura besoin par la suite.

On pose

$$v_n = z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Il existe une suite de combinaisons convexes des éléments v_n qui converge en norme vers 0 dans E, c'est-à-dire il existe un entier p_1 et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p_1}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p_1} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{i=1}^{p_1} \lambda_i v_i \right\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

On pose

$$u_1 = \sum_{i=1}^{p_1} \lambda_i v_i.$$

Les éléments $u_1, \ldots, u_n$ étant supposés construits, on obtient u_{n+1} de la même façon avec

$$u_{n+1} = \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i v_i, \qquad \|u_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}},$$

du fait que $\left(z_{p_n+k} - \sum_{i=1}^{p_n+k} y_i\right)_{k=1}^{\infty}$ converge vers 0 pour $\sigma(Y, Y')$. On pose alors

$$y'_0 = \sum_{i=1}^{p_1} \lambda_i z_i,$$

$$y'_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i z_i - \sum_{p_{n-1}+1}^{p_n} \lambda_i z_i \qquad \text{pour tout entier } n.$$

On vérifie facilement que $\sum y'_n$ a les propriétés demandées.

On vient de voir que dans certains cas le produit tensoriel projectif de deux Banach f.s.c. est encore f.s.c. On a montré dans [10] que le produit tensoriel injectif de deux Banach f.s.c. n'est pas f.s.c. en général (par exemple $l^2 \hat{\hat{\otimes}} l^2$). La notion de propriété U généralise en un certain sens la notion d'espace f.s.c. On peut donc se demander si un produit tensoriel de deux espaces de Banach ayant la propriété U la possède encore.

THÉORÈME 3. *Soient E un Banach à base inconditionnelle rétractante, F un Banach faiblement séquentiellement complet. Alors $E \hat{\hat{\otimes}} F$ a la propriété U. En particulier, si F est réflexif, le dual de tout sous-espace de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est faiblement séquentiellement complet.*

Démonstration. L'ensemble des limites de suites de Cauchy faibles de $E\hat{\hat{\otimes}}F$ est exactement $\mathscr{L}(E', F)$ et il suffit d'appliquer le lemme 5 pour avoir la première partie du théorème. Si F est réflexif, le dual de $E'\hat{\otimes}F'$ est exactement $\mathscr{L}(E', F)$ et le résultat découle de la remarque 2.

Par exemple, pour $1 < p$ et $q < \infty$, $l^p\hat{\hat{\otimes}}l^q$ a la propriété U. (Cependant ce n'est pas un sous-espace d'un Banach à base inconditionnelle, d'après [7], si $1/p+1/q \geqslant 1$.)

Il est faux en général que le produit tensoriel injectif ou projectif de deux Banach ayant la propriété U l'ait encore, comme le montre la proposition suivante:

Proposition 1. (a) *Soit R l'espace réflexif $l^p\hat{\hat{\otimes}}l^p$ $(1 < p < 2)$. L'espace $R\hat{\hat{\otimes}}R'$ n'a pas la propriété U.*

(b) *L'espace $C_0\hat{\otimes}C_0$ n'a pas la propriété U.*

(c) *Il existe un espace de Banach E_p ayant la propriété U, tel que $l^p\hat{\hat{\otimes}}E_p$ $(1 < p < 2)$ n'ait pas la propriété U.*

Démonstration. (a) Soient $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}(R, R)$ l'espace formé des multiplicateurs de R pour la multiplication ponctuelle sur $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$, et $\mathscr{M}_0 \subset R\hat{\hat{\otimes}}R'$ l'espace des multiplicateurs compacts. La fonction identiquement égale à 1 sur le produit $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ est limite de la suite (1_{Q_n}), où $Q_n = [-n, n]\times[-n, n]$, pour la topologie $\sigma\big(\mathscr{L}(R, R), R'\hat{\otimes}R\big)$.

