COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XXVI DÉDIÉ À M. WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI 1972

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LIÉES AUX GROUPES LINÉAIRES COMMUTATIFS

PAR

J. ACZÉL (WATERLOO, ONTARIO) ET G. VRANCEANU (BUCAREST)

DÉDIÉ À
M. WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI
À L'OCCASION DU 40-IÈME
ANNIVERSAIRE DE SA DÉCOUVERTE
DE LA DÉRIVÉE DE LIE

0. Les applications suivantes sont représentatives pour les transformations linéaires des espaces affines n- ou $(n+1)$-dimensionnels, qui forment des groupes abéliens [12]

$$x_1' = \alpha_1 + x_1, \quad x_r' = \alpha_r + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{r-1} x_i + x_r \quad (r = 2, \ldots, n) \tag{1}$$

et

$$x_r' = \sum_{i=0}^{r} \alpha_{r-i} x_i \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, les paramètres de ces transformations se composent de la manière suivante:

$$\begin{gathered} \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \circ \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}, \\ \gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1, \quad \gamma_r = \alpha_r + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{r-1}\beta_i + \beta_r \quad (r = 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2}$$

ou

$$\begin{gathered} \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \circ \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n\}, \\ \gamma_r = \sum_{i=0}^{r} \alpha_{r-i}\beta_i \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{3}$$

Les opérations (2) et (3) sont associatives et commutatives, $\{0, 0, \ldots, 0\}$ ou $\{1, 0, \ldots, 0\}$ sont des éléments neutres et tous les n-tuples ainsi que tous les $(n+1)$-tuples, abstraction faite des cas $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ et $\gamma_0 = 0$, ont des inverses. L'origine $(0, 0, \ldots, 0)$ est le seul point fixe de la seconde transformation si $a_0 \neq 1$, tandis que la première n'a pas de point fixe.

Dans cette communication nous allons déterminer tous les homomorphismes des groupes de translations

$$y'_r = y_r + s_r \quad (r = 1, 2, \ldots, n \text{ ou } r = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

où la composition des paramètres dans les structures (2) et (3) est décrite simplement par

$$w_r = s_r + t_r \quad (r = 1, 2, \ldots, n \text{ ou } r = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

et nous indiquerons des problèmes et résultats combinatoires, probabilistes, etc. qui s'y rattachent.

1. Les homomorphismes de (5) en (2) sont décrits par

$$\alpha_m = F_m(s_1, s_2, \ldots, s_m), \quad \beta_m = F_m(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ \gamma_m = F_m(w_1, w_2, \ldots, w_m) \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

En substituant (6) et (5) en (2) on obtient le système d'équations fonctionnelles

$$F_r(s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots, s_m+t_m) \\ = F_r(s_1, s_2, \ldots, s_r) + \sum_{i=1}^{r-1} F_{r-i}(s_1, s_2, \ldots, s_{r-1}) F_i(t_1, t_2, \ldots, t_i) + \\ + F_r(t_1, t_2, \ldots, t_t) \quad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Les mêmes applications $\{F_r\}$ transforment (1) en translations (4) comme on voit en substituant

$$x_m = F_m(y_1, y_2, \ldots, y_m), \quad a_m = F_m(s_1, s_2, \ldots, s_m), \\ x'_m = F_m(y'_1, y'_2, \ldots, y'_m) \quad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

et (4) en (1).

Nous allons resoudre ce systeme par récurrence. Pour $r = 1$

$$F_1(s_1+t_1) = F_1(s_1) + F_1(t_1). \tag{8}$$

La solution générale bornée d'un côté sur un intervalle, ou même sur un ensemble de mesure intérieure positive est (cf. [2])

$$F_1(s_1) = a_{11} s_1, \tag{9}$$

où a_{11} est une constante arbitraire. Ce-ci est vrai pour des s_1 positifs, même si (8) n'est supposée que pour tous les s_1 et t_1 positifs (cf. [3]).

