COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XXVI DÉDIÉ À M. WŁADYSLAW ŚLEBODZIŃSKI 1972

SUR LA NOTION DE LA DÉRIVÉE COVARIANTE ET DE LA DÉRIVÉE DE LIE

PAR

S. GOŁĄB (KRAKÓW)

HOMMAGE DE L'AUTEUR
À MONSIEUR W. ŚLEBODZIŃSKI
À L'OCCASION
DE LA 40-ÈME ANIVERSAIRE
DE SON TRAVAIL
CONCERNANT LA NOTION
DE LA DÉRIVÉE DE LIE

Pour trouver les invariants intégraux des équations canoniques de Hamilton, W. Ślebodziński a généralisé [13] un théorème de de Donder [2] et Schunter [11] en utilisant la méthode du calcul tensoriel et en introduisant un nouvel opérateur appelé aujourd'hui *dérivée de Lie*, une notion qui a exercé une influence considérable sur le futur développement de la géométrie et ses applications.

La dénomination "dérivée de Lie" a été introduite par van Dantzig [1]. La première idée de l'opérateur de ce type est due à Lepage [8] ce que Ślebodziński reconnait dans son travail [13] où il le généralise. Une extension aux champs d'objets géométriques tout à fait arbitraires a été obtenue par Tashiro [14] et [15].

Comme, d'après la définition la plus générale due à Tashiro [14] et [15], la dérivée $\pounds_v \Omega$ d'un champ des objets Ω par rapport à un champ fixé des vecteurs contravariants v est un comitant différentiel de l'objet composé

$$\omega = (\Omega, v), \tag{1}$$

j'ai posé (encore en 1958 dans [4]) le problème de définir la dérivée de Lie comme un comitant différentiel choisi d'une manière univoque, au moyen des axiomes convenables, parmi tous les comitants différentiels d'un certain ordre du champ ω. Ce problème a été résolu partiellement en 1966 par Szybiak [12]. Je dis „partiellement" parce que dans son premier axiome une forme particulière de la dérivée $\pounds\Omega$ a été supposée, à savoir:

(a) la dérivée $\pounds_v \Omega$ dépend linéairement du champ v,

(b) la dérivée $\pounds_v \Omega$ dépend linéairement des dérivées partielles $\partial_j \Omega$,

(c) la dérivée $\pounds_v \Omega$ dépend des dérivées partielles du champ v jusqu'à l'ordre r, si r dénote la classe de l'objet Ω selon la terminologie de Schouten et Haantjes (cela veut dire que dans la règle de transformation des composantes de Ω figurent les dérivées partielies de la transformation des coordonnées jusqu'à l'ordre r).

En disant d'une façon plus précise: si les composantes de l'objet Ω sont numérotées au moyen d'un seul indice $a = 1, \ldots, N$, la dérivée $\pounds_v \Omega^a$ est de la forme

$$\pounds_v \Omega^a = v^i \partial_i \Omega^a + \psi^a(\Omega; \partial v, \ldots, \partial^r v), \tag{2}$$

où $\partial^j v$ signifie symboliquement la totalité des dérivées partielles d'ordre j de toutes les composantes du champ v par rapport à toutes les combinaisons possibles de j variables indépendantes.

M. Szybiak a supposé en plus que les fonctions ψ^a sont homogènes par rapport aux variables figurant après le point-virgule. Le second axiome concerne le type de la dérivée cherchée $\pounds_v \Omega$. Ce type ou, en d'autres mots, la règle de transformation, n'est pas toujours le même que pour Ω (pour les champs tensoriels le type ne change pas) et cela étant on ne peut pas admettre l'invariance du type. Le second axiome définie la règle de transformation pour la dérivée $\pounds_v \Omega$. Cette règle est linéaire et homogène

$$\overline{\pounds \Omega^a} = D^a_b \cdot \pounds \Omega^b, \tag{3}$$

où les coefficients D^a_b sont définis par la formule

$$D^a_b \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \Phi^a}{\partial \Omega^b}. \tag{4}$$

Les coefficients D^a_b dépendent de la règle de transformation pour le champ donné Ω,

$$\bar{\Omega}^a = \Phi^a(\Omega^b; T), \tag{5}$$

où T symbolise la totalité des dérivées partielles de la transformation des coordonnées jusqu'à l'ordre r inclusivement. Au premier coup d'oeil la formule (4) peut paraître un peu artificielle, mais cette impression disparaîtra si nous rappelons que pour tous les objets connus elle est satisfaite.