Si R a la propriété U, la fonction 1 est, d'après le lemme 7, somme d'une série f.i.c. $\sum y'_n$ dans $\mathscr{M}_0$, pour la topologie $\sigma\big(\mathscr{L}(R, R), R'\hat{\otimes}R\big)$, et cette série est construite à l'aide de la suite (1_{Q_n}). Il existe une suite croissante d'entiers (p_n) telle que

$$\forall n \;\; y'_n = \delta_n^k \quad \text{sur } C_k = \{(i, j)\in\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z} \mid \sup(|i|, |j|) = p_k+1\}.$$

Soient R_1 le sous-espace de R formé des éléments à support dans $\bigcup_n C_n$, et $\mathscr{M}_{R_1}$ l'espace de ses multiplicateurs. L'application canonique $\mathscr{M}\to\mathscr{M}_{R_1}$ est continue, de norme 1.

La fonction 1 étant somme d'une série f.i.c. dans $\mathscr{M}_0$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$(8) \qquad \forall N\ \forall(\theta_n)\in C^\infty\ \forall l\in R_1\ \Big\|\sum_{n=1}^{N}\theta_n 1_{C_n} l\Big\|_{R_1} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N}\theta_n 1_{C_n}\Big\|_{\mathscr{M}_{R_1}} \|l\|_{R_1} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N}\theta_n y'_n\Big\|_{\mathscr{M}} \|l\|_{R_1} \leqslant K\|l\|_{R_1}.$$

En particulier, (8) entraîne

$$(9) \qquad \Big\|\sum_{j=0}^{N} 1_{C_{2j+1}} l\Big\|_{R_1} \leqslant K\|l\|_{R_1}.$$

Pour tout N, soit s_N la permutation de N définie par

$$s_N(i) = \begin{cases} p_i + 1 & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant 2N+1, \\ i & \text{pour } i > 2N+1. \end{cases}$$

L'application S_N définie par

$$1_{\varepsilon_1 i, \varepsilon_2 j} \to 1_{\varepsilon_1 s_N(i), \varepsilon_2 s_N(j)} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ valent } \pm 1)$$

est une bijection isométrique de R dans R.

En posant $B_i = \{(i', j') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid \sup(|i'|, |j'|) = i\}$, on a pour tout N et tout l dans R à support dans Q_{2N+1}

$$(10) \quad \Big\| \sum_{j=0}^{N} 1_{B_{2j+1}} l \Big\|_R$$
$$= \Big\| \sum_{j=0}^{N} S_N(1_{B_{2j+1}} l) \Big\|_R = \Big\| \sum_{j=0}^{N} 1_{C_{2j+1}} S_N(l) \Big\|_{R_1} \leqslant K \|S_N(l)\|_{R_1} \leqslant K \|l\|_R.$$

Ceci est impossible, car d'après [7] il existe une constante $K' > 0$ et il existe pour tout N un élément h_{2N+1} dans R, à support dans Q_{2N+1}, tel que

$$(11) \qquad K' \log(2N+1) \|h_{2N+1}\|_R \leqslant \Big\| \sum_{j=0}^{N} 1_{B_{2j+1}} h_{2N+1} \Big\|_R.$$

(b) Si $C_0 \hat{\otimes} C_0$ a la propriété U, la fonction 1 est somme d'une série f.i.c. dans $C_0 \hat{\otimes} C_0$, pour la topologie $\sigma\big((C_0 \hat{\otimes} C_0)'', l^1 \hat{\hat{\otimes}} l^1\big)$. L'injection canonique

$$C_0 \hat{\otimes} C_0 \to \mathscr{M}_c$$

étant continue, cela entraîne que la fonction 1 est somme d'une série f.i.c. dans $\mathscr{M}_c$, pour la topologie $\sigma\big(\mathscr{L}(R, R), R' \hat{\otimes} R\big)$, ce qui est impossible d'après la démonstration de (a).

(c) On pose $E_p = l^p \hat{\hat{\otimes}} (l^{p'} \hat{\otimes} l^{p'})$ pour $1 < p < 2$, $1/p + 1/p' = 1$. L'espace E_p a la propriété U d'après le théorème 3, tandis que $l^p \hat{\hat{\otimes}} E_p = R \hat{\hat{\otimes}} R'$ ne l'a pas d'après (a).

On étudie maintenant une conséquence du théorème 3 dans le cadre des espaces L^p.