Notre démonstration par récurrence est assez compliquée. Ainsi, pour deviner de prime abord la formule que nous devons démontrer, nous faisons les calculs aussi pour $r = 2$ et $r = 3$. Pour $r = 2$, (7) se réduit, en vue de (9), à

$$F_2(s_1+t_1, s_2+t_2) = F_2(s_1, s_2)+a_{11}^2 s_1 t_1+F_2(t_1, t_2). \tag{10}$$

En introduisant la fonction A_2 par

$$F_2(s_1, s_2) = A_2(s_1, s_2)+\tfrac{1}{2}a_{11}^2 s_1^2, \tag{11}$$

la formule (10) se transforme en

$$A_2(s_1+t_1, s_2+t_2) = A_2(s_1, s_2)+A_2(t_1, t_2). \tag{12}$$

Si F_2 est bornée d'un côté (sur un rectangle ou sur un ensemble de mesure plane intérieure positive), alors, par (11), A_2 l'est aussi et (cf. [2]) toutes les solutions de (12) satisfaisant à ces conditions sont de la forme $A_2(s_1, s_2) = a_{12}s_1+a_{22}s_2$, où a_{12} et a_{22} sont des constantes arbitraires. Donc, par (11),

$$F_2(s_1, s_2) = \frac{(a_{11}s_1)^2}{2!}+a_{12}s_1+a_{22}s_2. \tag{13}$$

Cette fois encore, ce-ci est vrai pour les s_1 et s_2 positifs, même si (10) n'est supposée que pour les s_1, s_2, t_1 et t_2 positifs.

De manière semblable, (7) pour $r = 3$ se réduit, à cause de (9) et de (13), à

$$\begin{aligned} F_3(s_1+t_1, s_2+t_2, s_3+t_3) &\\ = F_3(s_1, s_2, s_3)+&\left(\frac{(a_{11}s_1)^2}{2!}+a_{12}s_1+a_{22}s_2\right)a_{11}t_1+\\ +\, a_{11}s_1&\left(\frac{(a_{11}t_1)^2}{2!}+a_{12}t_1+a_{22}t_2\right)+F_3(t_1, t_2, t_3) \end{aligned} \tag{14}$$

ou, en posant

$$A_3(s_1, s_2, s_3) = F_3(s_1, s_2, s_3)-\left[a_{11}s_1(a_{12}s_1+a_{22}s_2)+\frac{(a_{11}s_1)^3}{3!}\right], \tag{15}$$

à

$$A_3(s_1+t_1, s_2+t_2, s_3+t_3) = A_3(s_1, s_2, s_3)+A_3(t_1, t_2, t_3).$$

La solution générale, bornée d'un côté, en est $A_3(s_1, s_2, s_3) = a_{13}s_1+a_{23}s_2+a_{33}s_3$, où a_{13}, a_{23} et a_{33} sont des constantes arbitraires. Donc, par (15),

$$F_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{(a_{11}s_1)^3}{3!}+(a_{11}s_1)(a_{12}s_1+a_{22}s_2)+a_{13}s_1+a_{23}s_2+a_{33}s_3 \tag{16}$$

pour toutes les variables réelles ou positives selon que (14) est supposée pour toutes les variables réelles ou positives, respectivement.

Les formules (9), (13) et (16) suggèrent le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *La solution générale du système* (7) *des équations fonctionnelles, bornées d'un côté sur un esemble de mesure intérieure positive est donnée par*

$$F_m(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{k} a_{jk}s_j\Big)^{p_k} / p_k! \tag{17}$$

$$(p_k \geqslant 0;\ k = 1, 2, \ldots, m;\ m = 1, 2, \ldots, n),$$

où les a_{jk} $(1 \leqslant j \leqslant k \leqslant m \leqslant n)$ *sont des constantes arbitraires. Si les variables en* (7) *parcourent les nombres positifs au lieu des nombres réels, alors* (17) *reste valable pour des* $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *positifs.*

Donc les homomorphismes (6) *les plus généraux bornés, de* (5) *en* (2), *sont donnés par* (17).

