COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XV 1966 FASC. 2

SUR L'ENSEMBLE DES POINTS D'INDÉPENDANCE LINÉAIRE DES FONCTIONS DONT LE WRONSKIEN S'ANNULE

PAR

Z. MOSZNER (CRACOVIE)

Soit S un système de n fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ complexes d'une variable réelle définies dans un intervalle (entendu dans cette communication comme un sous-ensemble connexe arbitraire de l'espace des nombres réels).

Rappelons que le système s'appelle *linéairement dépendant* dans un intervalle s'il existe un système de nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pour lequel on a dans cet intervalle

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^2 > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) = 0.$$

Appelons un point x_0 d'un intervalle I *point d'indépendance linéaire* du système S si le système S n'est linéairement dépendant dans aucun entourage de x_0 relatif à I (c'est-à-dire dans aucune intersection d'un entourage de x_0 avec l'intervalle I).

Admettons que les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ sont différentiables jusqu'à l'ordre $n-1$ et que leurs wronskien

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1^1(x) & f_2^1(x) & \ldots & f_n^1(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

reste nul dans l'intervalle I. On sait que, dans ce cas, il peut exister dans l'intervalle I un point x_0 d'indépendance linéaire du système S ([1]). Cette communication a pour but de caractériser topologiquement l'ensemble des points d'indépendance linéaire du système considéré S.

([1]) Z. Moszner, *Sur le wronskien et la dépendance linéaire des fonctions*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, 85 (1961), p. 165-190.

I. *Si le wronskien du système S dont les fonctions sont différentiables jusqu'à l'ordre $n-1$ dans l'intervalle I reste nul sur I, l'ensemble E des points d'indépendance linéaire de S dans I est non-dense et fermé relativement à I.*

II. *Si un ensemble E de l'intervalle I est non-dense et fermé relativement à I, il existe pour tout $n \geqslant 2$ un système S de n fonctions d'une variable réelle, différentiables jusqu'à l'ordre $n-1$ et dont le wronskien s'annule sur I et tel que E est l'ensemble des points d'indépendance linéaire de S.*

J'ai démontré I dans mon travail précité (voir ([1]), p. 174-176). Il suffit donc d'établir II.

Il existe, pour tout intervalle ouvert et borné $J = (a, b)$ et pour tout entier et positif n, une fonction réelle $f_J(x)$, appelée dans la suite *fonction spéciale* pour J satisfaisant aux conditions:

(a) $f_J(x)$ est de classe C^∞ dans J,

(b) $|f_J^{(k)}(x)| \leqslant (x-a)^2$ dans J pour $k = 0, 1, \ldots, n-2$ où $f_J^{(0)}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f_J(x)$,

(c) $|f_J^{(k)}(x)| \leqslant (b-x)^2$ dans J pour $k = 0, 1, \ldots, n-2$,

(d) $f_J(x) > 0$ dans J.

L'existence d'une fonction spéciale pour l'intervalle J se laisse démontrer par une méthode analogue à celle employée dans ([1]), p. 167-168.

Soit à présent n un entier positif fixe. Considérons dans un intervalle arbitraire I un ensemble E non-dense et fermé relativement à I. La différence $I \setminus E$ est donc un ensemble ouvert relativement à I, c'est-à-dire de la forme $I \setminus E = I \cap G$, où G est un ensemble ouvert:

$$G = \bigcup_j I_j, \tag{1}$$

où I_j forment une suite finie ou infinie d'intervalles ouverts et disjoints.

Je me borne au cas dans lequel

(2) l'intervalle I est de la forme $[\alpha, \infty)$ où $\alpha \in E$ et α n'est pas le point d'accumulation de l'ensemble E,

la démonstration dans tous les autres cas ne comportant pas de raisonnements essentiellement différents.

Or dans le cas (2) l'un des intervalles I_j de la décomposition (1) est de la forme $(-\infty, \alpha)$. Éliminons-le de la suite $\{I_j\}$, mais continuons de la désigner par $\{I_j\}$. Dans le cas (2), il existe en outre dans la décomposition (1) un intervalle dont α est l'extrémité gauche. Désignons cet intervalle par I_1. Soit $\{a_j\}$ une suite infinie décroissante de points de I_1 convergeant vers α. On a

$$I_1 = \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} [a_{j+1}, a_j]\Big) \cup [a_1, \beta), \tag{3}$$

pour x de l'intervalle $[a, \infty)$. On a d'après la définition de f_1 et f_2 une des égalités

$$f_1^{(k)}(x) = f_2^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$f_1(\xi) = -f_2(\xi) \text{ dans un entourage de } x,$$

$$f_2(\xi) = \lambda_j f_1(\xi) \text{ pour un certain } j \text{ dans un entourage de } x,$$

donc le rang de la matrice (11) est au plus égal à 1 pour chaque x de l'intervalle $[a, \infty)$.

Considérons des fonctions $f_3(x), \ldots, f_n(x)$ qui sont de classe C^{n-1} dans l'intervalle $[a, \infty)$ et dont le wronskien est différent de zéro en chaque point de cet intervalle. Puisque le rang de la matrice (11) est au plus égal à 1 pour chaque x de l'intervalle $[a, \infty)$, le wronskien du système S des fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ s'annule sur $[a, \infty)$.

