COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXI 1974 FASC. 2

À PROPOS DES THÉORIES DE GALOIS FINIES ET INFINIES

PAR

R. MOORS (LIÈGE)

1. Introduction. Lorsqu'il établit les théorèmes d'une théorie de Galois „extérieure" pour un groupe G d'automorphismes extérieurs d'un corps A algébrique sur inv G, Jacobson (¹) s'appuie sur les résultats obtenus dans une théorie „finie". Page 166, il regrette que la théorie extérieure ne comprenne pas la théorie finie. Dans l'espoir d'y voir un peu clair, nous avons cherché à dégager la partie de la théorie de Galois extérieure qui découle de la théorie finie par le seul caractère fini des xG, $x \in A$. Nous avons travaillé sur une Ω-algèbre A, idée qui nous est venue en voyant L. Nollet établir une partie des lemmes qui suivent.

2. Préliminaires. Soit A un ensemble. Munissons l'ensemble A^A des applications $A \to A$ de la topologie produit d'espaces discrets. Ainsi, si les B_a sont des parties de A indexées par $a \in A$, $\prod B_a$ est fermé dans A^A, ouvert si les B_a sont égaux à A à un nombre fini près. En particulier, l'ensemble E des applications $A \to A$ qui coïncident avec une application donnée f: $A \to A$ sur une partie fixée L de A est fermé. En effet, on peut écrire $E = \prod B_a$, où $B_a = \{af\}$ lorsque $a \in L$, tandis que $B_a = A$ si $a \notin L$. E est ouvert lorsque L est fini.

LEMME 1. *Soit A une Ω-algèbre. L'adhérence dans A^A d'un ensemble H d'homomorphismes $A \to A$ se compose d'homomorphismes.*

En particulier, l'ensemble des endomorphismes est fermé.

Démonstration. Il faut montrer que toute application $h \in \bar{H}$ est un homomorphisme. Si ω est un opérateur n-aire de Ω et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A,

$$V = \{f \in A^A \mid \forall i = 1, \ldots, n,\ a_i h = a_i f \text{ et } a_1 \ldots a_n \omega h = a_1 \ldots a_n \omega f\}$$

est un voisinage ouvert de h qui contient donc un homomorphisme α de H. On a

$$a_1 \ldots a_n \omega h = a_1 \ldots a_n \omega \alpha = (a_1 h) \ldots (a_n h) \omega.$$

(¹) N. Jacobson, *Structure of rings*, American Mathematical Society Colloquium Publications 37, Providence 1964.

LEMME 2. *L'adhérence d'un ensemble I d'injections $A \to A$ se compose d'injections.*

En particulier, l'ensemble des injections est fermé.

Démonstration. Soit $h \in \bar{I}$. Si a et b sont des éléments de A tels que $ah = bh$, montrons que $a = b$. Il existe une injection i de I qui appartient au voisinage ouvert $V = \{f \in A^A \mid ah = af \text{ et } bh = bf\}$ de h. On a $ah = ai = bh = bi$, donc $a = b$.

En posant $a\tilde{S} = \{x \in A \mid \exists s \in S, xs = as\}$ on a le lemme suivant:

LEMME 3. *L'adhérence d'un ensemble S de surjections $A \to A$ telles que, pour tout $a \in A$, $a\tilde{S}$ soit fini, est un ensemble de surjections. Pour tout $a \in A$, $a\tilde{\bar{S}} = a\tilde{S}$.*

Démonstration. Soit $h \in \bar{S}$. Montrons que $A \setminus (Ah)$ est vide. Si b appartenait à $A \setminus (Ah)$, il existerait un élément $s \in S$ appartenant au voisinage

$$V = \bigcap_{y \in b\tilde{S}} \{f \in A^A \mid yf = yh\}$$

de h. Choisissons $c \in b\tilde{s}$. On a $cs = b = ch$. Donc $b \in Ah$, ce qui est exclu. Ainsi h est surjectif.