Notons, que toutes ces solutions de (7) sont des polynômes (de dégré m).

Démonstration. Nous avons déjà démontré la formule (17) pour $m = 1$ (aussi pour $m = 2, 3$). Supposons quelle soit vraie pour tous les $m < r$. Alors la r-ième équation de (7) se réduit à

$$F_r(s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots, s_r+t_r) = F_r(s_1, s_2, \ldots, s_r) + F_r(t_1, t_2, \ldots, t_r) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{\substack{p_1+2p_2+\ldots+(r-i)p_{r-i}=r-i \\ q_1+2q_2+\ldots+iq_i=i}} \prod_{k=1}^{r-i} \frac{\Big(\sum_{j=1}^{k} a_{jk}s_j\Big)^{p_k}}{p_k!} \prod_{l=1}^{i} \frac{\Big(\sum_{\lambda=1}^{l} a_{\lambda l}t_\lambda\Big)^{q_l}}{q_l!}$$

ou, en posant

$$A_r(s_1, s_2, \ldots, s_r) = F_r(s_1, \ldots, s_r) - \sum_{p_1+2p_2+\ldots+(r-1)p_{r-1}=r} \prod_{k=1}^{r} \frac{\sum_{j=1}^{k} (a_{jk}s_j)^{p_k}}{p_k!}, \tag{18}$$

à

$$A_r(s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots, s_r+t_r) = A_r(s_1, s_2, \ldots, s_r) + A_r(t_1, t_2, \ldots, t_r).$$

(Nous avons exposés les détails de cette transformation dans les cas $r = 2$ et $r = 3$.) Si F_r est bornée d'un côté sur un ensemble de mesure positive, alors, par (18), A_r l'est aussi, donc (cf. [2])

$$A_r(s_1, s_2, \ldots, s_r) = \sum_{j=1}^{r} a_{jr}s_j,$$

où les a_{jr} $(j = 1, 2, \ldots, r)$ sont des constantes. Par conséquent, vu (18), nous avons (17) aussi pour $m = r$ ce qui montre que toutes les solutions de (7), bornées d'un côté, sont de la forme (17). D'autre part, une substitution directe montre que les fonctions données par (17) satisfont à (7) toujours, quel que soit le choix des constantes a_{jk}, c.q.f.d.

Si les $s_j, t_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ sont non-négatifs, alors (5) décrit un monoïde. De même, (2) constitue un monoïde si tous les α_j, β_j $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ sont non-négatifs. Si $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ transforme le premier monoïde dans le second, on a dans (6)

$$F_m(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \alpha_m \geqslant 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

pour tous les $s_1 \geqslant 0$, $s_2 \geqslant 0, \ldots, s_n \geqslant 0$, donc la condition que les F_m soient bornées d'un coté est satisfaite, même sur un intervalle infini, donc (17) est valable. Etant donné que $F_m(0, 0, \ldots, 0) = 0$, et que, par (17), les F_m sont indéfiniment derivables, nous avons

$$\left.\frac{\partial}{\partial s_j} F_m(s_1, s_2, \ldots, s_m)\right|_{(0+, 0+, \ldots, 0+)} \geqslant 0 \quad \text{pour tous les } 1 \leqslant j \leqslant m \leqslant n.$$

On voit aisément que cela implique

$$a_{jk} \geqslant 0 \quad \text{pour tous les } 1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n. \tag{20}$$

D'autre part, si (20) vaut dans (17), alors (19) est aussi vraie, ainsi (17) *avec* (20) *est la solution la plus générale de* (7) *pour laquelle* (19) *est satisfaite.*

Dans ce cas ci l'application (1) induit un ordre, car (19) implique $x'_r \geqslant x_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ en (1).