Définition 3. Soit G un groupe métrique compact, pas nécessairement abélien, muni de sa mesure de Haar à gauche. Soient p, q tels que $1 < p$, $q < +\infty$. Par analogie avec [5] on appelle $A_{pq}(G)$ *l'espace quotient* de $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ par le noyau de l'application P qui envoie $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ dans $L'(G)$:

$$f \otimes g \to f * g(z) = \int_G f(z+x) g(x) dx.$$

L'application M définie sur $A_{pq}(G)$ par $\varphi(z) \to \varphi(x+y)$ envoie $A_{pq}(G)$ dans $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ et est continue, car

$$M(f*g)(x, y) = \int_G f(z+x) g(z+y) dz.$$

L'espace $A_{pq}(G)$ s'identifie donc au sous-espace fermé de $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ (lui-même sous-espace dense de $L^1(G) \hat{\otimes} L^1(G)$) formé par les fonctions presque partout constantes sur les fibres $x+y = \text{const}$ pour la mesure produit $dx \otimes dy$. On vérifie facilement que ce sous-espace est fermé pour

$$\sigma\big(L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G), L^{p'}(G) \hat{\hat{\otimes}} L^{q'}(G)\big),$$

c'est-à-dire que $A_{pq}(G)$ est isomorphe au dual d'un sous-espace de $L^{p'}(G) \hat{\hat{\otimes}} L^{q'}(G)$, qu'on note $c_{pq'}(G)$.

D'après [9] tout espace $L^p(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, séparable et tel que Ω soit sans atome, est isomorphe à $L^p(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}$ désignant le tore. En particulier, $L^p(G)$ a une base inconditionnelle pour $1 < p < +\infty$.

Théorème 4. *G étant un groupe métrique compact, l'espace $A_{pq}(G)$ $(1 < p, q < +\infty)$ est faiblement séquentiellement complet et est le dual d'un espace $c_{pq'}(G)$ ayant la propriété U. Si F est un Banach faiblement séquentiellement complet, $A_{pq}(G) \hat{\otimes} F$ l'est encore.*

Le théorème 4 est une conséquence immédiate du théorème 3, car $A_{pq}(G) \hat{\otimes} F$ est un sous-espace fermé de $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G) \hat{\otimes} F$.

Remarque 3. Lorsque $G = \boldsymbol{T}$, on retrouve directement ces résultats. D'après un théorème de Marcinkiewicz [17], chap. XV, § 4, dans l'espace $CV_p(\boldsymbol{T})$ des convoluteurs de $L^p(\boldsymbol{T})$ $(1 < p < +\infty)$ l'identité δ est la somme pour

$$\sigma\big(\mathscr{L}(L^p(\boldsymbol{T}), L^p(\boldsymbol{T})), L^p(\boldsymbol{T}) \hat{\otimes} L^{p'}(\boldsymbol{T})\big)$$

d'une série f.i.c. de convoluteurs T_n de rang fini dont les transformées de Fourier sont les fonctions caractéristiques des intervalles dyadiques $[-2^{n+1}, -2^n] \cup [2^n, 2^{n+1}]$ dans $\boldsymbol{Z}$. Soit $C_{pq'}(\boldsymbol{T})$ (espace des convoluteurs de $L^p(\boldsymbol{T})$ dans $L^{q'}(\boldsymbol{T})$) le dual de $A_{pq}(\boldsymbol{T})$. Tout élément S dans $C_{pq'}(\boldsymbol{T})$ est somme de la série f.i.c. $\sum_{n=1}^{\infty} S * T_n$ pour $\sigma\big(C_{pq'}(\boldsymbol{T}), A_{pq}(\boldsymbol{T})\big)$.