En passant à la dérivée covariante $\nabla_v \Omega$, remarquons que la dérivée $\pounds_v \Omega$ ne change pas la „valence" de l'objet Ω tandis que la dérivée covariante de l'objet Ω (si elle existe) change toujours la valence en l'élevant. Mais, d'autre part, on peut définir la dérivée covariante de l'objet composé $\omega = (\Omega, v)$ en la définissant par la formule

$$\nabla_v \Omega = v^i \nabla_i \Omega \tag{6}$$

et en supposant qu'elle soit un objet géométrique, ce qui a lieu toujours si Ω est un tenseur ou une densité tensorielle.

La dérivée $\nabla_v \Omega$ peut être nommée la *dérivée covariante dans la direction du vecteur* v (en supposant que $v \neq \emptyset$), bien que cette dénomination ne soit pas exacte parce que, en remplaçant le champ v par le champ $\varrho \cdot v$, où ϱ est un champ scalaire positif, la dérivée se multiplie par le facteur ϱ.

La dérivée $\nabla_v \Omega$ est de même que la dérivée $\pounds_v \Omega$, un comitant différentiel du champ $\omega = (\Omega, v)$. Une différence entre $\nabla_v \Omega$ et $\pounds_v \Omega$ consiste en ce que $\nabla_v \Omega$ est un comitant différentiel de ω du premier ordre, indépendemment de la classe r de l'objet Ω, tandis que l'ordre différentiel du comitant $\pounds_v \Omega$ est égal à r. Cette différence disparaît évidemment pour $r = 1$, mais même dans ce cas les dérivées $\nabla_v \Omega$ et $\pounds_v \Omega$ sont en général différentes. Une deuxième différence (peut être plus fondamentale) entre $\nabla_v \Omega$ et $\pounds_v \Omega$ consiste en ce que $\pounds_v \Omega$ est un comitant différentiel de l'objet ω, tandis que $\nabla_v \Omega$ est en réalité un comitant différentiel de l'objet $\tilde{\omega} = (\Omega, v, \Gamma)$, où Γ est l'objet de la connexion linéaire. On peut donc se poser la question suivante:

Etant donné l'objet composé $\omega = (\Omega, v)$, où Ω est un objet géométrique de première classe, est-ce qu'il existe une connexion Γ pour laquelle l'identité $\nabla_v \Omega = \pounds_v \Omega$ soit satisfaite ? Pour certains objets géométriques simples de première classe (p.ex. pour les densités) la réponse est positive. Nous ne savons pas la réponse dans le cas général.

Le problème d'une définition axiomatique de la dérivée covariante pour les champs d'objets géométriques était le sujet des travaux des divers géométres. Le premier travail important dans cette direction date de 1929; c'était celui de Schouten et Hlavatý [9], partiellement reproduit dans le manuel de Schouten et Struik [10]. Au même problème sont consacrés deux travaux récents de Kucharzewski [6] et [7].

En 1954 je suis revenu à ce problème dans [3] en indiqueant quelques inexactitudes dans le travail précité de Schouten et Hlavatý. J'ai posé là comme point de départ un système d'axiomes pour la notion de la dérivée absolue plus conforme à notre point de vue sur la dérivée covariante par rapport à un champ des vecteurs contravariants. La dérivée absolue est définie pour une courbe paramétrisée qui donne naissance automatiquement à un champ des vecteurs tangents, défini cependant seulement le long de la courbe et non dans l'espace tout entier.

La manque de tentatives dans cette direction vient du fait que ce problème est lié étroitement avec la théorie des équations fonctionnelles une branche des mathématiques peu étudiée jusqu'aux dernières années.

Comme mon travail [3] de 1954 contient seulement des résultats sans aucuns calculs je me permet de présenter ici les raisonnements en me bornant au cas le plus simple d'un espace à une dimension.

Pour simplifier les calculs je prends comme Ω le champ des vecteurs contravariants. Nous avons donc l'objet composé $\omega = (\Omega, v, \Gamma)$, où $\Omega(x)$ et $v(x)$ sont des champs des vecteurs contravariants et $\Gamma(x)$ est une connexion linéaire. Nous supposons, bien entendu, que $\Omega(x)$ est dérivable et nous notons la dérivée (ordinaire) par $\Omega'(x)$.

Remarque. Dans le cas général les vecteurs ont n composantes et les Γ n^3 composantes. Dans le cas $n=1$ chacun des objets Ω, v, Γ a une composante unique et, par conséquent, nous n'avons pas besoin d'indices.