Le cas particulier $c_{jk} = \delta_{jk}$ $(\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$, $\delta_{kk} = 0)$ de (17) est

$$F^\delta_m(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{p_1 + 2p_2 + \ldots + mp_m = m} \prod_{k=1}^{m} \frac{z_k^{p_k}}{p_k!} \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

On voit que les solutions générales (17) peuvent être obtenues de la solution particulière (21) par des substitutions linéaires

$$F_m(s_1, s_2, \ldots, s_m)$$
$$= F^\delta_m(a_{11}s_1, a_{12}s_1 + a_{22}s_2, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{jm}s_j) \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut déduire (17) aussi à l'aide des fonctions génératrices.

2. Soient F_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ indépendantes de toutes leurs variables sauf la première. Alors (17) se réduit à

$$F_r(s_1 + t_1) = F_r(s_1) + \sum_{i=1}^{r-1} F_{r-i}(s_1) F_i(t_1) + F_r(t_1) \quad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

(Kurepa [6] a déterminé sur le demi-groupe des nombres dyadiques positifs toutes les solutions de (22) satisfaisant à $F_m(1) = 1/m!$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Ce sont $F_m(d) = d^m/m!$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Pour déduire les formules générales de la distribution probabiliste de Poisson généralisée, nous avons donné dans [5] (voir aussi [8] et [2]) la solution générale du système

$$(23) \quad P_r(s_1+t_1) = \sum_{i=0}^{r} P_{r-i}(s_1)P_i(t_1) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots; s_1 > 0, t_1 > 0),$$

$$(24) \qquad P_0(s_1) \leqslant 1, \quad P_m(s_1) \geqslant 0 \quad (m = 1, 2, \ldots; s_1 > 0).$$

Dans le cas spécial $P_0(s_1) \equiv 1$, (23) se transforme en (22). Aussi la solution générale

$$(25) \quad P_m(s_1) = \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \frac{(a_k s_1)^{p_k}}{p_k!} e^{-as_1} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

trouvée là coïncide dans le cas $P_0 = 1$ $(a = 0)$ avec le cas spécial de (17), où les F_m ne dépendent que de s_1 $(a_{jk} = 0$ pour $1 < j \leqslant k$, $a_{1k} = a_k$, $k = 1, 2, \ldots)$. La solution présentée en détails ci-dessus ressemble à celle appliquée à (23) dans [5] et [2], tandis que la méthode des fonctions génératrices, dont nous venons de faire mention, a été appliquée à (23) dans [5] et [8].

En fait, la méthode utilisée dans [5] et [2] et dans le travail présent nous permet de généraliser notre théorème 1 dans trois directions: il ne faut supposer ni que les F_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ soient bornées ni que F_m soit indépendante de $s_{m+1}, \ldots, s_n$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$. Si nous écrivons $s = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $t = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ et

$$(26) \qquad a_m = F_m(s_1, s_2, \ldots, s_n) = F_m(s) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

au lieu de (6), on a

$$(27) \qquad F_r(s+t) = F_r(s) + \sum_{i=1}^{r-1} F_{r-i}(s)F_i(t) + F_r(t)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n;\ s = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\},\ t = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}).$$

La troisième généralisation consiste en ce que nous pouvons encore déterminer tous les homomorphismes de (5) en (3), sans restreindre la généralité

$$(28) \quad a_m = P_m(s_0, s_1, \ldots, s_n) = P_m(s), \qquad \beta_m = P_m(t_0, t_1, \ldots, t_n) = P_m(t),$$

$$\gamma_m = P_m(w_0, w_1, \ldots, w_n) = P_m(w)$$

pour $m = 0, 1, \ldots, n$.

En substituant (28) et (5) en (3) on obtient le système d'équations fonctionnelles

$$P_r(s+t) = \sum_{i=0}^{r} P_{r-i}(s)P_i(t) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{29}$$

où $s = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, $t = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Si les P_m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ ne dépendent que de s_1, nous avons (23). Si $P_0 = 1$ et les P_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ ne dépendent pas de s_0, alors on a (27). En particulier, si $P_0 = 1$ et si chaque P_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ ne dépend que de $s_1, s_2, \ldots, s_m$, nous avons (7). De même, si chaque P_m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ dans (29) ne dépend que de $s_0, s_1, \ldots, s_m$, on a

$$\begin{aligned} &P_r(s_0+t_0, s_1+t_1, \ldots, s_r+t_r) \\ &= \sum_{i=0}^{r} P_{r-i}(s_0, s_1, \ldots, s_{r-1})P_i(t_0, t_1, \ldots, t_i) \qquad (r = 0, 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{30}$$