Reste à démontrer que l'ensemble E^* des points d'indépendance linéaire de S dàns l'intervalle $[a, \infty)$ est égal à l'ensemble E. Considérons un point $\bar{x} \in E$ et un entourage Δ de $\bar{x}$ relatif à $[a, \infty)$. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des nombres tels que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) \equiv 0 \text{ sur } \Delta. \tag{12}$$

En différentiant les deux membres jusqu'à l'ordre $n-3$, il vient

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j^{(k)}(x) \equiv 0 \text{ sur } \Delta \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n-3. \tag{13}$$

Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ et leurs dérivés jusqu'à l'ordre $n-1$ s'annulent sur E en vertu de leur définitions. En posant donc $x = \bar{x}$ dans (12) et (13), on a

$$\sum_{j=3}^{n} c_j f_j^{(k)}(\bar{x}) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, n-3.$$

Le wronskien des fonctions $f_3(x), \ldots, f_n(x)$ étant différent de zéro, on a $c_j = 0$ pour $j = 3, 4, \ldots, n$. La relation (12) prend alors la forme

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \equiv 0 \text{ sur } \Delta. \tag{14}$$

Pour $\bar{x} = a$, il existe dans l'intervalle Δ d'après les définitions (5) et (6) des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ au moins un point x_1 pour lequel $f_1(x_1) = f_2(x_1) \neq 0$ et au moins un point x_2 pour lequel $f_1(x_2) = -f_2(x_2) \neq 0$. D'après (14), $c_1 + c_2 = 0$ et $c_1 - c_2 = 0$, d'où $c_1 = c_2 = 0$.

Pour $\bar{x} \neq a$, l'ensemble E étant non-dense, il existe dans l'entourage Δ, d'après des définitions (7), (8) et (10) des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, au moins un point x_1 et un indice j_1 pour lequel $\lambda_{j_1} f_1(x_1) = f_2(x_1) \neq 0$ et au moins un point x_2 et un indice $j_2 \neq j_1$ pour lequel $\lambda_{j_2} f_1(x_2) = f_2(x_2) \neq 0$.

Par conséquent, d'après (14), $c_1+\lambda_{j_1}c_2 = 0$ et $c_1+\lambda_{j_2}c_2 = 0$, ce qui entraîne d'après (9) que $c_1 = c_2 = 0$ aussi dans ce cas.

Il est ainsi démontré que (12) entraîne $c_j = 0$ pour $j = 1, \ldots, n$. Il en résulte que les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ ne sont pas linéairement dépendantes dans Δ et de là, Δ étant un entourage arbitraire de $\bar{x}$, que le point $\bar{x} \in E^*$, d'où $E \subset E^*$.

Soit à présent $\bar{x}$ un point de l'ensemble $[a, \infty)\setminus E$. Il existe donc un indice j_0 tel que $\bar{x} \in I_{j_0}$. Si $j_0 \neq 1$, on a, d'après les définitions des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, $\lambda_{j_0} f_1(x) = f_2(x)$ pour tous les x de I_{j_0}. Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ et par conséquent les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, sont alors linéairement dépendantes dans I_{j_0} et par conséquent

(15) $$\bar{x} \in [a, \infty)\setminus E^*.$$

Si $j_0 = 1$, c'est-à-dire si $\bar{x} \in I_1$, il y a deux possibilités:

(i) $\bar{x} \neq a_j$ pour $j = 1, 2, \ldots$,

(ii) $\bar{x} = a_{j^*}$ pour un certain j^*.

Dans le cas (i), en raisonnant comme plus haut, nous constatons que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, donc également les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, sont linéairement dépendantes dans un entourage de $\bar{x}$, d'où (15).

Dans le cas (ii), les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont égales d'après leurs définitions à zéro d'un côté du point $\bar{x} = a_{j^*}$ et on a $f_1(x) = f_2(x)$ de l'autre côté de ce point; ou bien $f_1(x) = f_2(x) \equiv 0$ d'un côté de $\bar{x}$ et $f_1(x) = -f_2(x)$ de l'autre côté de $\bar{x}$. Il en résulte que dans ce cas aussi les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ et par conséquent les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, sont linéairement dépendantes dans un entourage de $\bar{x}$, d'où (15). Il est ainsi démontré que $\bar{x} \in [a, \infty)\setminus E$ entraîne (15). Par conséquent $E^* \subset E$ et l'égalité $E = E^*$ se trouve établie.

La démonstration du théorème II dans le cas (2) est donc achevée.

Remarque. Comme le montre l'exemple des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ dans l'intervalle I_1, il peut arriver que les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ sont linéairement indépendantes dans l'intervalle, dans lequel il n'y a pas de points d'indépendance linéaire de leur système. Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ne sont pas linéairement dépendantes dans I_1, car elles sont continues en point a qui est l'extrémité gauche de I_1 et qui est point d'indépendance linéaire de ces fonctions.

Reçu par la Rédaction le 3. 11. 1964;
en version modifiée le 16. 1. 1965