Si nous exécutons un changement admissible (de classe C^2) de la coordonnée primitive x au moyen de la transformation

$$\bar{x} = \varphi(x) \tag{7}$$

et si nous introduisons les notations

$$a = \varphi'(x) \neq 0, \qquad \beta = \varphi''(x), \tag{8}$$

alors nous aurons les règles de transformation suivantes:

$$\bar{\Omega} = a\Omega, \qquad \bar{v} = av, \qquad \bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{\beta}{a^2}. \tag{9}$$

La dérivée $\nabla_v \Omega$ doit être, par définition, un comitant différentiel du premier ordre de l'objet $\omega = \{\Omega, v, \Gamma\}$ dépendant de la dérivée $\Omega'(x)$ et indépendante des dérivées $v'(x)$, $\Gamma'(x)$ dont l'existence nous ne supposons même pas. Nous avons donc, par l'hypothèse,

$$\nabla_v \Omega = \psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma). \tag{10}$$

Cette relation doit avoir un caractère invariant, c'est-à-dire, dans le nouveau système $\bar{x}$ il faut qu'on aie

$$\overline{\nabla_v \Omega} = \psi(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}', \bar{v}, \bar{\Gamma}). \tag{11}$$

La dérivée $\nabla_v \Omega$ doit être un objet du même type que Ω ce qui s'exprime par la relation

$$\overline{\nabla_v \Omega} = a\nabla_v \Omega. \tag{12}$$

Remarquons en outre que l'on a

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}' &= \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{\Omega}}{dx}\,\frac{dx}{d\bar{x}} = \frac{1}{a}\,\frac{d(a\Omega)}{dx} \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{da}{dx}\,\Omega + a\,\frac{d\Omega}{dx}\right) = \frac{1}{a}\left(\beta\Omega + a\Omega'\right) = \frac{\beta}{a}\,\Omega + \Omega'. \end{aligned} \tag{13}$$

En substituant les valeurs (9), (10), (12) et (13) dans (11) nous obtenons la suivante équation fonctionnelle:

$$a\psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma) = \psi\left(a\Omega, \Omega' + \frac{\beta}{a}\Omega, av, \frac{\Gamma}{a} - \frac{\beta}{a^2}\right). \tag{14}$$

Comme a est arbitraire, soumis seulement à la condition

$$a \neq 0 \tag{15}$$

et β est aussi complètement arbitraire, le domaine d'existence de la fonction cherchée ψ est l'espace $\boldsymbol{R}^4$ tout entier.

Nous allons résoudre l'équation (14) sous faibles hypothèses concernant la régularité de la fonction ψ.

L'équation (14) contient 6 variables indépendantes Ω, Ω', v, Γ, a et β.

Nous introduisons la fonction auxiliaire

$$\lambda(\xi, \eta) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi(\xi, \eta, 1, 0). \tag{16}$$

En substituant dans (14) $\beta = a\Gamma$ et $a = 1/v$ nous obtenons, pour $v \neq 0$,

$$\frac{1}{v}\psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma) = \psi\left(\frac{\Omega}{v}, \Omega' + \Gamma\Omega, 1, 0\right)$$

ou

$$\psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma) = v\lambda\left(\frac{\Omega}{v}, \Omega' + \Gamma\Omega\right). \tag{17}$$

Nous affirmons que pour chaque fonction $\lambda(\xi, \eta)$ la fonction ψ, déterminée par la relation précédente, remplit l'équation (14). En effet, le premier membre P prend la forme

$$P = a\psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma) = av\lambda\left(\frac{\Omega}{v}, \Omega' + \Gamma\Omega\right).$$

Le deuxième membre D est égal à

$$\begin{aligned} D &= \psi\left(a\Omega, \Omega' + \frac{\beta}{a}\Omega, av, \frac{\Gamma}{a} - \frac{\beta}{a^2}\right) \\ &= av\lambda\left(\frac{a\Omega}{av}, \Omega' + \frac{\beta}{a}\Omega + \left(\frac{\Gamma}{a} - \frac{\beta}{a^2}\right)a\Omega\right) \\ &= av\lambda\left(\frac{\Omega}{v}, \Omega' + \frac{\beta}{a}\Omega + \Gamma\Omega - \beta\frac{\Omega}{a}\right) \\ &= av\lambda\left(\frac{\Omega}{v}, \Omega' + \Gamma\Omega\right), \end{aligned}$$

donc nous avons $P = D$.