Cette équation (une généralisation de (7)) émerge, si l'homomorphisme de (5) en (3) a la forme

$$a_m = P_m(s_0, s_1, \ldots, s_m) \qquad (m = 0, 1, \ldots, n) \tag{31}$$

analogue à (6).

Nous donnons ici la solution la plus générale de (29), qui contiendra bien sur tous ces cas spéciaux.

THÉORÈME 2. *La solution générale du système* (29) *d'équations fonctionnelles sur un groupe arbitraire ou bien sur un demi-groupe arbitraire, si P_0 n'a pas de zéros, est donnée par*

$$P_m(s) = P_0(s) \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \frac{A_k(s)^{p_k}}{p_k!}, \tag{32}$$

où les A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et P_0 sont des solutions arbitraires (*dans le second cas $P_0 \neq 0$*) *des équations*

$$A_m(s+t) = A_m(s) + A_m(t) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

ou

$$P_0(s+t) = P_0(s)P_0(t) \tag{34}$$

respectivement.

Donc, les homomorphismes (28) *de* (5) *en* (3) *sont donnés en toute généralité par* (32) *compte tenu de* (33) *et* (34).

Démonstration. Pour $r = 0$, (29) donne

$$P_0(s+t) = P_0(s)P_0(t) \tag{35}$$

ce qui est conforme à (32) et (34). Si l'on a $P_0(c) = 0$ pour une valeur de c, alors pour tous les s

$$P_0(s) = P_0(c)P_0(s-c) = 0$$

pourvu que (35) soit valable sur un groupe. Dans ce cas on obtient de (29) successivement $P_1(s) = 0,\ P_2(s) = 0, \ldots, P_n(s) = 0$, ce qui est un cas trivial de (32) avec $P_0(s) = 0$. Donc nous supposerons que P_0 soit nulle part zéro.

Alors on peut diviser l'équation $P_1(s+t) = P_1(s)P_0(t)+P_0(s)P_1(t)$ ($r = 1$ dans (29)) par (35) et ainsi on a $A_1(s+t) = A_1(s)+A_1(t)$ pour $A_1(s) = P_1(s)/P_0(s)$, en accord avec (32) et (33).

Supposons maintenant que (32) (avec (33) et (34)) soit déjà démontrée pour tout $m < r$. Alors, après la division par (35), la r-ème équation de (29) se réduit à

$$\frac{P_r(s+t)}{P_0(s+t)} = \frac{P_r(s)}{P_0(s)}+\frac{P_r(t)}{P_0(t)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{r-1}\ \sum_{p_1+2p_2+\ldots+(r-i)p_{r-i}=r-i}\ \prod_{k=1}^{r-i}\frac{A_k(s)^{p_k}}{p_k!}\prod_{l=1}^{i}\frac{A_l(t)^{q_l}}{q_l!}$$

ou, en posant

$$A_r(s) = \frac{P_r(s)}{P_0(s)} - \sum_{p_1+2p_2+\ldots+(r-1)p_{r-1}=r}\ \prod_{k=1}^{r}\frac{A_k(s)^{p_k}}{p_k!},$$

à

$$A_r(s+t) = A_r(s)+A_r(t),$$

ce qui démontre (32) et (33) pour $m = r$. D'autre part, on voit par substitution directe, que les fonctions données par (32) satisfont toujours à (29), si (33) et (34) sont satisfaites, c.q.f.d.