Soit maintenant $a \in A$. De $S \subset \bar{S}$, on déduit $a\tilde{\bar{S}} \supset a\tilde{S}$. Il reste à montrer que $x \in a\tilde{S}$ dès que $x \in a\tilde{\bar{S}}$. Si $x \in a\tilde{\bar{S}}$, il existe $g \in \bar{S}$ tel que $xg = a$. Le voisinage $V = \{f \in A^A \mid xf = a\}$ de g contient un élément s de S tel que $xs = a$. Ainsi $x \in a\tilde{S}$.

3. Groupes galoisiens et sous-algèbres galoisiennes. Soit A une Ω-algèbre. Si B est une partie de A, nous appellerons $\operatorname{gal} B$ l'ensemble des automorphismes de A qui coïncident avec l'identité sur B; c'est un groupe d'automorphismes de A. On a $B \subset \operatorname{inv} \operatorname{gal} B$, si on désigne par $\operatorname{inv} H$ l'ensemble des éléments de A qui sont laissés fixes par tous les éléments d'un ensemble H d'automorphismes. $\operatorname{inv} H$ est une sous-algèbre de A (la sous-algèbre vide est admise). On a $H \subset \operatorname{gal} \operatorname{inv} H$. Nous qualifierons de *galoisien* un groupe G d'automorphismes de A tel que $G = \operatorname{gal} \operatorname{inv} G$. De même, seront *galoisiennes* les sous-algèbres B de A telles que $B = \operatorname{inv} \operatorname{gal} B$. Restreinte aux sous-algèbres galoisiennes de A, l'application gal établit une bijection entre celles-ci et les groupes galoisiens d'automorphismes de A; sa réciproque est la restriction de l'application inv.

G sera désormais un groupe galoisien d'automorphismes de A tel que aG soit fini pour tout $a \in A$. On pose $L = \operatorname{inv} G$.

Vu les lemmes qui précèdent, les sous-groupes galoisiens de G sont des fermés de A^A.

LEMME 4. *Une sous-algèbre $B = \langle L \cup F \rangle$ de A, engendrée par la réunion de L et d'une partie finie F de A est incluse dans une sous-algèbre C invariante* *par G et engendrée par la réunion de L et d'une partie finie F_1 de A. Un tel F_1 est, par exemple, FG.*

Démonstration. $F_1 = FG = \{a\alpha \mid a \in F$ et $\alpha \in G\}$ est fini. Posons $C = \langle L \cup F_1 \rangle$. On a $B \subset C$ puisque $F \subset F_1$ $(1 \in G)$. Pour tout automorphisme $\alpha \in G$, $(L \cup F_1)\alpha \subset L \cup F_1$, ainsi, pour tout $\alpha \in G$, $C\alpha \subset C$.

THÉORÈME. *Si quelconque des trois propriétés suivantes est vraie, elle l'est encore lorsqu'on néglige le passage entre guillemets.*

(1) *Les sous-algèbres de A qui incluent L «et qui sont engendrées par la réunion de L et d'une partie finie de A» sont galoisiennes.*

(2) *Si B est une sous-algèbre quelconque qui inclut L et «qui est engendrée par la réunion de L et d'une partie finie de A», si φ est un monomorphisme $B \to A$ identique sur L, alors φ est la restriction à B d'un automorphisme de A.*

(3) *Si H et H' sont des sous-groupes de G fermés dans A^A et tels que* $\operatorname{inv} H = \operatorname{inv} H'$, *alors sont égaux les groupes H_1 et H'_1 des restrictions des éléments de H et H' à toute sous-algèbre C globalement invariante par G qui inclut $B =$* $\operatorname{inv} H$ *«et qui est engendrée par la réunion de B et d'une partie finie de A».*