Il y a donc une vaste famille de comitants solutions de (14) parce qu'ils dépendent d'une fonction *arbitraire* λ de deux variables indépendantes.

Il se pose le problème d'adjoindre des axiomes supplèmentaires de façon que le système ainsi étendu permette de distinguer le comitant classique, donné par la formule

$$\psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma) = v(\Omega' + \Gamma\Omega). \tag{18}$$

Remarquons tout d'abord que l'axiome (analogue à célui de Szybiak par rapport à la dérivée $\pounds_v \Omega$)

$$\psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma) = v\Omega' + \Psi(\Omega, \Gamma) \tag{19}$$

serait failli. En effet, admettons pour le moment la formule (19). De là nous concluons

$$v\lambda\left(\frac{\Omega}{v}, \Omega' + \Gamma\Omega\right) = v\Omega' + \Psi(\Omega, \Gamma), \tag{20}$$

ce qui pour $\Omega' = 0$ nous fournit la relation

$$\Psi(\Omega, \Gamma) = v\lambda\left(\frac{\Omega}{v}, \Gamma\Omega\right).$$

Il suit de là, pour $v = \Omega$,

$$\Psi(\Omega, \Gamma) = \Omega\lambda(1, \Gamma\Omega) = \Omega\mu(\Gamma\Omega), \tag{21}$$

où

$$\mu(\xi) \overset{\text{df}}{=} \lambda(1, \xi) \tag{22}$$

est une fonction d'une variable. (19) et (21) donnent

$$\psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma) = v\Omega' + \Omega\mu(\Gamma\Omega). \tag{23}$$

En comparant (20) et (23) nous en déduisons

$$v\lambda\left(\frac{\Omega}{v}, \Omega' + \Gamma\Omega\right) = v\Omega' + \Omega\mu(\Gamma\Omega)$$

ce qui pour $v = \Omega$ donne

$$\Omega\mu(\Omega' + \Gamma\Omega) = \Omega\Omega' + \Omega\mu(\Gamma\Omega)$$

ou bien

$$\mu(\Omega' + \Gamma\Omega) = \Omega' + \mu(\Gamma\Omega).$$

La relation $\mu(x+y) = x + \mu(y)$ entraîne la linéarité de la fonction μ:

$$\mu(x) = x + C. \tag{24}$$

(23) et (24) donnent

$$\psi(\Omega, \Omega' v, \Gamma) = v\Omega' + \Omega(\Gamma\Omega + C). \tag{25}$$

En combinant (18) et (25) nous obtenons enfin

$$v\Omega' + v\Gamma\Omega = v\Omega' + \Gamma\Omega^2 + C\Omega$$

ou

$$v\Gamma = \Gamma\Omega + C. \tag{26}$$

C'est une contradiction à cause de l'indépendence des variables v, Γ et Ω. L'axiome (19) n'est pas donc admissible.

Cherchons un autre axiome supplémentaire. Admettons notamment d'après Schouten et Hlavatý [9] l'hypothèse

$$\nabla_v(\Omega_1 + \Omega_2) = \nabla_v \Omega_1 + \nabla_v \Omega_2 \tag{27}$$

pour tous les deux champs Ω_1 et Ω_2 des vecteurs contravariants. Cette hypothèse conduit à la suivante condition pour la fonction $\lambda(\xi, \eta)$:

$$v\lambda\left(\frac{\Omega_1}{v}, \Omega_1' + \Gamma\Omega_1\right) + v\lambda\left(\frac{\Omega_2}{v}, \Omega_2' + \Gamma\Omega_2\right)$$
$$= v\lambda\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{v}, (\Omega_1 + \Omega_2)' + \Gamma(\Omega_1 + \Omega_2)\right).$$

Mais vu la relation $(\Omega_1 + \Omega_2)' = \Omega_1' + \Omega_2'$ nous obtenons, après la reduction des deux membres par v,

$$\lambda\left(\frac{\Omega_1}{v}, \Omega_1' + \Gamma\Omega_1\right) + \lambda\left(\frac{\Omega_2}{v}, \Omega_2' + \Gamma\Omega_2\right)$$
$$= \lambda\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{v}, \Omega_1' + \Omega_2' + \Gamma\Omega_1 + \Gamma\Omega_2\right).$$