Admettons que le groupe ou le demi-groupe dans (29) est celui des $(n+1)$-tuples de nombres réels, que les P_m ($m = 0, 1, \ldots, n$) ne sont pas tous identiquement nuls et qu'ils sont bornés d'un côté (sur un intervalle $(n+1)$-dimensionnel ou sur un ensemble de mesure intérieure $(n+1)$-dimensionnelle positive). Supposons encore que si P_0 est borné à l'inférieur, sa borne inférieure soit positive. Alors (cf. [2]) les solutions générales de (33) et (34) sont données par

$$A_m(s) = \sum_{j=0}^{n} a_{jm}s_j \quad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

resp.

$$P_0(s) = \exp\sum_{j=0}^{n} a_{j0}s_j,$$

donc dans ce cas nous avons

(36)
$$P_m(s_0, s_1, \ldots, s_n) = \exp\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{j0}s_j\Big) \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_{jk}s_j\Big)^{p_k}/p_k!$$
$$(m = 0, 1, \ldots, n),$$

où les a_{jk} $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, m)$ sont des constants arbitraires.

Si, de plus, P_m est indépendant de $s_{m+1}, \ldots, s_n$ $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$, alors

$$P_m(s_0, s_1, \ldots, s_m) = \exp(a_{00}s_0) \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=0}^{k} a_{jk}s_j\Big)^{p_k}/p_k!$$
$$(m = 0, 1, \ldots, n)$$

est *la solution générale de* (30) *sous les conditions énumérées ci-dessus.*

Si les P_m ne dépendent que de s_1, nous retrouvons la solution (25) de (23). Sans supposer que les P_m $(m = 0, 1, \ldots)$ soient bornées on obtient *la solution la plus générale de* (23),

(37)
$$P_m(s_1) = P_0(s_1) \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} A_k(s_1)^{p_k}/p_k!$$

$(P_0(s_1+t_1) = P_0(s)P_0(t_1),\ A_m(s_1+t_1) = A_m(s_1)+A_m(t_1),\ m = 1, 2, \ldots)$.

Si $P_0 = 1$ et $P_m(s) = F_m(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, on a *la solution générale*

(38)
$$F_m(s) = \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \frac{A_k(s)^{p_k}}{p_k!} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

de (27), *où les* A_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ *sont des fonctions additives arbitraires* (33). En particulier, si les F_m ne dépendent pas non plus des $s_{m+1}, \ldots, s_n$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, on a *la solution la plus générale*

(39)
$$F_m(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \frac{A_k(s_1, s_2, \ldots, s_k)^{p_k}}{p_k!}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, n)$$

de (7), *où* A_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ *sont des solutions arbitraires de*

$$A_m(s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots, s_m+t_m) = A_m(s_1, s_2, \ldots, s_m)+A_m(t_1, t_2, \ldots, t^m)$$
$$(m = 1, 2, \ldots, n).$$

Si les F_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ sont bornées d'un côté (sur des ensembles de mesure intérieure positive), alors (38) *devient*

$$F_m(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}s_j\Big)^{p_k}/p_k! \quad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

et (39) *devient* (17).

L'équation (23) avec la solution (25) décrit les processus markoviens homogènes généraux. On peut trouver des applications semblables de l'équation (29) ayant la solution bornée (36) dans la théorie des processus markoviens *multiples homogènes*. Le processus général markovien multiple *sans condition d'homogénéité* (cf. [13]) est décrit par

$$(40) \qquad P_r(s, u) = \sum_{i=0}^{r} P_{r-i}(s, t)P_i(t, u)$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots;\ s = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\},\ t = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}).$$

En appliquant les méthodes exposées ci-dessus (voir [1] et [2]) et le fait que les solutions générales de $P_0(s, u) = P_0(s, t)P_0(t, u)$ et de $B(s, u) = B(s, t)+B(t, u)$ sont

$$P_0(s, t) = C_0(t)/C_0(s) \qquad \text{ou} \qquad B(s, t) = C(t)-C(s)$$

(pourvu que P_0 ne s'annule en aucun point) avec C_0 et C arbitriares (mais C_0 toujours différent de 0), on voit sans difficulté, que

$$P_m(s, t) = \frac{C_0(t)}{C_0(s)} \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} [C_k(t)-C_k(s)]^{p_k}/p_k!$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots),$$

les fonctions C_0 (partout $\neq 0$) et C_k $(k = 1, 2, \ldots)$ arbitrairement choisies, est la solution générale du système infini d'équations (40), en supposant que P_0 ne s'annule pas.