Démonstration. (1) Soit B une sous-algèbre qui inclut L. On a $B \subset \operatorname{inv}\operatorname{gal} B$. Il nous suffit donc de démontrer que, si a appartient à $A \setminus B$, il existe un automorphisme α appartenant à $\operatorname{gal} B$ tel que $a\alpha \neq a$. Si F est une partie finie de B, la sous-algèbre $B_F = \langle L \cup F \rangle$, engendrée par $L \cup F$, est galoisienne et est incluse dans B; il existe donc un automorphisme $\beta \in \operatorname{gal} B_F$ tel que $a\beta \neq a$. Posons

$$C_F = \{\beta \in \operatorname{gal} B_F \mid a\beta \neq a\}.$$

C_F n'est pas vide et est inclus dans le compact $\Pi = \prod_{x \in A} xG$. Vu les lemmes qui précèdent, C_F est fermé dans A^A, donc dans Π. Si F et G sont des parties finies de B, $C_F \cap C_G = C_{F \cup G}$ n'est pas vide; donc si P est l'ensemble des parties finies de B, $(C_F)_{F \in P}$ est une famille de fermés du compact Π dont toute sous-famille finie possède une intersection non vide. Ainsi $C = \bigcap \{C_F \mid F \in P\}$ n'est pas vide. Soit $\alpha \in C$; on a $\alpha \in \operatorname{gal} B$ et $a\alpha \neq a$.

(2) Soient C une sous-algèbre qui inclut L et un monomorphisme $\varphi\colon C \to A$, identique sur L. Si F est une partie finie de C, posons $B_F = \langle L \cup F \rangle$. Il existe un automorphisme $\alpha \in G$ dont la restriction à B_F coïncide avec la restriction de φ. Posons

$$C_F = \{\alpha \in G \mid \forall a \in B_F,\ a\alpha = a\varphi\}.$$

C_F n'est pas vide et est inclus dans le fermé compact $\Pi = \prod_{x \in A} xG$. Vu les lemmes qui précèdent,

$$C_F = (\operatorname{gal} L) \cap \bigcap_{a \in B_F} \operatorname{proj}_a^{-1}\{a\varphi\}$$

est fermé dans A^A, donc dans Π ($\mathrm{proj}_a^{-1}\{a\varphi\}$ désigne $\{f \in A^A \mid af = a\varphi\}$). Si F et G sont des parties finies de B, $C_F \cap C_G = C_{F \cup G}$ n'est pas vide. A partir d'ici, en raisonnant comme en (1), on découvre l'existence d'un automorphisme $\beta \in G$ tel que, pour tout $a \in C$, $a\beta \neq a\varphi$.

(3) Soient les sous-groupes fermés H et H' de G tels que $\mathrm{inv}H = \mathrm{inv}H'$. Nous allons montrer que $H = H'$. Posons $B = \mathrm{inv}H$. Montrons que tout élément α de H adhère à H'; on en déduira $H \subset H'$, puis la thèse. Si V est un voisinage de α dans A^A, il existe une partie finie F de A telle que

$$\alpha \in \bigcap_{a \in F} \mathrm{proj}_a^{-1}\{a\alpha\} \subset V.$$

Appelons C la sous-algèbre de A engendrée par la réunion de B et de FG. Les groupes H_1 et H_1' des restrictions des éléments de H et H' à C sont égaux. Il existe donc un élément β de H' qui coïncide avec α sur C. En particulier, α et β coïncident sur F; ainsi

$$\beta \in \bigcap_{a \in F} \mathrm{proj}_a^{-1}\{a\alpha\}.$$

On a alors $\beta \in V$, ce qui termine la démonstration.

Exemple. Supposons que A soit un corps algébrique à gauche sur $L = \mathrm{inv}\, G$, où G est un groupe d'automorphismes extérieurs de A. Montrons que les conditions d'application du théorème précédent sont réunies.

Reportons-nous à Jacobson, loc. cit., Chapitre VII, § 6. Si x appartient à A, par la proposition 1, (3), x appartient à un sous-corps Ω qui inclut L, qui est de dimension finie sur L et qui est invariant par G. Par (2), les restrictions à Ω des automorphismes de G sont en nombre fini. Ainsi xG est fini.

Quant aux propriétés (1), (2) et (3) ci-dessus, elles sont vérifiées puisqu'elles sont impliquées par la proposition 4 et le théorème.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Reçu par la Rédaction le 3. 4. 1973