Cette équation fonctionnelle donne, pour $v = 1$ et $\Gamma = 0$,

$$\lambda(\Omega_1, \Omega_2') + \lambda(\Omega_2, \Omega_2') = \lambda(\Omega_1 + \Omega_2, \Omega_1' + \Omega_2'). \tag{28}$$

C'est une équation connue dans la théorie des équations fonctionnelles. En admettant une faible régularité de la fonction λ (p.ex. la continuité) nous concluons que la solution générale a la forme

$$\lambda(\xi, \eta) = \varrho\xi + \sigma\eta \quad (\varrho, \sigma \text{ arbitraires}). \tag{29}$$

Dans ce cas nous avons

$$\psi(\Omega, \Omega', v, \Gamma) = v\left\{\varrho\frac{\Omega}{v} + \sigma(\Omega' + \Gamma\Omega)\right\} \tag{30}$$
$$= \varrho\Omega + \sigma v(\Omega' + \Gamma\Omega)$$

et l'ensemble des solutions dépend de deux constantes ϱ et σ seulement: ϱ est tout à fait arbitraire, σ doit être différent de zéro. On obtient la dérivée classique en posant $\varrho = 0$ et $\sigma = 1$.

Notre résultat peut être formulé sous la forme suivante:

THÉORÈME. *Si la dérivée covariante* $\nabla_v \Omega$ *d'un champ de vecteurs* Ω *par rapport au champ de vecteurs* v *est un champ de vecteurs, si la dérivée de la somme* $\Omega_1 + \Omega_2$ *est égale à la somme des dérivées des composantes* Ω_1, Ω_2 *et si le comitant* $\nabla_v \Omega$, *qui est de la forme* (10), *est une fonction faiblement régulière, alors la structure générale de* $\nabla_v \Omega$ *est donnée par la formule*

$$\nabla_v \Omega = \varrho\Omega + \sigma v(\Omega' + \Gamma\Omega), \qquad \sigma \neq 0, \tag{31}$$

où ϱ *et* σ *sont des constantes arbitraires.*

On pourrait prendre au lieu de l'axiome concernant la dérivée de la somme de deux vecteurs un axiome portant sur la dérivée covariante du produit de deux vecteurs (par analogie à l'axiome F_4 de Schouten et Hlavatý [10], p. 74) et chercher la forme particulière de $\nabla_v \Omega$ provenant de cette hypothèse. Cette étude sera le sujet d'une note ultérieure.

TRAVAUX CITÉS

[1] D. van Dantzig, *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie I, II*, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen 35 (1932), pp. 524-534, 535-542.

[2] Th. de Donder, *Théorie des invariants intégraux* (1927).

[3] S. Gołąb, *Über den Begriff der kovarianten Ableitung*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) 2 (1954), p. 90-96.

[4] — *Differentialkomitanten und Liesche Ableitung*, Matematikai Lapok 10 (1959), p. 174.

[5] — *Rachunek tensorowy* [*Calcul tensoriel*], 2-ème édition, Warszawa 1966 [en polonais].

[6] M. Kucharzewski, *Kovariante Ableitung der Skalare und Dichten*, Prace Matematyczne Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 1 (1969), p. 61-70.

[7] — *Kovariante Ableitung von Tensordichten*, Annales Polonici Mathematici 24 (1970), p. 45-54.

[8] Th. Lepage, *Sur les propriétés invariantes des covariants symétriques gauches*, Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, 5 Sér., 15 (1929), p. 95-99.

[9] J. A. Schouten und V. Hlavatý, *Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung*, Mathematische Zeitschrift 30 (1929), p. 414-432.

[10] J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, I Band (1935).

[11] E. Schuntner, *Über eine Verallgemeinerung des Poissonschen Theorems*, Monatshefte für Mathematik und Physik 36 (1929), p. 43-46.

[12] A. Szybiak, *Covariant differentiation of geometric objects*, Dissertationes Mathematicae, Warszawa 56 (1967), p. 1-41.

[13] W. Ślebodziński, *Sur les équations canoniques de Hamilton*, Bulletin de l'Académie Royale de Belgiques, Classe des Sciences, 5 Série, 17 (1931), p. 864-870.

[14] Y. Tashiro, *Sur la dérivée de Lie d'un être géométrique et son groupe d'invariance*, The Tôhoku Mathematical Journal 2 (1951), p. 166-181.

[15] — *Note sur la dérivée de Lie d'un être géométrique*, Mathematical Journal of Okayama University 1 (1952), p. 125-128.

Reçu par la Rédaction le 3. 7. 1971