3. Nos équations ont des applications aussi en analyse combinatoire. Par exemple, Rota et Mullin définissent en [11], p. 167-213, les *polynômes du type binomial* par

$$(41) \qquad \pi_r(s_0+t_0) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \pi_{r-i}(s_0)\pi_i(t_0) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

(le système $\pi_m(s_0) = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ exclus) et donnent plusieurs exemples de tels polynômes. Mais en posant $P_m = \pi_m/m!$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ (41) devient

$$P_r(s_0+t_0) = \sum_{i=0}^{r} P_{r-i}(s_0)p_i(t_0) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

ce qui est identique avec (23). Donc, comme conséquence de (37), *les systèmes les plus généraux de fonctions du type binomial* (*solutions de* (41)) *sont donnés par*

$$\pi_m(s_0) = m!\pi_0(s_1) \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \frac{a_k(s_0)^{p_k}}{p_k!} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

où π_0 *et* a_m $(m = 1, 2, \ldots)$ *sont des solutions arbitraires de* $\pi_0(s_0+t_0) = \pi_0(s_0)\pi_0(t_0)$ *et de* $a_m(s_0+t_0) = a_m(s_0)+a_m(t_0)$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Par conséquent, *les systèmes les plus généraux de fonctions bornées du type binomial* (*conditions analogues à celles qui impliquent* (36)) *sont donnés par*

$$\pi_m(s_0) = m!e^{as_0} \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \frac{(a_k s_0)^{p_k}}{p_k!} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

ainsi ils ne diffèrent des *polynômes les plus généraux du type binomial*

$$\pi_m(s_0) = m! \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \frac{(a_k s_0)^{p_k}}{p_k!} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

que par un facteur exponentiel commun.

Mais aussi le système d'équations fonctionnelles

$$(42) \quad \varphi_r(s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots, s_n+t_n) = \varphi_r(s_1, s_2, \ldots, s_{r-i}) + \\ + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} \varphi_{r-i}(s_1, s_2, \ldots, s_{r-i})\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_r) + \varphi_r(t_1, t_2, \ldots, t_r) \\ (r = 1, 2, \ldots)$$

joue un rôle important en analyse combinatoire. Bell [4] (cf. aussi [9] et [10]) en a donné comme solutions particulières les „polynômes Y de Bell" $\varphi_1^Y(s_1) = s_1$, $\varphi_2^Y(s_1, s_2) = s_1^2+s_2$, $\varphi_3^Y(s_1, s_2, s_3) = s_1^3+3s_1s_2+s_3$, $\varphi_4^Y(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1^4+6s_1^2s_2+4s_1s_3+3s_2^2+s_4$, etc., en général

$$(43) \quad \varphi_m^Y(y_1, y_2, \ldots, y_m) = m! \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{y^k}{k!}\right)^{p_k} / p_k! \\ (m = 1, 2, \ldots).$$

Nous pouvons déterminer la solution générale du système infini (42) si nous remarquons que de nouveau les

$$(44) \quad F_m = \frac{\varphi_m}{m!} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

satisfont à (7). Comme dans les cas de (23), (40) et (41), le fait que le système (42) contient un nombre infini d'équations (et de fonctions inconnues) pendant que (7) en contient seulement un nombre fini, ne cause aucune difficulté, car nous avons résolu (7) successivement, une équation après l'autre, et ce processus peut être continué indéfiniment (et il l'était aussi, car n en (17), (39) etc. était un nombre naturel arbitraire). Par le théorème 1 et par (44) la solution générale de (42) est

$$\varphi_m(s_1, s_2, \ldots, s_m) = m! \sum_{p_1+2p_2+\ldots+mp_m=m} \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{k} a_{jk}s_j\Big)^{p_k}/p_k! \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{45}$$

avec des constantes a_{jk} $(1 \leqslant j \leqslant k \leqslant m)$ *arbitraires pourvu que tous les* φ_m $(m = 1, 2, \ldots)$ *soient supposées bornées d'un côté sur des ensembles de mesure intérieure positive.*