On rappelle [5] que si G est un groupe compact abélien, et si $2 \leqslant p$, $q < +\infty$, l'espace $A_{pq}(G)$ est isomorphe à l^1. On a de même

Proposition 2. *Pour $1 < p, q < 2$ l'espace $A_{pq}(\boldsymbol{T})$ est isomorphe à une somme directe (l^1) d'espaces de dimension finie.*

Démonstration. On montre en fait que (T_n étant défini comme dans la remarque 3) l'espace $c_{pq'}(\boldsymbol{T})$ est isomorphe à

$$\bigoplus_{c_0} T_n * C_{pq'}(\boldsymbol{T}).$$

On rappelle les inégalités suivantes, dues à Orlicz [15] et à Kadec [6]:

LEMME 8. *Soit (r_n) une suite base inconditionnelle dans $L^p(T)$. Il existe des constantes K_p et H_p telles que pour tout entier N et toute suite (a_n) dans C*

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n r_n\Big\|_{L^p} \geqslant K_p \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \|r_n\|_p^2\Big)^{1/2} \quad \text{pour } 1 < p \leqslant 2, \tag{12}$$

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n r_n\Big\|_{L^p} \leqslant H_p \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \|r_n\|_p^2\Big)^{1/2} \quad \text{pour } 2 \leqslant p < +\infty. \tag{13}$$

Soit maintenant

$$M_p = \sup_N \Big\|\sum_{n=1}^{N} T_n\Big\|_{CV_p(T)}$$

et soit (S_n) une suite bornée dans $C_{pq'}(T)$ telle que $S_n = S_n * T_n$ pour tout n. On a alors (les sup étant pris sur les éléments non nuls de $L^p(T)$)

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n S_n\Big\|_{C_{pq'}(T)} &= \Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n S_n\Big\|_{\mathscr{L}(L^p, L^{q'})} = \sup \Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n S_n * f\Big\|_{L^{q'}} \|f\|_{L^p}^{-1} \\
&\leqslant \sup M_p \Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n S_n * T_n * f\Big\|_{L^{q'}} \Big\|\sum_{n=1}^{N} T_n * f\Big\|_{L^p}^{-1} \\
&\leqslant M_p K_p^{-1} H_{q'} \sup \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \|S_n * T_n * f\|_{L^{q'}}^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{N} \|T_n * f\|_{L^p}^2\Big)^{-1/2} \\
&\leqslant M_p K_p^{-1} H_{q'} \sup_n \|S_n\|_{C_{pq'}(T)} \sup_n |a_n|.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. On peut d'ailleurs se passer du théorème de Marcinkiewicz en considérant $A_{pq}(T)$ comme facteur direct de $L^p(T) \hat{\otimes} L^q(T)$ muni à la fois de la base produit de deux bases inconditionnelles de $L^p(T)$ e $L^q(T)$ et de la base formée par les caractères, ce qui permet de construire des suites bases inconditionnelles dans $A_{pq}(G)$.

TRAVAUX CITÉS

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Mathematica 17 (1958), p. 151-164.

[2] J. Chaumat, *Une généralisation d'un théorème de Dunford-Pettis*, Publications Mathématiques d'Orsay, Analyse Harmonique (à paraître).

[3] L. E. Dor, *On sequences spanning a complex l^1 space* (à paraître).

[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the American Mathematical Society 16 (1966).

[5] C. Herz, *Remarques sur la note précédente de M. N. Varopoulos*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 260 (1965), p. 6001-6004.

[6] М. И. Кадец, *Об условно сходящихся рядах в пространстве L^p*, Успехи математических наук 9 (1954), p. 107-107.

[7] S. Kwapień and A. Pełczyński, *The main triangle projection in matrix spaces and its applications*, Studia Mathematica 34 (1970), p. 43-67.

[8] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications*, ibidem 29 (1968), p. 275-326.

[9] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *On classical Banach spaces*, Lecture Notes 338.

[10] F. Lust, *Produits tensoriels injectifs d'espaces faiblement séquentiellement complets*, Colloquium Mathematicum 33 (1975), p. 289-290.

[11] J. T. Marti, *Introduction to the theory of bases*, Springer Verlag.

[12] E. Odell and H. P. Rosenthal, *A double dual characterisation of separable Banach spaces containing l^1* (à paraître).

[13] A. Pełczyński, *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 10 (1962), p. 641-648.

[14] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l^1* (à paraître).

[15] Séminaire, B. Maurey et L. Schwartz, 1972-1973, Exposé No 7.

[16] I. Singer, *Bases in Banach spaces*, Springer Verlag 1970.

[17] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. II, Cambridge 1959.

Reçu par la Rédaction le 6. 3. 1975