La comparaison de (45) et (43) montre qu'on obtient la solution particulière φ_m^Y de la solution générale (45) en choisissant $a_{jk} = \delta_{jk}/k!$ $(1 \leqslant j \leqslant k \leqslant m)$ et que pour la solution générale (45) on a

$$\varphi_m(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \varphi_m^Y[a_{11}s_1, 2!(a_{12}s_1 + a_{22}s_2), \ldots, m! \sum_{j=1}^{m} a_{jm}s_j] \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

pendant que la comparaison de (43) et (21) donne

$$\varphi_m^Y(y_1, y_2, \ldots, y_m) = m! F_m^\delta\left(y_1, \frac{y_2}{2!}, \ldots, \frac{y_m}{m!}\right)$$

où

$$F_m^\delta(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \frac{1}{m!}\varphi_m^Y(z_1, 2!z_2, \ldots, m!z_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Bien sûr, les φ_m^Y, avec $\varphi_0^Y = 1$, sont aussi des solutions de la forme généralisée de (42) et de (41),

$$\pi_r(s_0 + t_0, s_1 + t_1, \ldots, s_r + t_r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \pi_{r-i}(s_0, s_1, \ldots, s_{r-i})\pi_i(t_0, t_1, \ldots, t_i) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

dont les solutions générales peuvent être déterminées parallèlement.

Les systèmes d'équations, analogues à (29) et à (41),

$$G_r(st) = \sum_{i=0}^{r} G_{r-i}(s)G_i(t), \qquad D^r(st) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} D^{r-i}(s)D^i(t) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

où s et t parcourent une algèbre (de Banach) A et les G_m, D^m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) sont des opérateurs linéaires sur A, jouent aussi dans l'*algèbre abstraite* et dans l'*analyse fonctionnelle* un rôle qui s'explique par la définition des dérivations d'ordre supérieur (voir par exemple [7]).

Comme on voit des démonstrations ci-haut, aussi dans ce travail le corps des nombres réels peut etre remplacé par des structures algébriques plus générales.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Aczél, *On composed Poisson distributions. III*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 3 (1952), p. 219-224.

[2] — *Lectures on fonctional equations and their applications*, Mathematics in Science and Engineering 19, New York-London 1966.

[3] — et P. Erdös, *The non-existence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for non-negative numbers*, Publicationes Mathematicae (Debrecen) 12 (1965), p. 259-263.

[4] E. T. Bell, *Exponential polynomials*, Annals of Mathematics 35 (1934), p. 258-277.

[5] L. Jánossy, A. Rényi et J. Aczél, *On composed Poisson distributions. I*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 1 (1950), p. 209-224.

[6] S. Kurepa, *Semigroups of linear transformations in n-dimensional vector space*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. (2) 13 (1958), p. 3-32.

[7] J. B. Miller, *Higher derivations on Banach algebras*, American Journal of Mathematics 92 (1970), p. 301-331.

[8] R. M. Redheffer, *A note on the Poisson law*, Mathematics Magazine 26 (1953), p. 183-188.

[9] J. Riordan, *Derivatives of composite functions*, Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), p. 664-667.

[10] — *An introduction to combinatorial analysis*, New York-London-Sydney 1958.

[11] G.-C. Rota et R. Mullin, *On the foundations of combinatorical theory. I, Graph theory and its applications*, New York 1970.

[12] G. Vranceanu, *Groupes discrets linéaires*, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées 7 (1962), p. 205-222.

[13] —. *Interprétation géométrique des processus probabilistiques continus*, Mémoires des Sciences Mathématiques 167, Paris 1969.

Reçu par la Rédaction le 21. 7. 1971